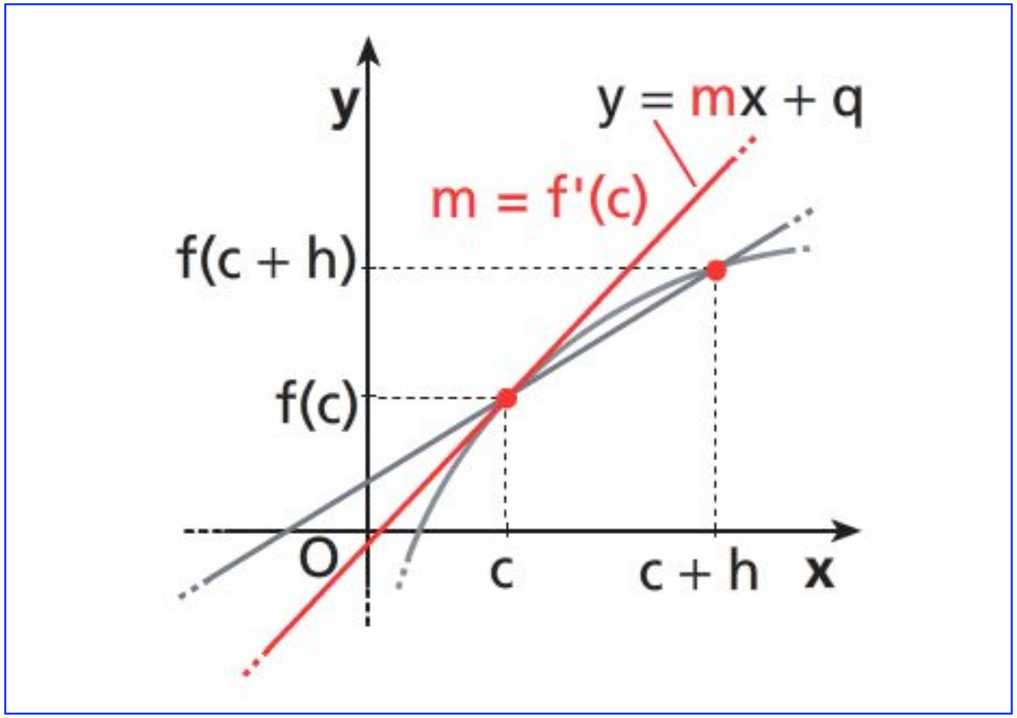
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

DERIVATA DI UNA FUNZIONE



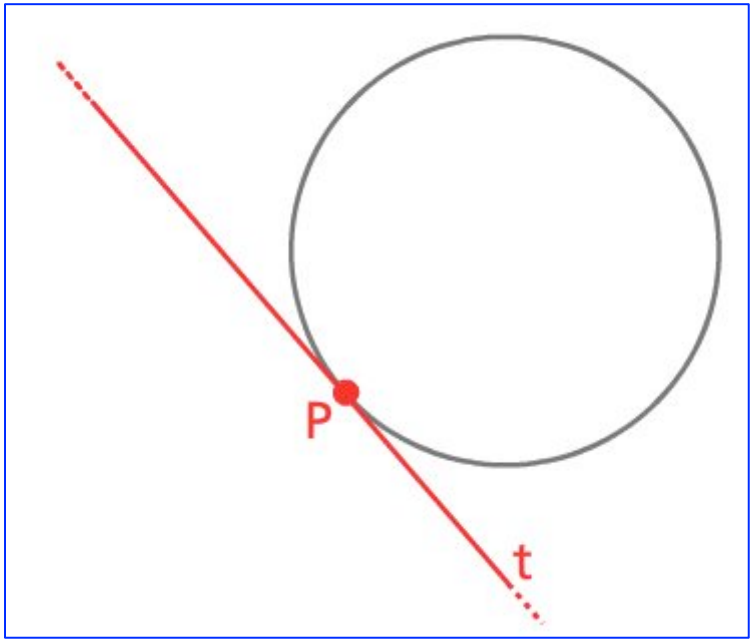
DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Il problema della tangente

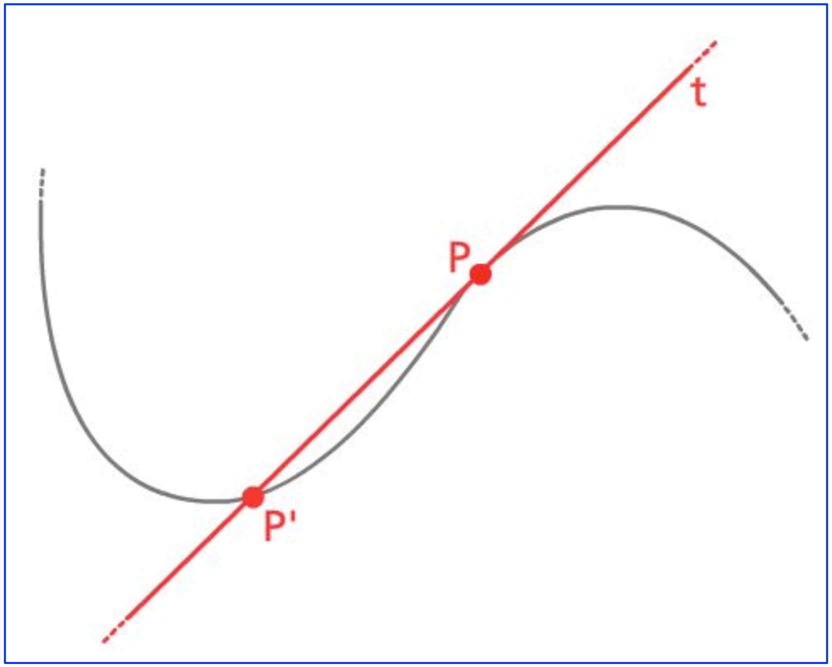
Uno dei problemi classici che portarono al concetto di derivata è quello della determinazione della retta tangente a una curva in un punto.

definizione

Per ogni circonferenza, e in generale per ogni conica, la tangente in un punto P è quella retta che interseca la conica stessa soltanto in P.



Si potrebbe definire la tangente a una qualunque curva mediante tale proprietà.



Ma la definizione data non sempre è corretta.

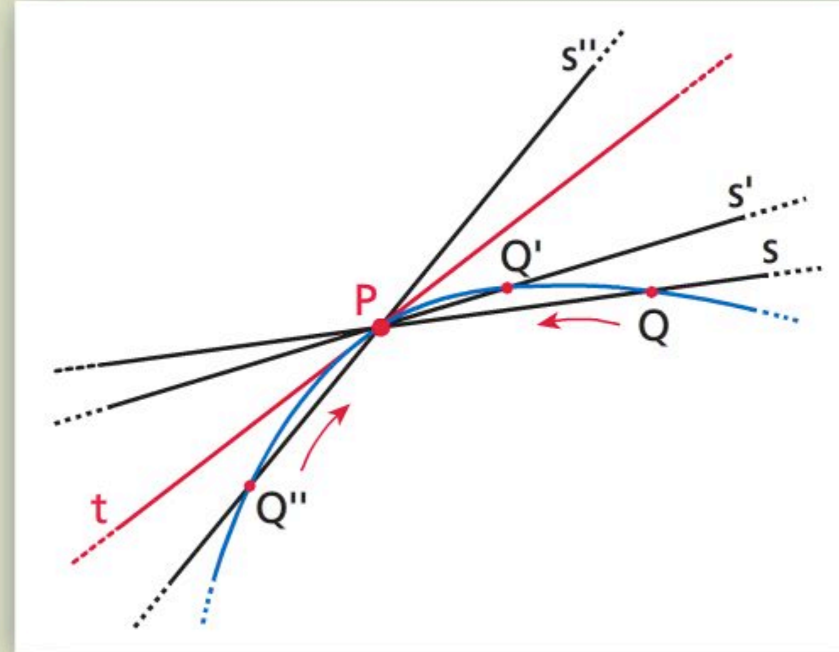
La retta t è tangente alla curva nel punto P ma la interseca nel punto P'.

Per ottenere allora una definizione valida in generale, ci si richiama al concetto di limite, pensando al procedimento secondo il quale si può approssimare la tangente mediante rette secanti che le si avvicinano sempre di più.

DEFINIZIONE

Retta tangente a una curva

La retta tangente t a una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della secante PQ al tendere (sia da destra sia da sinistra) di Q a P.



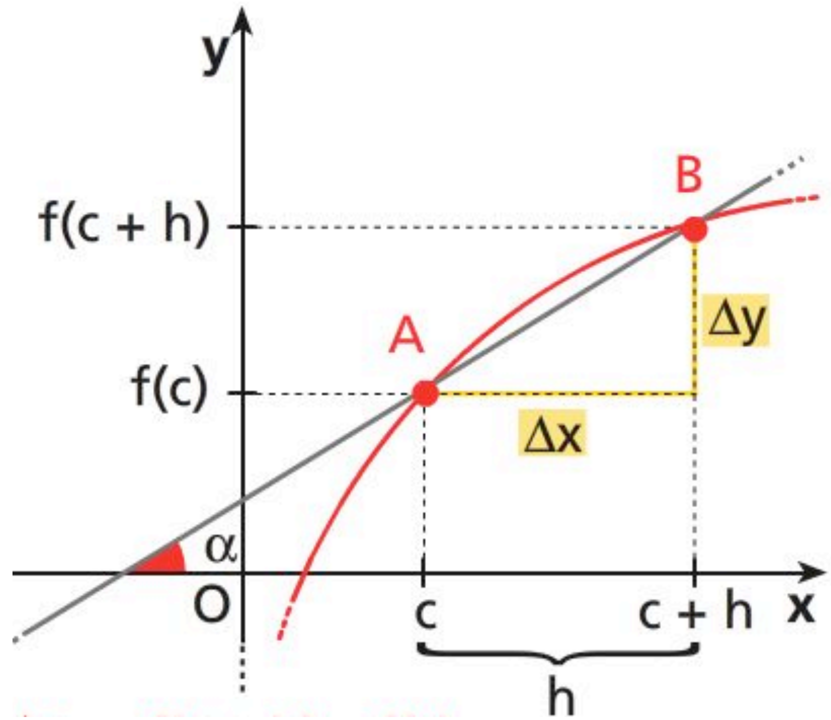
Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e troviamo l'equazione della tangente in un suo punto applicando la definizione appena data. Dobbiamo innanzitutto considerare il *rapporto incrementale*.

Il rapporto incrementale

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e un punto del suo grafico $A(c; f(c))$, incrementiamo l'ascissa di A di una quantità h e così otteniamo il punto B di coordinate:

$$x_B = c + h; \; y_B = f(x_B) = f(c + h),$$

ossia, $B(c + h; f(c + h))$.



Consideriamo gli incrementi:

$$\Delta x = x_B - x_A = h$$

$$\Delta y = y_B - y_A = f(c + h) - f(c)$$

Il rapporto dei due incrementi è $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

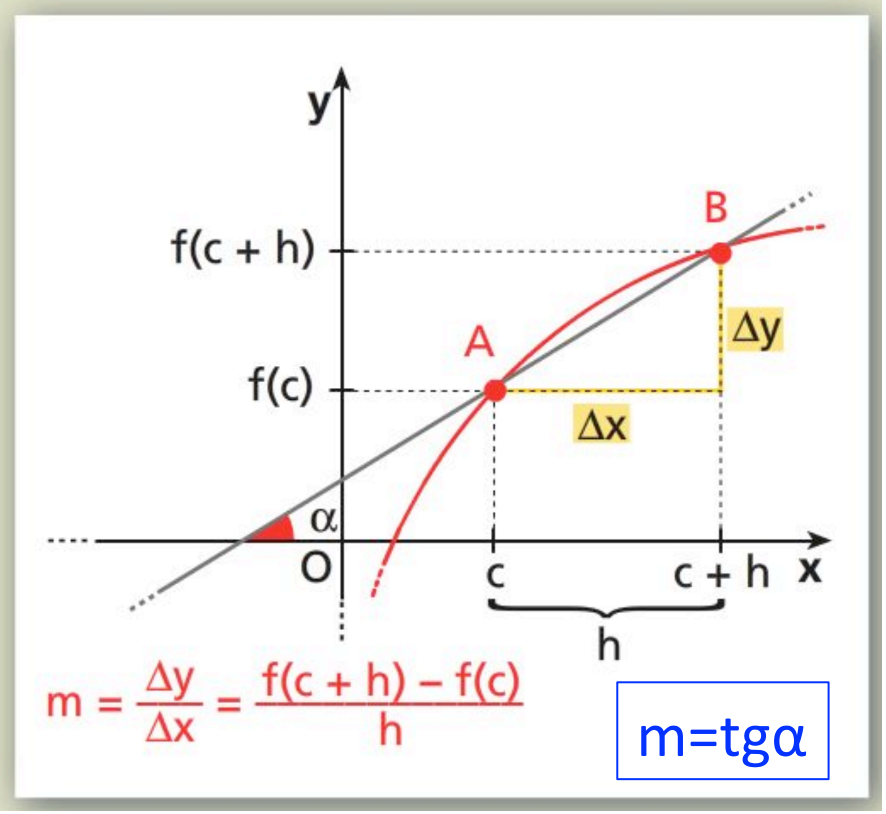
Sia c sia $c + h$ devono appartenere all'intervallo $]a; b[$, ossia essere **interni** all'intervallo $[a; b]$. h può essere positivo o negativo.

DEFINIZIONE

Rapporto incrementale

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e due diversi numeri reali c e $c + h$ interni all'intervallo, si chiama rapporto incrementale di f (relativo a c) il numero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$



Il rapporto incrementale della funzione è il coefficiente angolare della retta passante per A e B.

ESEMPIO

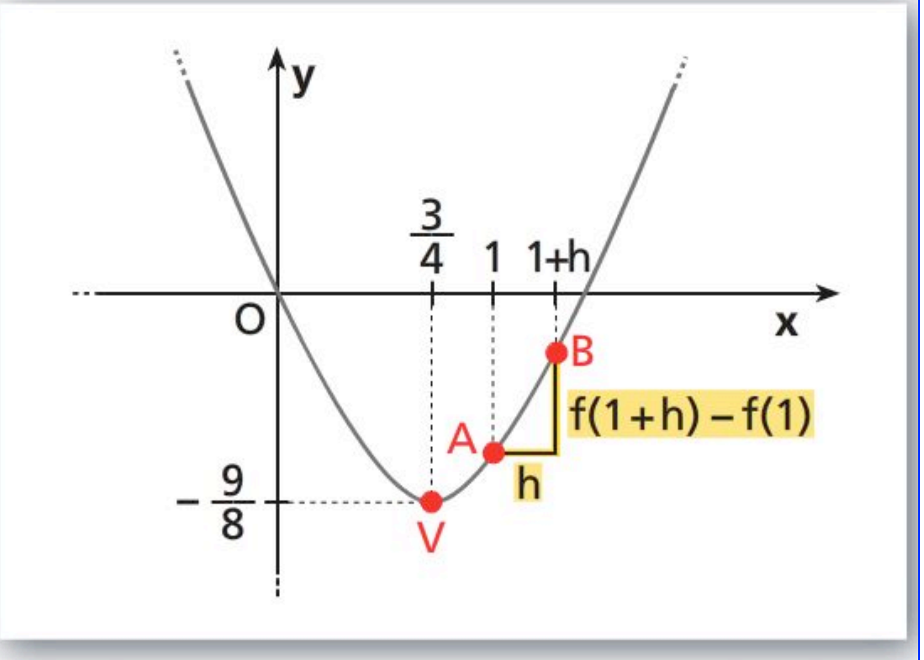
Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione $y = f(x) = 2x^2 - 3x$ relativo al suo punto A di ascissa 1 e a un generico incremento h.

soluzione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Determiniamo $f(1+h)$ sostituendo alla x della funzione l'espressione $1 + h$:

$$f(1+h) = 2(1+h)^2 - 3(1+h) =$$
$$= 2(1 + 2h + h^2) - 3 - 3h =$$
$$= -1 + h + 2h^2.$$



Determiniamo $f(1)$ sostituendo alla x della funzione il numero 1:

$$f(1) = -1.$$

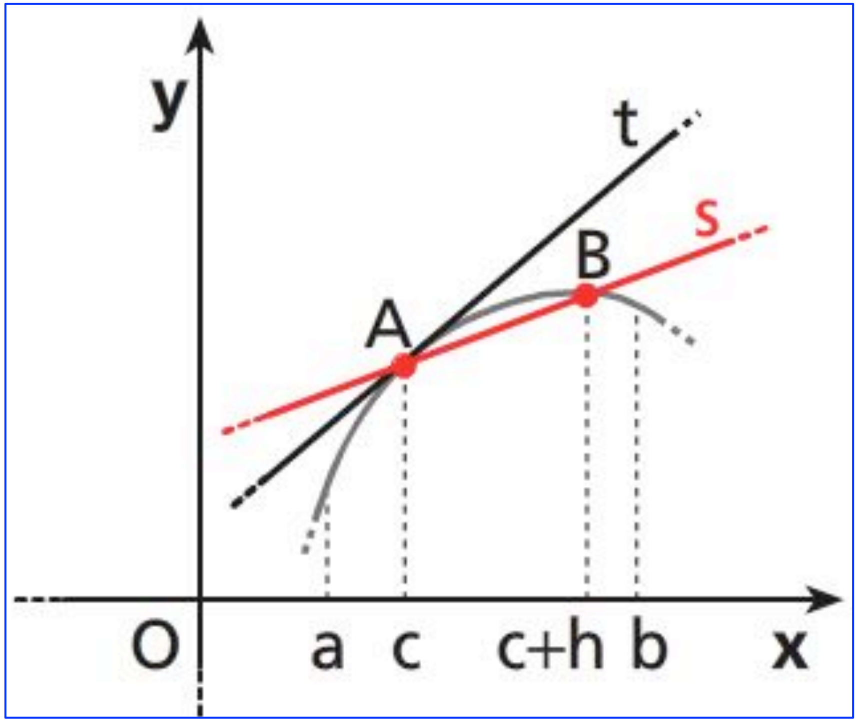
Sostituiamo le due espressioni trovate nella formula del rapporto incrementale:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\cancel{-1} + h + 2h^2 \cancel{-(-1)}}{h} = \frac{\cancel{h}(2h+1)}{\cancel{h}} = 2h + 1.$$

L'espressione trovata rappresenta, al variare di h, il coefficiente angolare di una generica retta secante passante per A.

In generale, il valore del rapporto incrementale dipende dal valore di h. Nell'esempio precedente, se $h = 0{,}2$, il rapporto incrementale vale $2(0{,}2) + 1 = 1{,}4$; se $h = 0{,}1$, vale $2(0{,}1) + 1 = 1{,}2$ e così via.

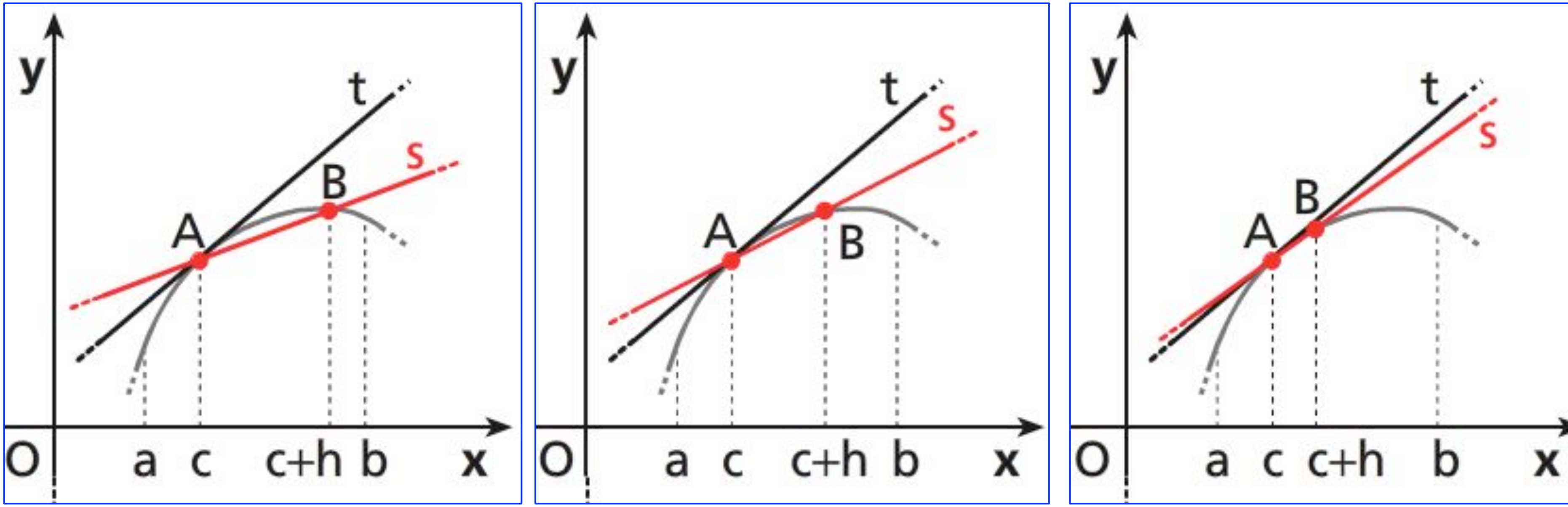
La derivata di una funzione



Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$. Del grafico della funzione consideriamo i punti $A(c; f(c))$ e $B(c+h; f(c+h))$, con c e $c+h$ appartenenti all'intervallo.

Tracciamo la retta AB, secante il grafico, per diversi valori di h. Disegniamo inoltre la retta t tangente al grafico in A.

Se h tende a 0, il punto B tende a coincidere con il punto A e la secante s con la tangente t in A.



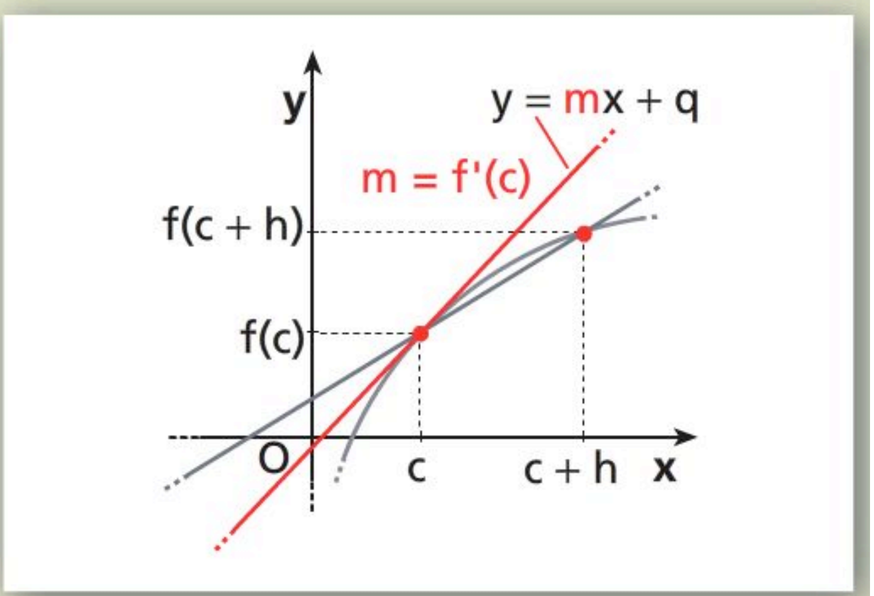
Attribuendo a h valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando $h \to 0$, il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente alla curva in A. Il coefficiente angolare della secante AB, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente, che viene chiamato *derivata* della funzione nel punto c.

DEFINIZIONE

Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo, e si indica con $f'(c)$, il limite, se esiste ed è *finito*, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$



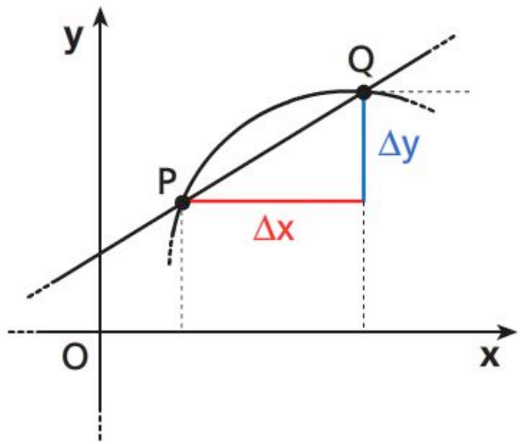
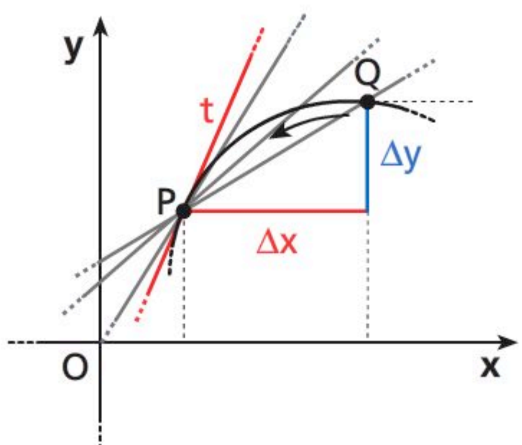
La **derivata** di una funzione in un punto c rappresenta il **coefficiente angolare** della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.

Una funzione si dice **derivabile** in un punto c se esiste la derivata $f'(c)$. Affinché una funzione sia derivabile in c occorre quindi che siano verificate le seguenti condizioni:

1. la funzione è definita in un intorno del punto c;
2. esiste il limite del rapporto incrementale, relativo a c, per h che tende a 0, cioè esistono il limite destro e il limite sinistro di tale rapporto e tali limiti coincidono;
3. questo limite è un numero finito.

Se il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale di una funzione in un punto *non esiste o è infinito*, si dice che la funzione **non è derivabile** in quel punto.

riassunto

Concetto	Figura	Definizione	Significato geometrico
Rapporto incrementale		$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **secante** al grafico della funzione nei punti *P* e *Q*
Derivata		$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **tangente** al grafico della funzione nel punto *P*

Il calcolo della derivata

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = x^2 - x$ in $c = 3$.

Chiamata f la funzione, applichiamo la definizione:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}.$$

Calcoliamo i valori che assume la funzione nei punti di ascissa 3 e $3 + h$:

$$f(3) = 6; \quad f(3+h) = (3+h)^2 - (3+h) = 6 + 5h + h^2.$$

Sostituendo nel rapporto incrementale i valori trovati e semplificando, abbiamo:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 5h + h^2 - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(5 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (5 + h) = 5.$$

Quindi $f'(3) = 5$.

● La derivata $f'(3)$ è un numero reale ed è il coefficiente angolare della tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(3; f(3))$.

Possiamo calcolare la derivata di una funzione anche in un punto generico. In questo caso il valore $f'(x)$ che otteniamo è funzione di x e, per questo, parliamo anche di **funzione derivata**.

La funzione derivata, al variare di x, fornisce il coefficiente angolare di tutte le rette tangenti alla funzione data.

La derivata di una funzione $y = f(x)$ in un punto generico x si indica con uno dei simboli seguenti:

$$f'(x); \quad \mathrm{D}\, f(x); \quad y'; \quad \frac{dy}{dx}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = 4x^2$ in un generico punto x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h(h+2x)}{h} = \lim_{h \to 0} 4(h+2x) = 8x.$$

La derivata

$$f'(x) = 8x$$

è una funzione di x.

La derivata sinistra e la derivata destra

Poiché la derivata è il limite del rapporto incrementale, in analogia a quanto abbiamo detto per i limiti, possiamo definire la *derivata sinistra* e la *derivata destra* di una funzione.

DEFINIZIONE

Derivata sinistra e derivata destra

La derivata sinistra di una funzione in un punto c è:

$$f'_{-}(c) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

La derivata destra di una funzione in un punto c è:

$$f'_{+}(c) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Una funzione è **derivabile** in un punto c se esistono *finite* e *uguali* tra loro la derivata sinistra e la derivata destra.

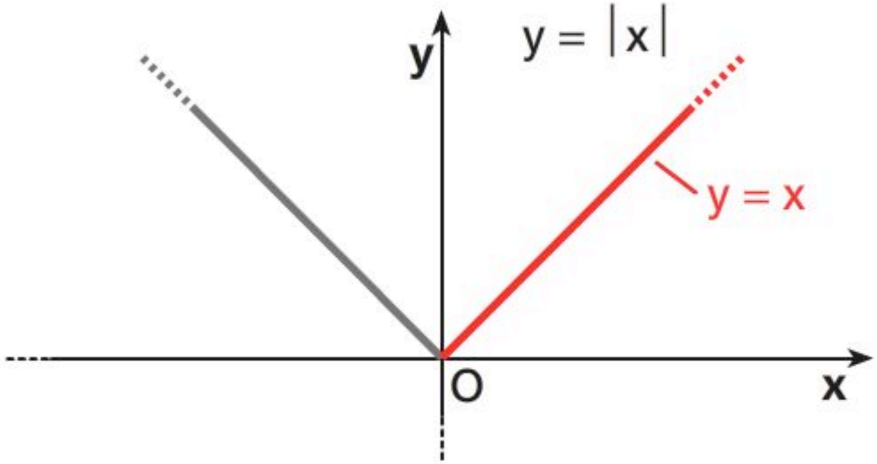
ESEMPIO

Consideriamo la funzione $f(x) = y = |x|$. Nel punto $x = 0$ abbiamo:

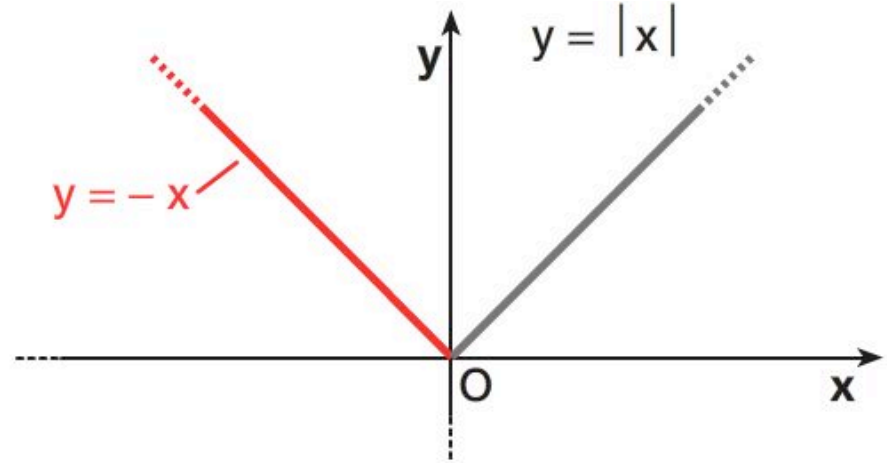
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1.$$

La derivata destra e quella sinistra esistono ma sono diverse, quindi nel punto $x = 0$ **non** esiste la derivata della funzione $y = |x|$.



a. Se consideriamo la funzione a destra di $x = 0$, il suo grafico coincide con la retta $y = x$. Anche la tangente coincide con la retta e il suo coefficiente angolare è 1, quindi $f'_+(0) = 1$.



b. Se consideriamo la funzione a sinistra di $x = 0$, il suo grafico (e quello della tangente) coincide con la retta $y = -x$. Il coefficiente angolare è -1, quindi $f'_-(0) = -1$.

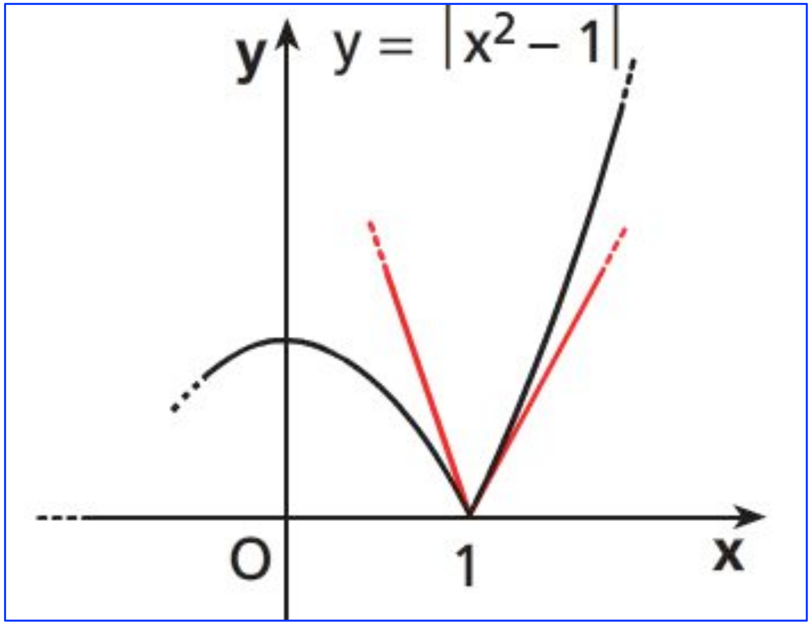
Se, per la stessa funzione, consideriamo il punto $x = 2$, troviamo che:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 2}{h} = 1.$$

Le derivate destra e sinistra coincidono e sono uguali alla derivata nel punto.

- Esaminiamo graficamente un altro esempio.



Nel punto $x = 1$, il grafico ha due tangenti diverse: la derivata sinistra e la derivata destra non coincidono.

La funzione non è derivabile nel punto x=1.

DEFINIZIONE

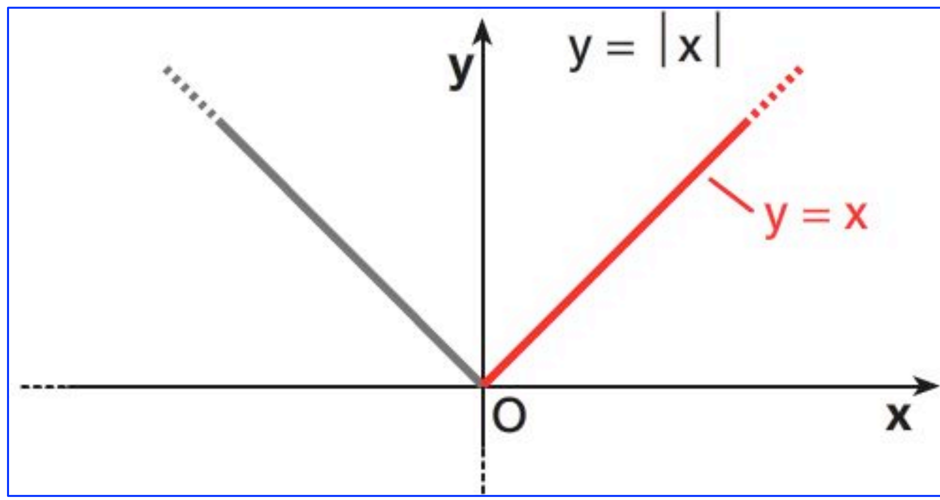
Funzione derivabile in un intervallo

Una funzione $y = f(x)$ è derivabile in un intervallo chiuso $[a; b]$ se è derivabile in tutti i punti interni di $[a; b]$ e se esistono e sono finite la derivata destra in a e la derivata sinistra in b.

ESEMPIO

La funzione $y = |x|$ è derivabile nell'intervallo $[0; 2]$. Infatti:

- si può dimostrare che è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo;
- nell'esempio precedente abbiamo visto che esistono la derivata destra in 0 e la derivata sinistra in 2.



ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \dfrac{-x^2+1}{2x}$ nel punto $c = -2$ e con un incremento h generico.

Per determinare il rapporto incrementale $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, calcoliamo prima $f(c+h)$ e $f(c)$, sostituendo a c il valore dato e lasciando indicato h:

$$f(c+h) = f(-2+h) = \frac{-(-2+h)^2+1}{2(-2+h)} = \frac{-4-h^2+4h+1}{2(-2+h)} = \frac{-h^2+4h-3}{2(-2+h)};$$

$$f(c) = f(-2) = \frac{-(-2)^2+1}{2(-2)} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{\dfrac{-h^2+4h-3}{2(-2+h)} - \dfrac{3}{4}}{h} = \frac{\dfrac{-2h^2+8h-6-3(-2+h)}{4(-2+h)}}{h} =$$

$$= \frac{-2h^2+5h}{4(-2+h)h} = \frac{-2h+5}{4(-2+h)}.$$

Il rapporto incrementale cercato è:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{-2h+5}{4(-2+h)}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$ nel punto $c = -2$, applicando la definizione di derivata.

Per la definizione di derivata sappiamo che:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Calcoliamo prima il rapporto incrementale nel punto $c = -2$:

$$f(-2+h) = \frac{(-2+h)^2 - 2}{-2+h+1} = \frac{h^2 - 4h + 2}{h - 1};$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 2}{-2+1} = -2;$$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{\dfrac{h^2 - 4h + 2}{h-1} + 2}{h} = \frac{\dfrac{h^2 - 4h + \cancel{2} + 2h - \cancel{2}}{h-1}}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h - 1} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h-2}{h-1}.$$

Calcoliamo poi il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h-2}{h-1} = 2.$$

Concludiamo che:

$$f'(-2) = 2.$$

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $f(x) = \sqrt{x+2}$, calcoliamo la sua derivata in un generico punto c.

Applicando la definizione di derivata, otteniamo:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{c+h+2} - \sqrt{c+2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{c+h+2} - \sqrt{c+2})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})}{(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{c} + h + \cancel{2} - \cancel{c} - \cancel{2}}{h(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})} = \frac{1}{2\sqrt{c+2}}$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata destra e la derivata sinistra della funzione $y = |x^2 - 4|$, in $x = 2$.

Poiché $x^2 - 4 \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$, la funzione può anche essere scritta nella forma

$$y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

dalla quale notiamo che a sinistra e a destra di 2 la funzione ha due espressioni analitiche diverse, che utilizziamo per il calcolo del rapporto incrementale.

A sinistra di 2, cioè per $h < 0$:

$$f(2+h) = -(2+h)^2 + 4 = -\cancel{4} - h^2 - 4h + \cancel{4} = -h^2 - 4h.$$

A destra di 2, cioè per $h > 0$:

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4 = h^2 + \cancel{4} + 4h - \cancel{4} = h^2 + 4h.$$

Inoltre:

$$f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0.$$

continua

Calcoliamo le due derivate, sostituendo nei rapporti incrementali i valori trovati:

$$f'_{-}(2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 4h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-h - 4) = -4;$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 4h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} (h + 4) = 4.$$

Abbiamo ottenuto:

$$f'_{-}(2) = -4, \qquad f'_{+}(2) = 4.$$

Essendo $f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2)$, nel punto $x = 2$ la funzione non è derivabile.

RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

➢ definizione

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

$$y = x^2 + 2x$$

nel suo punto $A(1; 3)$.

Ricordiamo che l'equazione del fascio di rette di centro $A(x_A; y_A)$ è:

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Consideriamo, nel nostro caso, il fascio di rette con centro in $(1; 3)$, cioè:

$$y - 3 = m(x - 1).$$

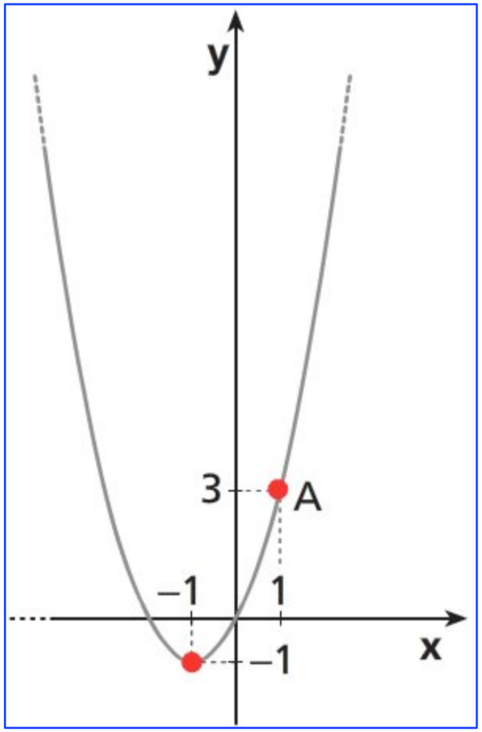


grafico della funzione

$y=x^2+2x$

Per individuare nel fascio la retta tangente, calcoliamo il suo coefficiente angolare m applicando la definizione di derivata. Chiamata f la funzione, poiché sappiamo che $m = f'(1)$, calcoliamo il valore di $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Calcoliamo $f(1+h)$ e $f(1)$:

$$f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) = h^2 + 4h + 3,$$

$$f(1) = 3.$$

Sostituiamo nel rapporto incrementale:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h} =$$

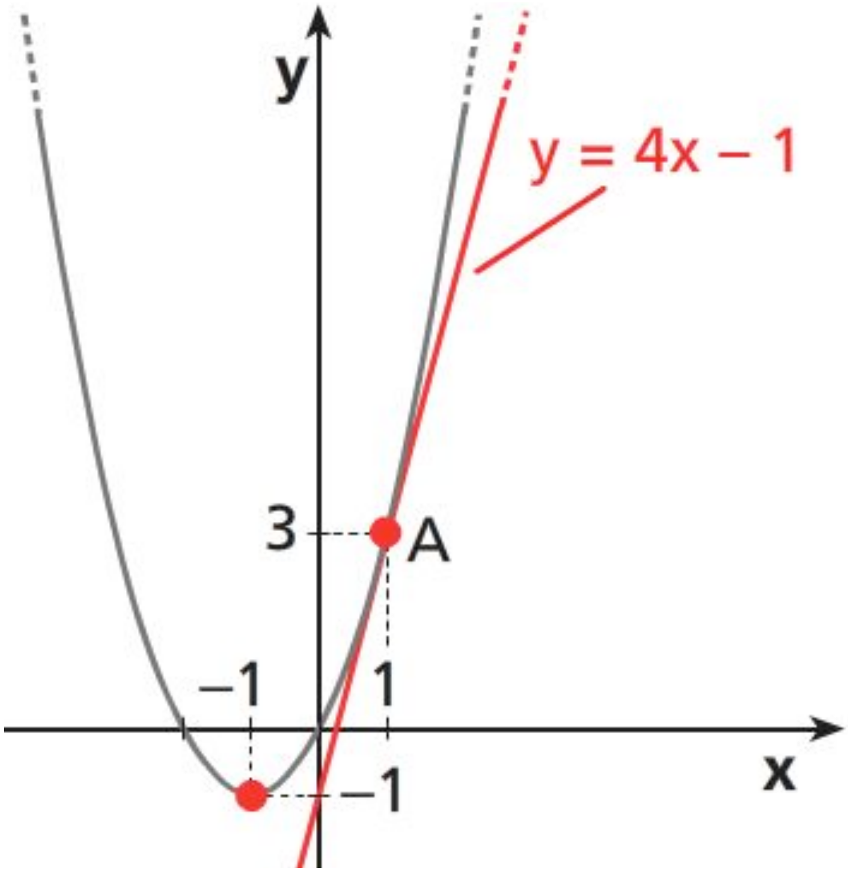
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+4) = 4.$$

Pertanto l'equazione della retta tangente è:

$$y - 3 = 4(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 4x - 1.$$

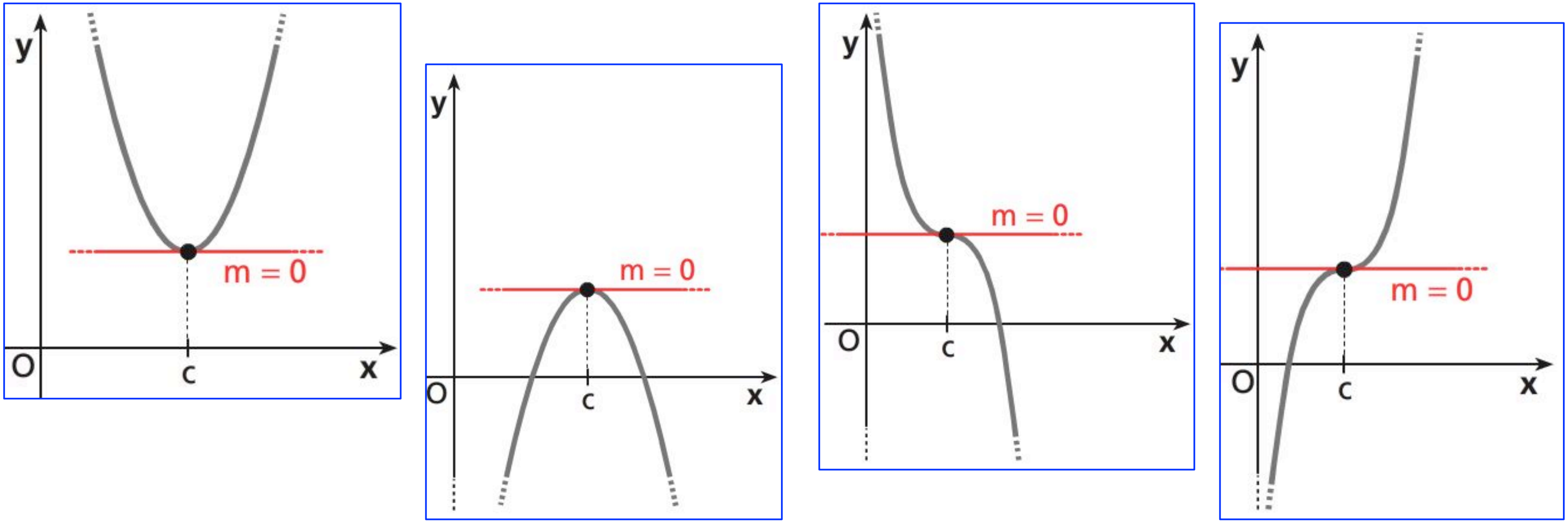
In generale, data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0; y_0)$, se tale retta esiste e non è parallela all'asse y, è:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$



Il coefficiente angolare 4 è il valore della derivata della funzione $y=x^2+2x$ calcolata nel suo punto di ascissa 1.

I punti stazionari



Nella figura 7 vediamo alcuni casi in cui la retta tangente al grafico della funzione in un suo punto c è parallela all'asse x. Ciò capita quando l'equazione della tangente è del tipo $y = k$, ossia il suo coefficiente angolare è 0. Ciò significa che, in quel punto, la derivata è uguale a 0.

DEFINIZIONE

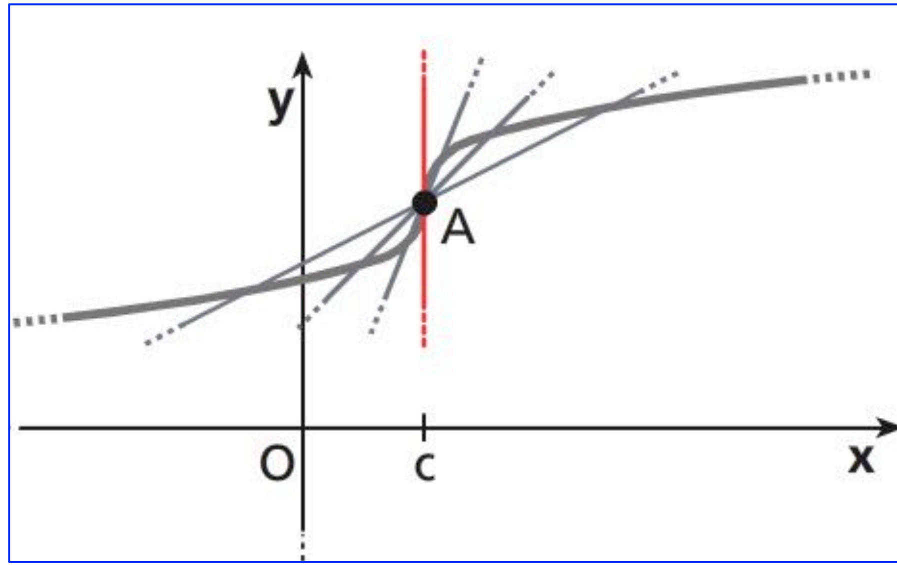
Punto stazionario

Dati la funzione $y = f(x)$ e un suo punto $x = c$, se $f'(c) = 0$, allora $x = c$ si dice punto stazionario o punto a tangente orizzontale.

Punti di non derivabilità

I flessi a tangente verticale

Osserviamo il grafico della figura

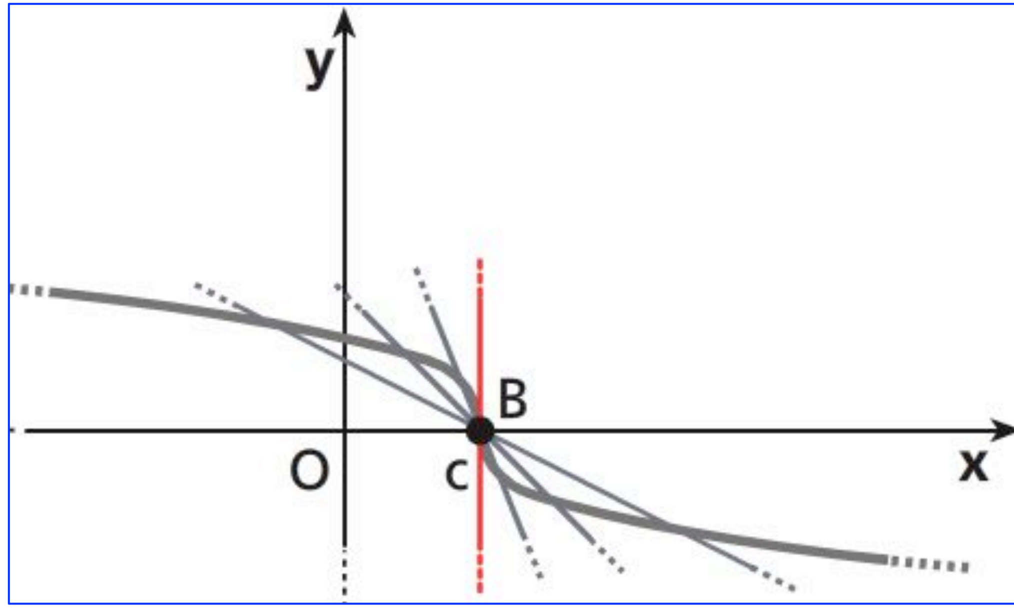


a. Nel punto di ascissa c la tangente al grafico esiste ed è una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$.
In questo caso $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$.

Le rette secanti passanti per A tendono alla retta parallela all'asse y, man mano che gli ulteriori punti di intersezione si avvicinano ad A. Il coefficiente angolare delle secanti, ossia il rapporto incrementale della funzione, per $x \to c$ sia da destra sia da sinistra, tende a $+\infty$. Poiché, per la definizione di derivata, il limite del rapporto incrementale $f'(c)$ dovrebbe essere un valore finito, la funzione non è derivabile in $x = c$. Per esprimere questo concetto possiamo anche scrivere:

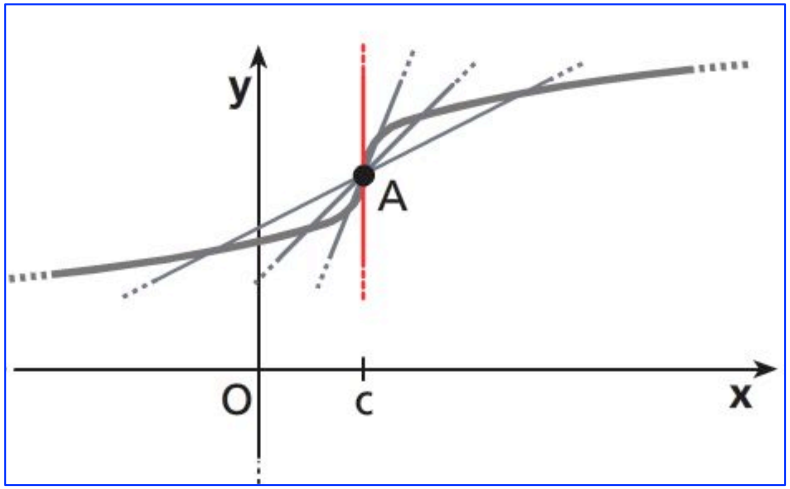
$$f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty.$$

Analogamente si ragiona con la funzione della figura

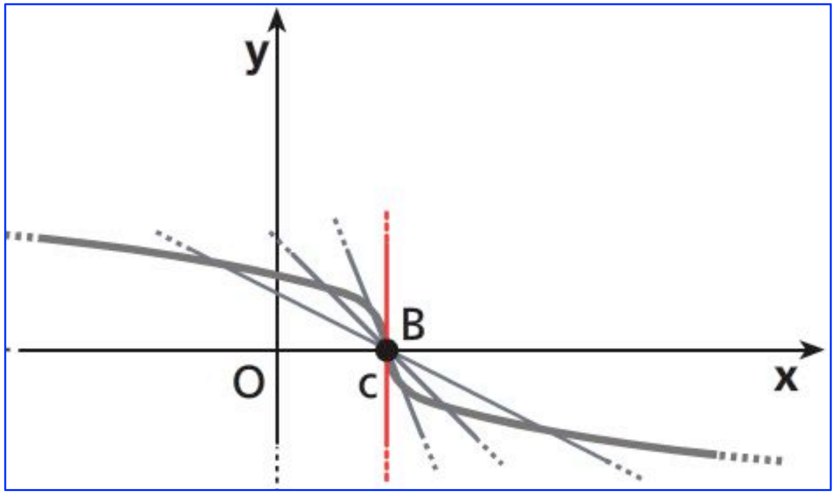


b. Nel punto di ascissa c la tangente al grafico è ancora una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$, ma in questo caso $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$.

Entrambe le funzioni hanno la proprietà che nel punto considerato sono continue e il limite del rapporto incrementale, pur non essendo finito, ha *la stessa tendenza sia da destra sia da sinistra* (o sempre a $+\infty$ o sempre a $-\infty$).



$$f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$$

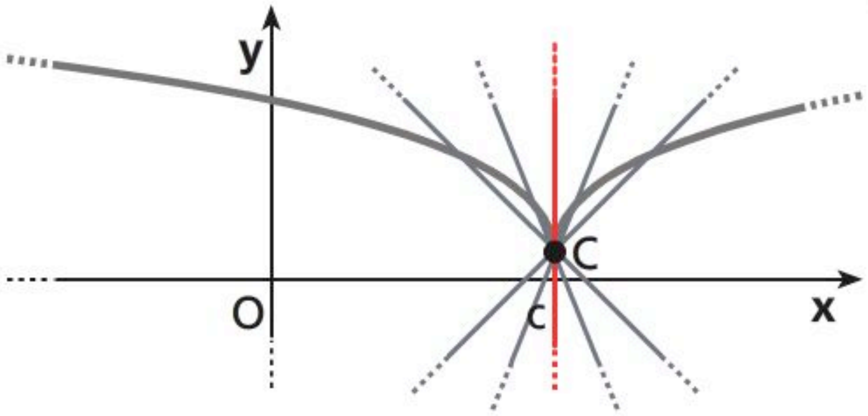


$$f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$$

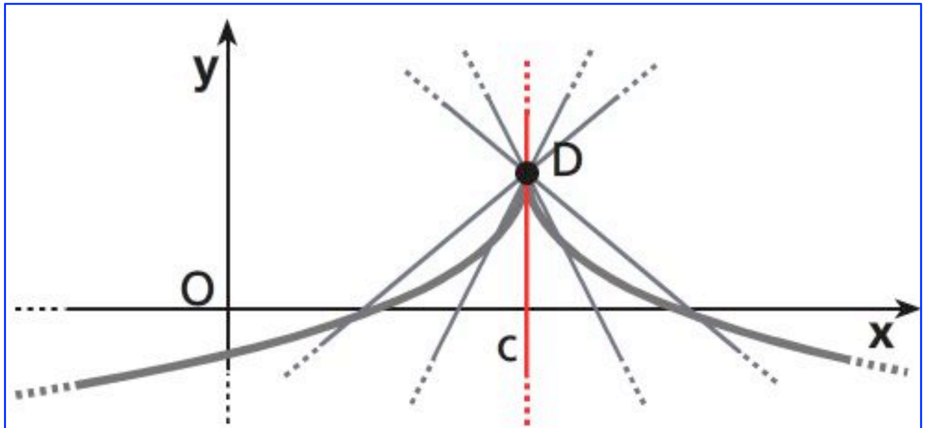
I punti A e B dei grafici si chiamano punti di **flesso a tangente parallela all'asse y** o a **tangente verticale**.

Le cuspidi

Osserviamo ora i grafici della figura



a. Nel punto di ascissa c la tangente al grafico della funzione è ancora una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$, ma $f'_-(c) = -\infty$, mentre $f'_+(c) = +\infty$, quindi $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.



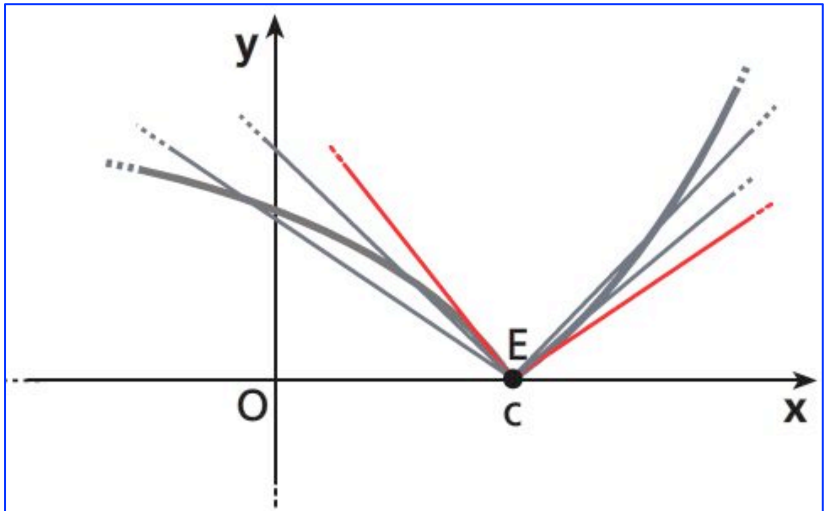
b. In questo caso $f'_-(c) = +\infty$, mentre $f'_+(c) = -\infty$; quindi abbiamo ancora: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

I punti C e D dei grafici si chiamano **cuspidi**

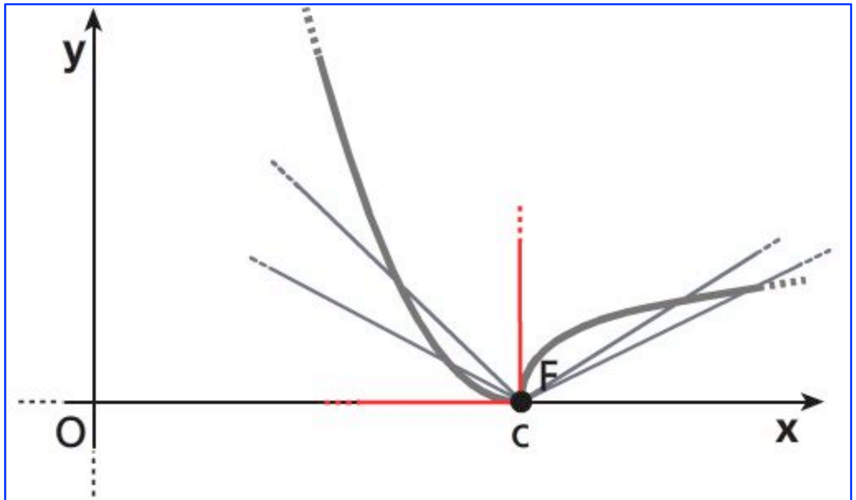
C è una cuspide rivolta verso il basso e D è una cuspide rivolta verso l'alto.

I punti angolosi

Consideriamo i grafici della figura



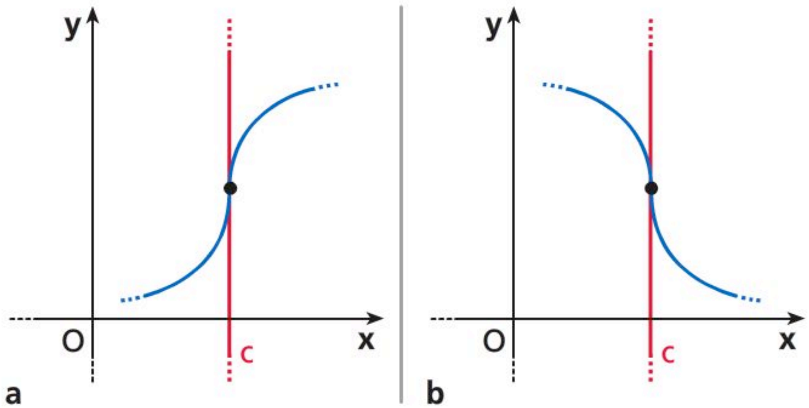
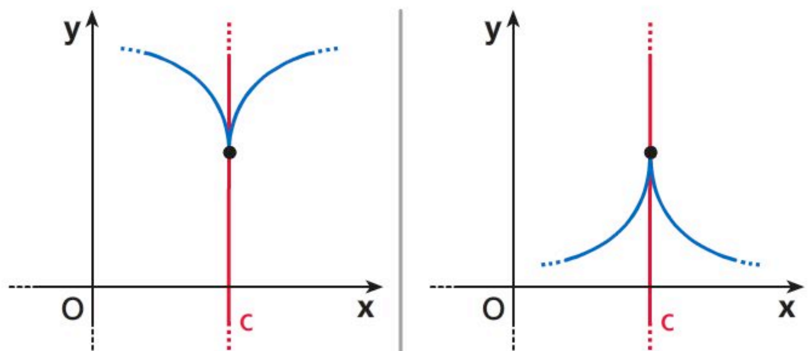
a. La derivata sinistra e la derivata destra nel punto *c* sono finite ma diverse fra loro: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

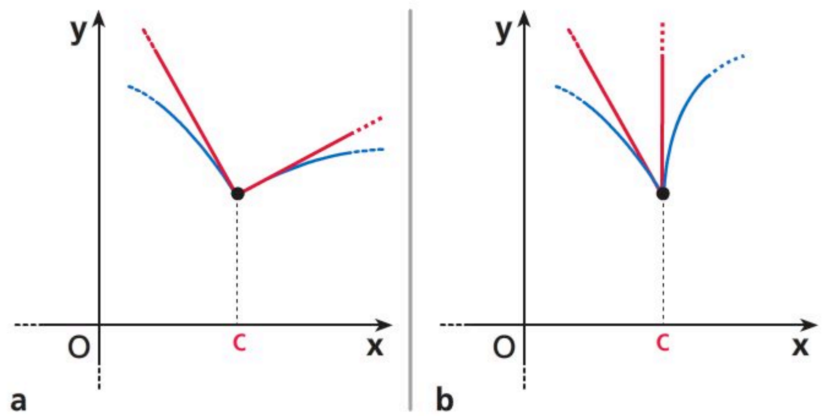


b. Nel punto *c* la derivata sinistra è finita (uguale a 0), mentre $f'_+(c) = +\infty$.

I punti E e F dei grafici si chiamano **punti angolosi**

riassunto

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale		a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	 a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$

Punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ **a)** entrambe finite **b)** una finita, l'altra infinita

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = x^3 + x$, nel suo punto P di ascissa 1.

Determiniamo l'ordinata di P sostituendo $x = 1$ nell'espressione della funzione

$$y_P = 2,$$

quindi $P(1; 2)$.
La retta generica (non parallela all'asse y) che passa per P ha equazione:

$$y - y_P = m(x - x_P) \quad \rightarrow \quad y - 2 = m(x - 1).$$

Troviamo il coefficiente angolare $m = f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

$$f(1+h) = (1+h)^3 + (1+h) = 1 + h^3 + 3h + 3h^2 + 1 + h = 2 + h^3 + 4h + 3h^2;$$

$$f(1) = 2;$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + h^3 + 4h + 3h^2 - \cancel{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h^2 + 4 + 3h)}{\cancel{h}} = 4.$$

Sostituendo nell'equazione precedente, otteniamo l'equazione della retta tangente:

$$y - 2 = 4(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 2 + 4x - 4 \quad \rightarrow \quad y = 4x - 2.$$

CONTINUITA’ E DERIVABILITA’

ESEMPIO

Ci sono dei punti in cui una funzione è continua ma non è derivabile.

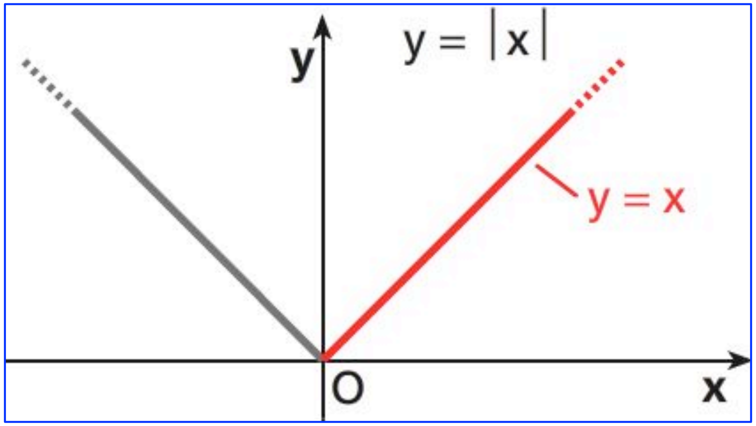
La funzione $y = |x|$ è continua in $x = 0$, perché

$$\lim_{x \to 0} |x| = f(0) = |0| = 0;$$

tuttavia essa non è derivabile in $x = 0$. Abbiamo già visto infatti che:

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0).$$

Nel punto di ascissa $x = 0$ la derivata sinistra è diversa dalla derivata destra.

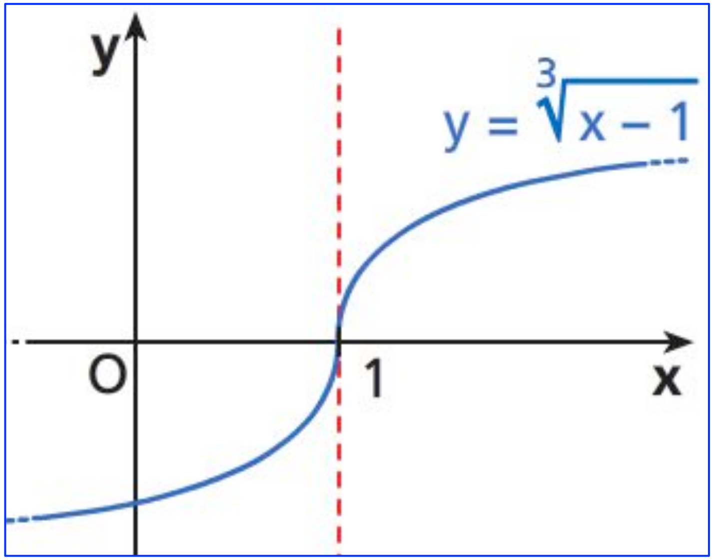


La funzione $y = \sqrt[3]{x-1}$ è continua in $x = 1$, ma non è derivabile in questo punto perché il limite del rapporto incrementale non è finito, infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cancel{1}+h-\cancel{1}} - \sqrt[3]{1-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$



Ci sono anche punti in cui una funzione è derivabile ma non è continua? Il teorema seguente lo esclude.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, in quel punto la funzione è anche continua.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Ipotesi (Hp)} & & \textit{Tesi (Th)} \\ f(x) \text{ derivabile in } x_0 & \Rightarrow & f(x) \text{ continua in } x_0 \end{array}$$

Il teorema afferma che la derivabilità di una funzione implica la continuità, e poiché il viceversa non è vero si può allora concludere che la **continuità è una condizione necessaria, ma non è sufficiente per la derivabilità.**

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo la relazione

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h,$$

che, svolti i calcoli, risulta essere un'identità.

Calcoliamo il limite per $h \to 0$ di entrambi i membri, ricordando che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \underbrace{\lim_{h \to 0} f(x_0)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h}.$$

Nel secondo membro, poiché il limite di una costante è la costante stessa, abbiamo:

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} f(x_0) = f(x_0).}$$

Inoltre, essendo il limite di un prodotto uguale al prodotto dei limiti e ricordando l'ipotesi:

$$\underline{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h} = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

Quindi, sostituendo nel secondo membro, il limite iniziale diventa:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0$$

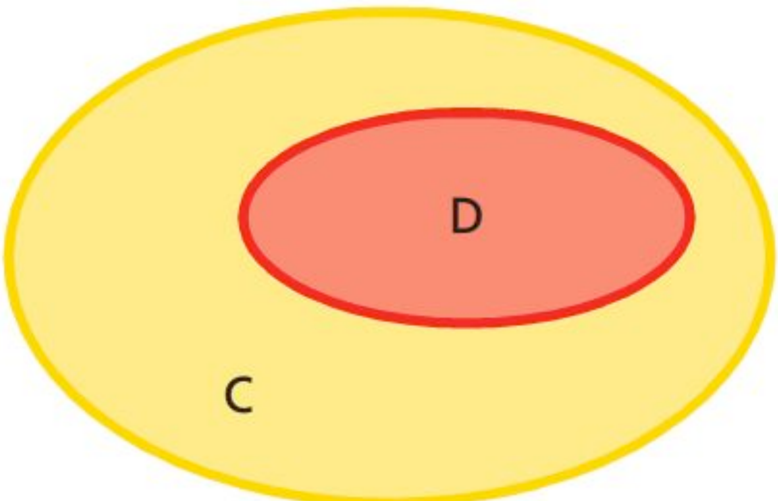
$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Posto $x_0 + h = x$, se $h \to 0$, si ha che $x \to x_0$. Sostituendo nella relazione precedente, concludiamo che la funzione $f(x)$ è continua in x_0, in quanto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nella dimostrazione del teorema abbiamo visto che la scrittura $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ è equivalente a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Possiamo quindi assumerla come definizione di funzione continua: una funzione è **continua** se $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Per quanto abbiamo detto, possiamo affermare che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme proprio di quello delle funzioni continue.



C = insieme delle funzioni continue
D = insieme delle funzioni derivabili

Esistono funzioni continue ma non derivabili, mentre le funzioni derivabili son o sempre continue

$\boxed{D \subset C}$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

nel punto $x = 0$.

- Per studiare la continuità calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1, \ \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} - 1) = -1, \ f(0) = -1.$$

La funzione è quindi continua in $x = 0$.

- Studiamo la derivabilità.
Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 0$.

Si ha:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{[(0+h)^2 - 1] - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 1 + 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0.$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{[\sqrt{0+h} - 1] - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

La derivata sinistra è diversa dalla derivata destra, quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$. Poiché una derivata è finita e l'altra è infinita, il punto di non derivabilità è un punto angoloso.

DERIVATE FONDAMENTALI

➢ Derivate fondamentali

Determiniamo ora le formule di derivazione delle funzioni più usate.

● Queste formule permettono di calcolare le derivate delle funzioni senza dover applicare la definizione.

TEOREMA

La derivata di una funzione costante è 0:

$$\mathbf{D}\,k = \mathbf{0}.$$

DIMOSTRAZIONE

Ricordando che, se $f(x) = k$ anche $f(x+h) = k$, calcoliamo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = x$ è

$$\mathbf{D}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}.$$

DIMOSTRAZIONE

Se $f(x) = x$, risulta che $f(x+h) = x+h$. Calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è

$$\mathbf{D}\, \boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{n x^{n-1}}.$$

ESEMPIO

1. La derivata di $y = x^2$ è $y' = 2x$.
2. La derivata di $y = x^7$ è $y' = 7x^6$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Ricordiamo lo sviluppo della potenza di un binomio:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right] - x^n}{h} =$$

Semplifichiamo x^n e raccogliamo h:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}.$$

Calcoliamo il limite per $h \to 0$ e otteniamo:

$$\mathrm{D}\, x^n = nx^{n-1}.$$

Si può estendere la regola al caso di esponente α reale.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, è

$$\mathbf{D}\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

ESEMPIO

1. La funzione $y = \sqrt[4]{x^3}$ si può scrivere $y = x^{\frac{3}{4}}$, quindi la sua derivata è:

$$y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4} - 1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}, \text{ con } x > 0.$$

2. La funzione $y = \dfrac{1}{x^4}$ si può scrivere $y = x^{-4}$, quindi la sua derivata è:

$$y' = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}, \text{ con } x \neq 0.$$

3. La funzione $y = \sqrt[3]{x^5}$ si può scrivere $y = x^{\frac{5}{3}}$, quindi la sua derivata è:

$$y' = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3} - 1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, con x espresso in radianti, è

D sen x = cos x.

Applichiamo la formula di addizione:

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right]$$

e, ricordando i limiti notevoli,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0,$$

si ha:

$$f'(x) = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

In modo del tutto analogo si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = \cos x$, con x espresso in radianti, è

$$\mathbf{D} \cos x = - \operatorname{sen} x.$$

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = a^x$ è

$$\mathbf{D}\, a^x = a^x \ln a. \qquad \mathbf{D}\, e^x = e^x$$

DIMOSTRAZIONE

Applicando la definizione di derivata alla funzione $f(x) = a^x$, otteniamo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

Ricordiamo che vale il limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = \log_a x$ è

$$\mathbf{D}\,\log_a x = \frac{1}{x}\cdot\log_a e. \qquad \boxed{\mathbf{D}\,\ln x = \frac{1}{x}}$$

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

Utilizziamo la proprietà dei logaritmi $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ e scriviamo:

$$\log_a(x+h)-\log_a x = \log_a\frac{x+h}{x} = \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il denominatore h per x, cioè scriviamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \log_a e \cdot \frac{1}{x},$$

Ricordiamo il limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

e quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

TEOREMI SUL CALCOLO DELLE DERIVATE

La derivata del prodotto di una costante per una funzione

TEOREMA

La derivata del prodotto di una costante k per una funzione derivabile $f(x)$ è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:

$$\mathbf{D}\,[\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f(x)}] = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f'(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}.$$

Essendo k una costante e ricordando la definizione di derivata, si può scrivere:

$$y' = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni.

1. $y = -3 \cdot \ln x$; $\qquad y' = -3 \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{x}$.

2. $y = \dfrac{2}{3} \cdot \cos x$; $\qquad y' = \dfrac{2}{3} \cdot (-\operatorname{sen} x) = -\dfrac{2}{3} \operatorname{sen} x$.

La derivata della somma di funzioni

TEOREMA

La derivata della somma algebrica di due o più funzioni derivabili è uguale alla somma algebrica delle derivate delle singole funzioni:

$$\mathbf{D}\,[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

DIMOSTRAZIONE

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale di $f(x) + g(x)$:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}.$$

Ricordando che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti e l'ipotesi di derivabilità delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, possiamo scrivere:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni.

1. $y = x + 2 \cdot \operatorname{sen} x;$ $\qquad y' = 1 + 2 \cdot \cos x.$
2. $y = 2 \cdot e^x - 3 \cdot \cos x + 1;$ $\qquad y' = 2 \cdot e^x + 3 \cdot \operatorname{sen} x.$

La derivata del prodotto di funzioni

TEOREMA

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è uguale alla somma della derivata della prima funzione moltiplicata per la seconda non derivata e della derivata della seconda funzione moltiplicata per la prima non derivata:

$$\mathbf{D}\,[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

DIMOSTRAZIONE

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}.$$

Al primo termine del numeratore sottraiamo e sommiamo il prodotto $g(x+h)\cdot f(x)$:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - g(x+h)\cdot f(x) + g(x+h)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}.$$

Raccogliamo $g(x+h)$ fra i primi due termini e $f(x)$ tra gli ultimi due:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot [f(x+h) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}.$$

Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, per cui:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right].$$

Il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti:

$$y' = \lim_{h \to 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Poiché per ipotesi $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, e quindi anche continue, abbiamo:

$$y' = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = x \cdot \operatorname{sen} x$:

$$y' = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x.$$

Estendendo il teorema al prodotto di più funzioni, si può dimostrare che, per esempio, data la funzione $y = f(x) \cdot g(x) \cdot z(x)$, la sua derivata prima è:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot z'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$.

Applichiamo la regola di derivazione del prodotto,

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{D}(x) \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \mathrm{D}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \mathrm{D}(\cos x) = \\ &= 1 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \cos x \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \cos^2 x - x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x), \end{aligned}$$

quindi:

$$y' = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \cos 2x.$$

La derivata del reciproco di una funzione

TEOREMA

La derivata del reciproco di una funzione derivabile non nulla è uguale a una frazione in cui:

- il numeratore è l'opposto della derivata della funzione;
- il denominatore è il quadrato della funzione.

$$\mathbf{D}\,\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \qquad \text{con } f(x) \neq 0.$$

DIMOSTRAZIONE

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{f(x+h)} - \dfrac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[-\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)f(x+h)}\right] =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(x)f(x+h)}.$$

Essendo $f(x)$ derivabile (e quindi anche continua), si ha:

$$y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

ESEMPIO

1. Deriviamo la funzione $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$: $\quad y' = -\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

2. La derivata di $y = \dfrac{5}{x^3 - 2}$ è: $\quad y' = 5 \cdot \dfrac{(-3x^2)}{(x^3-2)^2} = -\dfrac{15x^2}{(x^3-2)^2}$.

La derivata del quoziente di due funzioni

TEOREMA

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili (con funzione divisore non nulla) è uguale a una frazione che ha:

- per numeratore la differenza fra la derivata del dividendo moltiplicata per il divisore non derivato e il dividendo non derivato moltiplicato per la derivata del divisore;
- per denominatore il quadrato del divisore.

$$D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \qquad \text{con } g(x) \neq 0.$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione quoziente come prodotto di due funzioni:

$$y = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

Applichiamo la regola della derivata di un prodotto:

$$\mathrm{D}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{D}\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \mathrm{D}\ \frac{1}{g(x)}.$$

Applichiamo la regola della derivata del reciproco di una funzione:

$$\mathrm{D}\ \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

Riduciamo allo stesso denominatore e concludiamo:

$$\mathrm{D}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x}$:

$$y' = \frac{3 \cdot 2x \cdot (x^2 + x) - (2x + 1) \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2 + x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6x^3} + 6x^2 - \cancel{6x^3} + 2x - 3x^2 + 1}{(x^2 + x)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2}.$$

Dal teorema precedente, come casi particolari, si ricavano le derivate della funzione tangente e della funzione cotangente.

La derivata della funzione tangente

Si può scrivere $y = \operatorname{tg} x$ come $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e, applicando la formula di derivazione di un quoziente, si ha:

Sappiamo che:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Tale risultato può anche essere scritto nei due seguenti modi:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{oppure} \quad y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Quindi:

$$\mathbf{D\,tg}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{x}} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{D\,tg}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \mathbf{tg^2}\,\boldsymbol{x}.$$

La derivata della funzione cotangente

Analogamente, poiché si può scrivere $y = \cot g\, x$ come $y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, si può ricavare che:

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{oppure} \quad y' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

Quindi:

$$\mathbf{D\,cotg\,}x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{D\,cotg\,}x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata delle seguenti funzioni:

a) $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x$; **b)** $y = \dfrac{3x^4 + 2}{x^2}$; **c)** $y = 2\ln\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

a) La funzione $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x$ è la somma di tre funzioni che a loro volta sono il prodotto di una costante per una potenza di x. Utilizziamo quindi le corrispondenti regole di derivazione:

$$y = k \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = k \cdot f'(x),$$

$$y = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x),$$

$$y = x^a \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot x^{a-1}.$$

Otteniamo:

$$y' = 3 \cdot 5x^{5-1} - 2 \cdot 4x^{4-1} + 4 = 15x^4 - 8x^3 + 4.$$

c) La funzione può essere scritta come segue:

$$y = 2\ln x^{-1} - x^{-\frac{1}{3}} = -2\ln x - x^{-\frac{1}{3}}.$$

Deriviamo e otteniamo:

$$y' = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

b) Dividiamo il numeratore per il denominatore (essendo il dominio: $x \neq 0$),

$$y = \frac{3x^4 + 2}{x^2} = 3x^2 + \frac{2}{x^2},$$

e utilizziamo le potenze con esponente negativo. Otteniamo:

$$y = 3x^2 + 2x^{-2}.$$

Applichiamo la formula di derivazione della potenza di x:

$$y' = 3 \cdot 2x + 2(-2)x^{-3},$$

$$y' = 6x - \frac{4}{x^3} = \frac{6x^4 - 4}{x^3}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata della seguente funzione:

$$y = 2x \cdot e^x \cdot \cos x.$$

Poniamo $f(x) = 2x$, $g(x) = e^x$, $z(x) = \cos x$ e utilizziamo la regola di derivazione relativa al prodotto di più funzioni, ricordando che la derivata di x è 1, la derivata di e^x è e^x e la derivata di $\cos x$ è $-\text{sen}\, x$. Otteniamo:

$$y' = \underbrace{2 \cdot (1)}_{f'(x)} \cdot e^x \cdot \cos x + 2x \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} \cdot \cos x + 2x \cdot e^x \cdot \underbrace{(-\,\text{sen}\, x)}_{z'(x)} = 2e^x \cdot (\cos x + x \cdot \cos x - x \cdot \text{sen}\, x).$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y = \frac{3x - 2}{x^2 - 4}.$$

Se poniamo $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2 - 4$, le loro derivate sono: $f'(x) = 3$ e $g'(x) = 2x$.

Utilizzando la regola di derivazione relativa al quoziente di due funzioni, si ha:

$$y' = \frac{3 \cdot (x^2 - 4) - (3x - 2) \cdot (2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^2 - 12 - 6x^2 + 4x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 12}{(x^2 - 4)^2}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y = \frac{3x - 2}{x^2 - 4}.$$

Se poniamo $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2 - 4$, le loro derivate sono: $f'(x) = 3$ e $g'(x) = 2x$

Utilizzando la regola di derivazione relativa al quoziente di due funzioni, si ha:

$$y' = \frac{3 \cdot (x^2 - 4) - (3x - 2) \cdot (2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^2 - 12 - 6x^2 + 4x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 12}{(x^2 - 4)^2}.$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

➢ Richiami sulla funzione composta

Richiamiamo il concetto di funzione composta, spiegando quali simboli utilizzeremo per il calcolo della sua derivata.

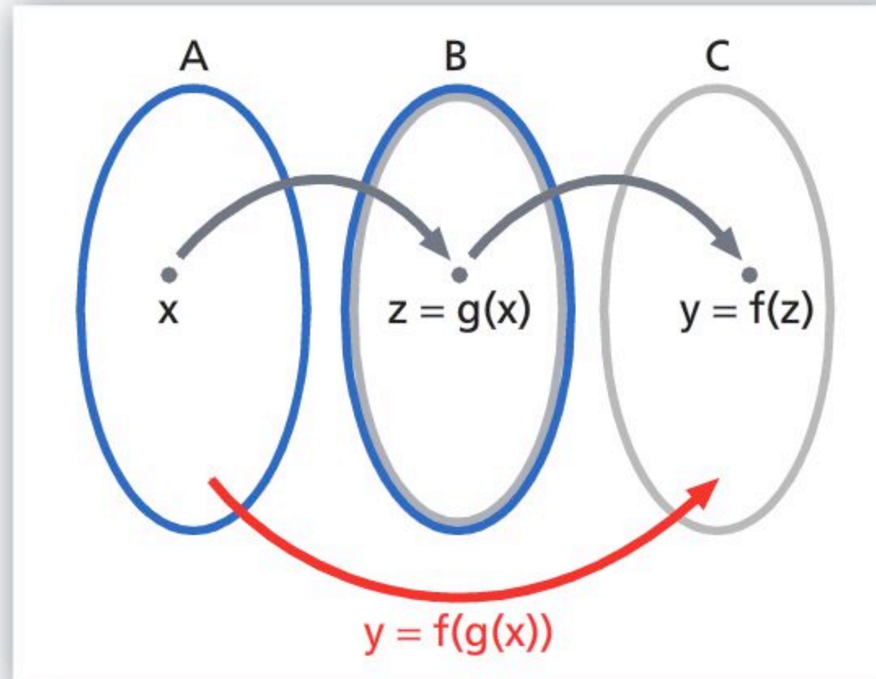
Consideriamo per esempio la funzione:

$$y = \ln(x^2 + 2).$$

Essa rappresenta il logaritmo del polinomio $x^2 + 2$, che a sua volta è una funzione di x.

Se poniamo $z = x^2 + 2$, otteniamo $y = \ln z$. In questo modo mettiamo in evidenza che l'argomento della funzione logaritmo non è la variabile indipendente x, ma è a sua volta un'altra funzione, cioè $z(x) = x^2 + 2$.

Più in generale, sia $z = g(x)$ una funzione della variabile x, dal dominio A al codominio B, e sia $y = f(z)$ una funzione della variabile z, dal dominio B al codominio C.



La funzione $y = f(g(x))$ è una funzione composta (o funzione di funzione) perché y è funzione di z, che a sua volta è funzione di x.

Le due funzioni $z = g(x)$ e $y = f(z)$ sono dette *componenti* della funzione composta.

Vale il seguente teorema.

➢ Derivata di una funzione composta

TEOREMA

Se la funzione g è derivabile nel punto x e la funzione f è derivabile nel punto $z = g(x)$, allora la funzione composta $y = f(g(x))$ è derivabile in x e la sua derivata è il prodotto delle derivate di f rispetto a z e di g rispetto a x:

$$\mathbf{D}\,[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x), \quad \text{con } z = g(x).$$

DIMOSTRAZIONE

$$\mathrm{D}[f(g(x))] = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Poiché $z = g(x)$, allora

$$g(x+h) - g(x) = \Delta z,$$

da cui:

$$g(x+h) = g(x) + \Delta z = z + \Delta z.$$

Sostituendo nel limite si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{h}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per Δz:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{h}.$$

Poiché la funzione $z = g(x)$ è derivabile per ipotesi e quindi continua, si ha:

$$\lim_{h \to 0} \Delta z = \lim_{h \to 0} [g(x + h) - g(x)] = 0.$$

Calcoliamo allora:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f'(z) \cdot g'(x).$$

Concludiamo che:

$$\mathrm{D}[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione composta

$$y = (2x^3 - 3x^2 + x - 1)^4,$$

in cui consideriamo:

$$z = g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1 \text{ e } y = f(z) = z^4.$$

Per la formula di derivazione della funzione composta, otteniamo:

$$y' = 4z^3 \cdot z', \quad \text{dove} \quad z' = 6x^2 - 6x + 1.$$

Sostituendo:

$$y' = 4 \cdot (2x^3 - 3x^2 + x - 1)^3 \cdot (6x^2 - 6x + 1).$$

Si può anche calcolare la derivata di una funzione composta direttamente, senza effettuare sostituzioni.

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione dell'esempio iniziale,

$$y = \ln(x^2 + 2),$$

senza utilizzare le sostituzioni:

$$y' = \underbrace{\left(\frac{1}{x^2+2}\right)}_{\text{derivata della funzione logaritmica}} \cdot (2x) \leftarrow \text{derivata della funzione della variabile } x\text{, argomento del logaritmo}$$

Il teorema precedente può essere esteso alla derivata di una funzione y dipendente dalla variabile x attraverso un numero qualunque di funzioni componenti.

Per esempio, nel caso di tre funzioni, essendo

$$y = f(g(z(x))),$$

posto

$$t = z(x), \quad u = g(t), \quad y = f(u),$$

la formula relativa alla derivata della funzione composta si può scrivere:

$$\mathbf{D}\, f(g(z(x))) = f'(u) \cdot g'(t) \cdot z'(x).$$

➢ Derivata di $[f(x)]^{g(x)}$

Utilizzando le formule relative alla derivata di una funzione composta e alla derivata di un prodotto, possiamo studiare un metodo per calcolare la derivata della funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$, in cui $f(x) > 0$ e $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili.

Data la funzione

$$y = [f(x)]^{g(x)},$$

essendo $f(x) > 0$, è anche $f(x)^{g(x)} > 0$, quindi possiamo calcolare i logaritmi dei due membri:

$$\ln y = \ln [f(x)]^{g(x)}.$$

Applicando la proprietà relativa al logaritmo di una potenza, abbiamo:

$$\ln y = g(x) \cdot \ln [f(x)].$$

● $\log_a b^c = c \log_a b$, con $b > 0$.

Se ora applichiamo ai due membri dell'uguaglianza i teoremi per la derivazione delle funzioni composte e del prodotto di due funzioni, otteniamo

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

da cui, essendo y diverso da 0:

$$y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right].$$

La y è una funzione composta, perciò:

$$D[\ln y] = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Poiché $y = [f(x)]^{g(x)}$, possiamo scrivere:

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right].$$

Concludendo possiamo evidenziare la seguente formula per la derivazione della funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$:

$$\boldsymbol{D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right].}$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y = (x + 2)^{x-1}.$$

Poiché la formula vista in precedenza è difficile da ricordare, procediamo ripetendo i passaggi.

Applichiamo il logaritmo a entrambi i membri:

$$\ln y = \ln (x + 2)^{x-1}$$

$$\ln y = (x - 1) \cdot \ln (x + 2).$$

Calcoliamo le derivate di entrambi i membri:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln (x + 2) + (x - 1) \cdot \frac{1}{(x + 2)} \cdot 1$$

$$y' = y \cdot \left[\ln (x + 2) + \frac{x - 1}{x + 2} \right]$$

$$y' = (x + 2)^{x-1} \cdot \left[\ln (x + 2) + \frac{x - 1}{x + 2} \right].$$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata delle seguenti funzioni composte:

a) $y = \ln \operatorname{sen}(x^4 - 2)$; **b)** $y = \cos^8 2x$; **c)** $y = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$.

a) La funzione presenta tre funzioni componenti che sono:

$$f(x) = \ln g(x), \quad g(x) = \operatorname{sen} z(x), \quad \text{e} \quad z(x) = x^4 - 2.$$

Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene:

$$y = \ln \ \operatorname{sen}(x^4 - 2)$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}(x^4 - 2)}}_{\text{derivata del logaritmo}} \cdot \underbrace{\cos(x^4 - 2)}_{\text{derivata del seno}} \cdot \underbrace{4x^3}_{\text{derivata del polinomio}}.$$

b) La funzione presenta tre funzioni componenti:

$$f(x) = (g(x))^8, \qquad g(x) = \cos z(x), \qquad z(x) = 2x.$$

Applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$y = (\cos 2x)^8$$

$$y' = 8(\cos 2x)^7 \cdot (-\operatorname{sen} 2x) \cdot (2).$$

derivata della potenza | derivata del coseno | derivata di $2x$

Si ha quindi:

$$y' = -16 \operatorname{sen} 2x \cos^7 2x.$$

c) La funzione presenta due funzioni componenti:

$$f(x) = \sqrt{g(x)}, \quad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Deriviamo:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^2}.$$

derivata della radice

derivata del quoziente

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a) $y = x^x$; **b)** $y = (\operatorname{sen} x)^{\sqrt{2}}$.

a) Il dominio della funzione è $x > 0$, quindi è anche $x^x > 0$. Possiamo allora calcolare i logaritmi dei due membri,

$$\ln y = \ln x^x,$$

da cui, ricordando la proprietà $\log_a b^c = c \log_a b$, abbiamo:

$$\ln y = x \cdot \ln x.$$

Deriviamo entrambi i membri, osservando che al primo membro abbiamo y funzione composta, mentre al secondo membro abbiamo un prodotto di due funzioni:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Isoliamo y':

$$y' = y \cdot (\ln x + 1).$$

Ricordando che $y = x^x$, otteniamo:

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

b) Poiché l'esponente $g(x)$ è una costante reale, posto $\operatorname{sen} x > 0$, applichiamo la regola della derivata di una potenza:

$$y' = \sqrt{2}\,(\operatorname{sen} x)^{\sqrt{2}-1} \cos x.$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

➢ teorema

Una funzione f è invertibile se è biunivoca.

TEOREMA

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ definita e invertibile nell'intervallo I e la sua funzione inversa $x = f^{-1}(y)$. Se $f(x)$ è derivabile con derivata diversa da 0 in ogni punto di I, allora anche $f^{-1}(y)$ è derivabile e vale la relazione:

$$\mathbf{D}[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } x = f^{-1}(y).$$

Supponendo che esistano le due derivate, per giustificare la relazione che intercorre fra loro, ricordiamo che:

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

Derivando entrambi i membri di questa uguaglianza, abbiamo

$$\mathrm{D}[f^{-1}(y)] \cdot f'(x) = 1,$$

Applichiamo la regola di derivazione di una funzione composta.

da cui otteniamo:

$$\mathrm{D}[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}.$$

Di particolare interesse è l'applicazione del teorema nel calcolo delle derivate delle funzioni goniometriche inverse.

La funzione $y = \text{arcsen}\, x$, definita per $x \in [-1; 1]$, è l'inversa di $x = \text{sen}\, y$, con $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Inoltre, la funzione seno è derivabile in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ con derivata non nulla.

Per il teorema precedente la funzione $\text{arcsen}\, x$ è derivabile in $]-1; 1[$ e si ha:

$$\text{D arcsen}\, x = \frac{1}{\text{D sen}\, y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\boxed{\textbf{D arcsen}\, \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2}}}$$

In modo analogo si possono ottenere le seguenti formule:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{arccos}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{D}\,\mathbf{arctg}\,x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathbf{D}\,\mathbf{arccotg}\,x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Riassunto

Le derivate	
Potenze di x	**Funzioni goniometriche**
$D\,k = 0$	$D \operatorname{sen} x = \cos x$
$D\,x = 1$	$D \cos x = -\operatorname{sen} x$
$D\,x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$ se $\alpha \in \mathbb{N} - \{0\}, x \in \mathbb{R}$; se $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$	$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$	$D \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
Funzioni logaritmiche ed esponenziali	**Inverse delle funzioni goniometriche**
$D\,a^x = a^x \ln a, \quad a > 0$	$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
$D\,e^x = e^x$	$D \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2}$
$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e, \quad x > 0, \quad a > 0 \wedge a \neq 1$	$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Le regole di derivazione
$D\,[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$
$D\,[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
$D\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$D\ \dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
$D\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$D\,[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x), \quad \text{con } z = g(x)$
$D\,[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \dfrac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right]$
$D\,[f^{-1}(y)] = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } x = f^{-1}(y)$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Per calcolare la derivata di $y = e^{3x}$, determiniamo prima la sua funzione inversa e poi utilizziamo la regola di derivazione della funzione inversa.

Troviamo la funzione inversa ricavando x in funzione di y.

Applichiamo il logaritmo a entrambi i membri di $y = e^{3x}$:

$$\ln y = \ln e^{3x} \quad \rightarrow \quad \ln y = 3x \ln e \quad \rightarrow \quad \ln y = 3x \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln y}{3}.$$

Applichiamo la regola di derivazione della funzione inversa:

$$\mathrm{D}e^{3x} = \frac{1}{\mathrm{D}\left(\frac{\ln y}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3y}} = 3y.$$

Sostituendo:

$$\mathrm{D}e^{3x} = 3e^{3x}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $f(x) = 2e^{2x}$, calcoliamo la derivata della funzione inversa $x = g(y)$ nel punto $y_0 = 2$.

Determiniamo il punto x_0 tale che $f(x_0) = y_0$:

$$2e^{2x} = 2 \quad \rightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \rightarrow \quad 2x = 0.$$

Quindi $x_0 = 0$. Poiché

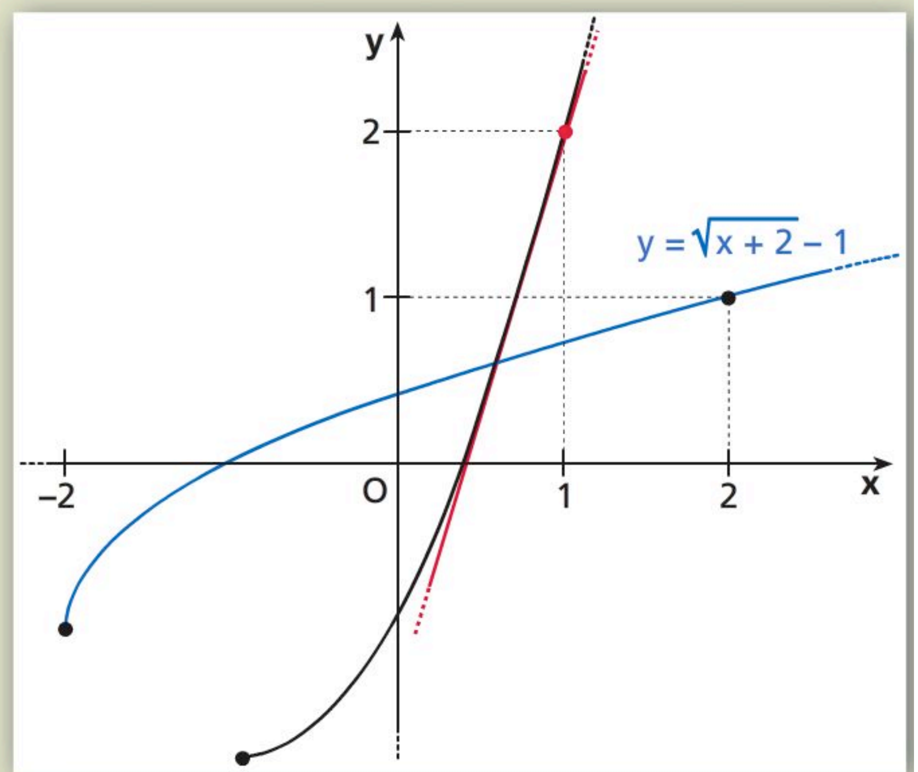
$$f'(x) = 4e^{2x},$$

applicando la regola di derivazione della funzione inversa, otteniamo:

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{4}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo graficamente che la funzione $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$ è invertibile, calcoliamo $\mathrm{D}\,f^{-1}(1)$ e interpretiamo geometricamente il risultato.



Tracciamo il grafico di $f(x)$ a partire da $y = \sqrt{x}$ con una traslazione di vettore $\vec{v}(-2; -1)$. È un arco di parabola crescente, perciò è invertibile.

Per calcolare $\mathrm{D}\,f^{-1}(1)$ applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa, e cioè:

$$\mathrm{D}\,f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ con } x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Nel nostro caso, essendo $y_0 = 1$, calcoliamo x_0 sostituendo nell'equazione di $f(x)$:

$$1 = \sqrt{x_0 + 2} - 1 \quad \to \quad \sqrt{x_0+2} = 2 \quad \to$$
$$\to \quad x_0 + 2 = 4 \quad \to \quad x_0 = 2.$$

Calcoliamo anche $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, quindi:

$$\mathrm{D}\,f^{-1}(1) = \frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{2+2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{4}} = 4.$$

Il valore trovato è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto $(1; 2)$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$\boldsymbol{y = \text{arcsen}\,(5x + 3).}$$

La funzione data è una funzione composta.
Chiamando $g(x) = 5x + 3$, la funzione data si può scrivere:

$$y = \text{arcsen}\, g(x),$$

la cui derivata è $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - g^2(x)}} \cdot g'(x)$.

Poiché $g'(x) = 5$, sostituendo si ottiene:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 3)^2}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{1 - (5x + 3)^2}}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = x + \text{sen}\, \omega t$, deriviamola rispetto a ognuna delle variabili, considerando le altre come costanti.

- Deriviamo rispetto a x. Poiché consideriamo costanti ω e t, anche $\text{sen}\, \omega t$ è costante, quindi:

  $$D\, \text{sen}\, \omega t = 0.$$

  Pertanto:

  $$y'_x = 1.$$

- Deriviamo rispetto a ω (x e t costanti):

  $$y'_\omega = t \cos \omega t.$$

- Deriviamo rispetto a t (x e ω costanti):

  $$y'_t = \omega \cos \omega t.$$

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = -1$.

Ricordiamo che la retta passante per il punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Quindi, per poter scrivere questa equazione, dobbiamo conoscere le coordinate del punto per il quale passa la retta tangente richiesta e il valore del suo coefficiente angolare m, che sappiamo essere uguale a $f'(x_0)$:

per $x_0 = -1, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad \rightarrow \quad P(-1; 1)$

$f'(x) = 4x^3 - 2x, \quad m = f'(x_0) = -2.$

La retta tangente ha equazione $y - 1 = -2 \cdot (x + 1)$, cioè $2x + y + 1 = 0$.

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

La sua derivata,

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2,$$

è, a sua volta, una funzione della variabile x, definita sempre per $x \in \mathbb{R}$. Anche di tale funzione possiamo calcolare la derivata:

$$\mathrm{D}\, y' = 6x.$$

Tale derivata prende il nome di **derivata seconda** della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo:

$$y'' \quad \text{oppure} \quad f''(x).$$

Per analogia, la derivata $y' = f'(x)$ è anche detta **derivata prima**.

Anche la derivata seconda ottenuta è una funzione che possiamo derivare; derivando quest'ultima, si ottiene la **derivata terza**:

$$y''' = 6.$$

In generale, data una funzione $y = f(x)$, con il procedimento esaminato si possono ottenere la derivata seconda, terza, quarta, … Esse si dicono **derivate di ordine superiore** della funzione data.

Per indicare la derivata prima, seconda e terza della funzione $y = f(x)$ si usano, di solito, gli apici: y', y'', y'''.
Dalla derivata quarta in poi si usa il numero fra parentesi: $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, …

In generale, la derivata di ordine n di una funzione $y = f(x)$ è anch'essa una funzione della variabile x e si indica con il simbolo $y^{(n)}$.

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate prima, seconda, terza e quarta della funzione $y = \text{sen}\, x$:

$$y = \text{sen}\, x,$$

$$y' = \cos x,$$

$$y'' = -\,\text{sen}\, x,$$

$$y''' = -\cos x,$$

$$y^{(4)} = \text{sen}\, x.$$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata prima, seconda e terza della funzione $y = x^2 \cdot \ln x$.

Questa funzione è il prodotto di due funzioni. Utilizziamo quindi la relativa regola di derivazione:

$$\mathrm{D}\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \text{ ricordando che } \mathrm{D}\,x^n = n \cdot x^{n-1} \text{ e } \mathrm{D} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Derivata prima

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

Derivata seconda. Abbiamo di nuovo un prodotto e ci comportiamo come in precedenza:

$$y'' = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \left(\frac{2}{x}\right) = 2 \ln x + 1 + 2 = 2 \ln x + 3.$$

Derivata terza

$$y''' = \frac{2}{x}.$$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

➤ Definizione

Sia $f(x)$ una funzione derivabile, e quindi continua, in un intervallo e siano x e $(x + \Delta x)$ due punti di tale intervallo.

DEFINIZIONE

Differenziale

Si chiama differenziale di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx, il prodotto della derivata della funzione, calcolata in x, per l'incremento Δx. Il differenziale viene indicato con $df(x)$ oppure dy:

$$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot \Delta x.}$$

ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti differenziali:

$$d \cos x = - \operatorname{sen} x \cdot \Delta x,$$

$$d \ln x = \frac{1}{x} \cdot \Delta x.$$

ESEMPIO

Il differenziale della funzione

$$y = 2x^3 + 3$$

è

$$dy = 6x^2 \cdot \Delta x,$$

che per $x = 1$ e $\Delta x = 0{,}3$ vale

$$dy = 6 \cdot (1)^2 \cdot 0{,}3 = 1{,}8,$$

mentre per $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}2$ vale

$$dy = 6 \cdot (2)^2 \cdot 0{,}2 = 24 \cdot 0{,}2 = 4{,}8.$$

Consideriamo la funzione

$$y = x$$

e calcoliamone il differenziale:

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x.$$

Quindi:

$$\boxed{\boldsymbol{dx = \Delta x}}$$

Il differenziale della variabile indipendente x è uguale all'incremento della variabile stessa.

Sostituendo nella definizione di differenziale, possiamo scrivere

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

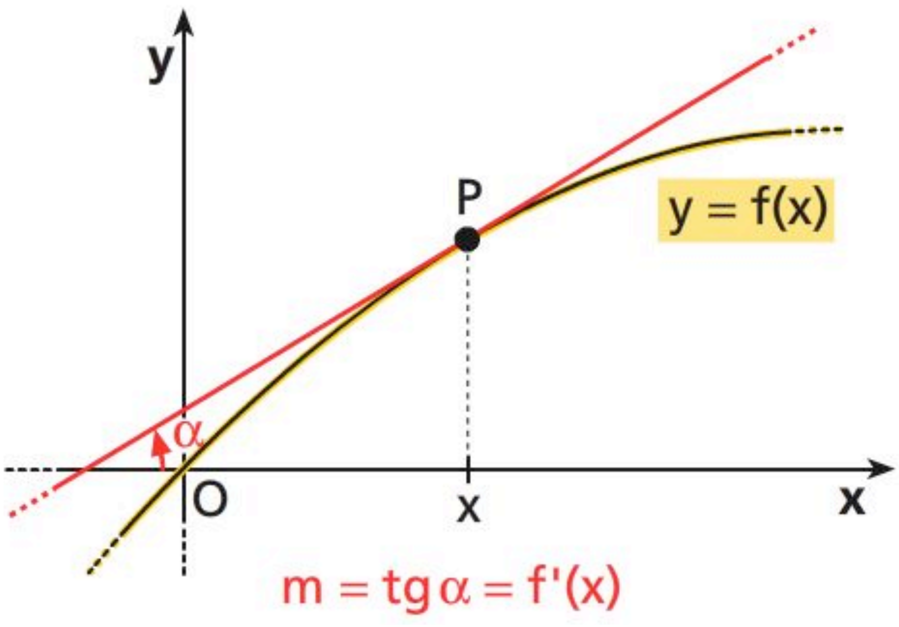
Il differenziale di una funzione è uguale al prodotto della sua derivata per il differenziale della variabile indipendente.

Da quest'ultima relazione, ricavando $f'(x)$, abbiamo:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

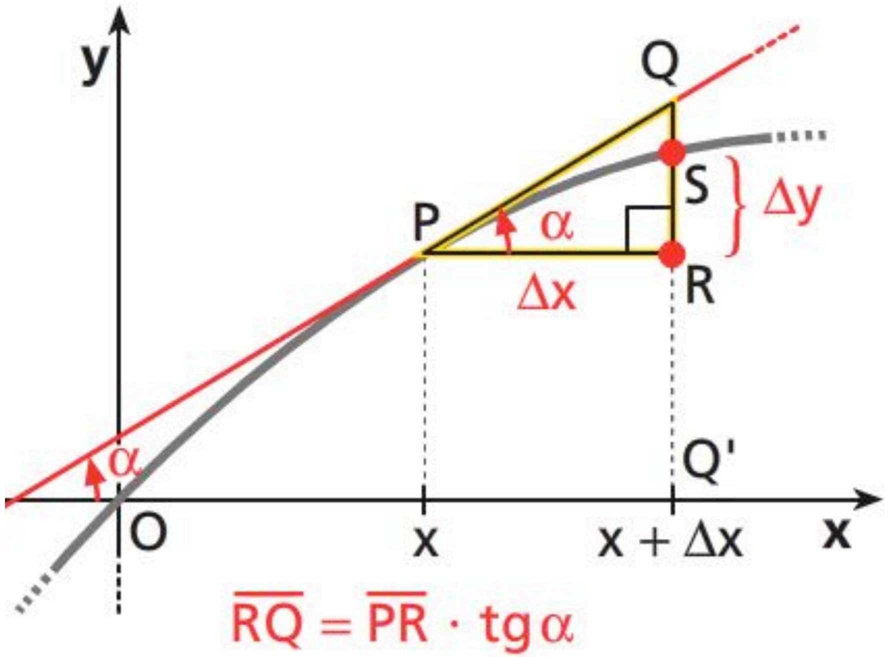
La derivata prima di una funzione è il rapporto fra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente.

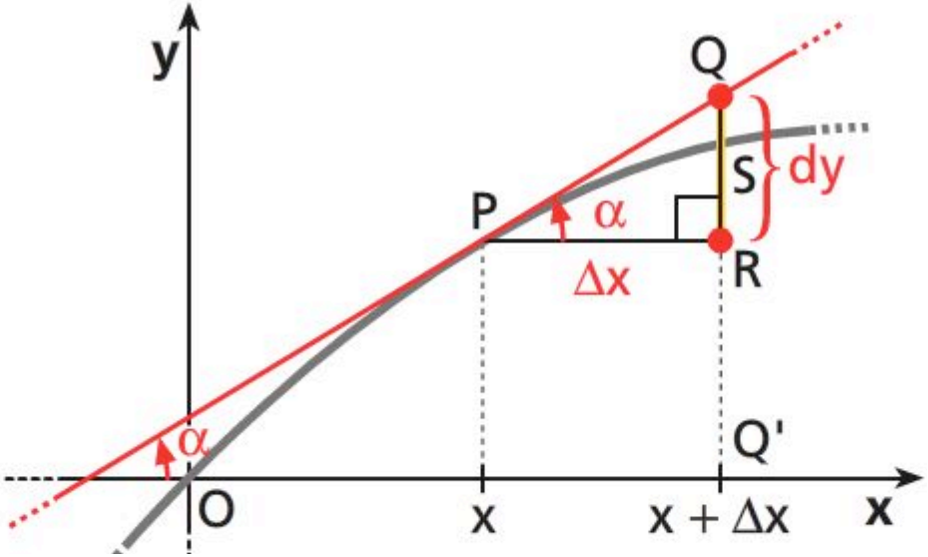
➢ Interpretazione geometrica del differenziale



a. Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta tangente nel punto *P*, di ascissa *x*.

b. In corrispondenza del punto *Q'* di ascissa $x + \Delta x$, tracciamo i punti *R*, *S* e *Q*. Il triangolo *PRQ* è rettangolo in *R*. Per il teorema dei triangoli rettangoli si ha: $\overline{RQ} = \overline{PR} \cdot \text{tg}\,\alpha$.

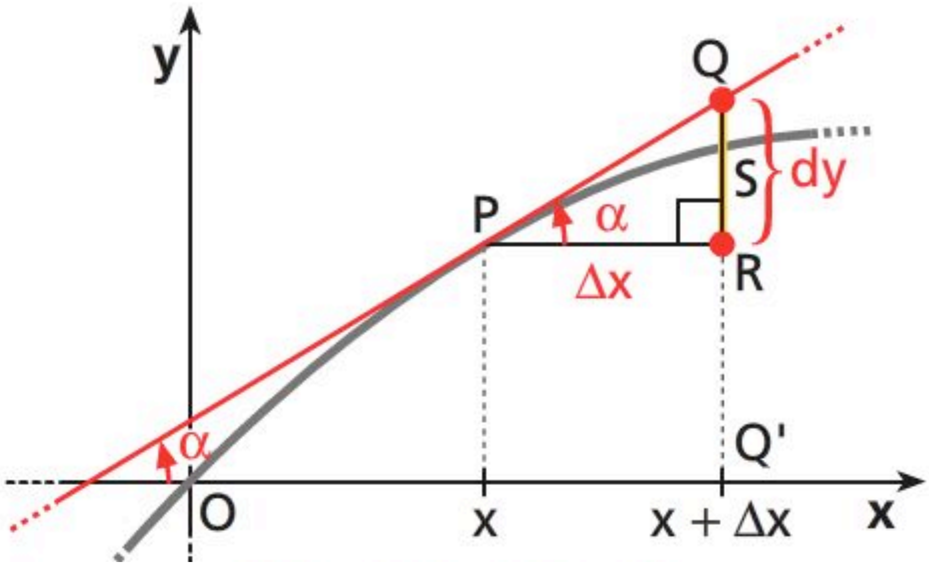




c. Poiché $\overline{PR} = \Delta x$ e $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, risulta $\overline{RQ} = dy$.

$$\overline{RQ} = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

Il differenziale dy è la variazione che subisce l'ordinata della retta tangente alla curva quando si passa dal punto di ascissa x al punto di ascissa (x+Δx)

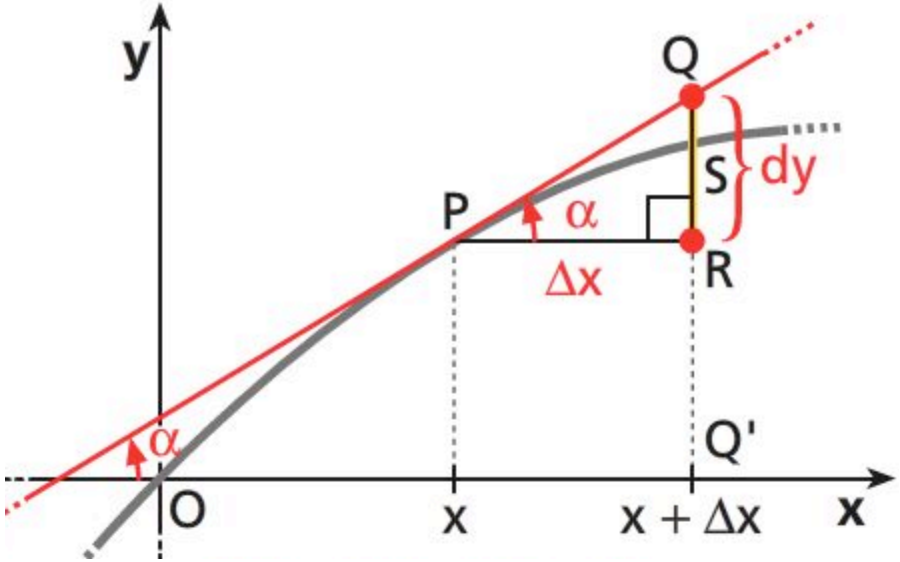


$$\boxed{\overline{RQ} = f'(x) \cdot \Delta x = dy}$$

L'incremento Δy della funzione relativo al punto x e al punto $(x + \Delta x)$ è la variazione che subisce l'ordinata della curva, cioè $\overline{RS}$:

$$\overline{RS} = \overline{Q'S} - \overline{Q'R} = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

Da quanto detto possiamo concludere che sostituire all'incremento Δy della funzione il suo differenziale da un punto di vista geometrico significa sostituire al grafico della funzione la sua tangente.



Il differenziale costituisce un'approssimazione dell'incremento della funzione:

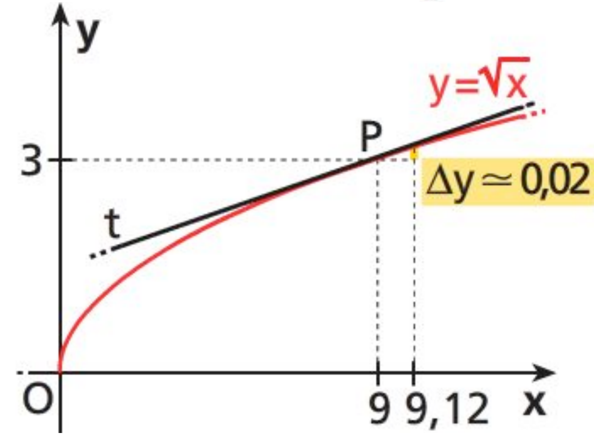
$$dy \cong \Delta y$$

Nella figura 13*c* possiamo notare che l'errore commesso nel compiere tale approssimazione è $\overline{QS}$. Più grande viene preso Δx, più tale errore aumenta.
In alcuni casi, tuttavia, è preferibile calcolare dy invece di Δy perché i calcoli sono più semplici.

ESEMPIO

Calcoliamo il valore approssimato di $\sqrt{9,12}$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x}$; scegliendo $x = 9$ e $\Delta x = 0{,}12$, possiamo scrivere:



$$\sqrt{9{,}12} = \sqrt{9 + 0{,}12} = f(x + \Delta x).$$

Calcoliamo:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{9 + 0{,}12} - \sqrt{9},$$

$$dy = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x \quad \rightarrow \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}12.$$

Poiché sappiamo che $\Delta y \simeq dy$, otteniamo:

$$\sqrt{9 + 0{,}12} - \sqrt{9} \simeq \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}12.$$

Quindi:

$$\sqrt{9{,}12} \simeq \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}12 = 3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}12 = 3 + 0{,}02.$$

Dunque $\sqrt{9{,}12} \simeq 3{,}02$.

In generale si può calcolare $f(x + \Delta x)$ in modo approssimato, generalizzando il ragionamento fatto nell'esempio precedente:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \simeq f(x) + dy,$$

$$\boldsymbol{f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}.$$

La formula evidenziata fornisce per valori vicini a x una **approssimazione lineare** della funzione.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il differenziale *dy* della funzione

$$y = f(x) = \frac{x-1}{e^x}.$$

Essendo $dy = f'(x) \cdot dx$, per calcolare il differenziale della funzione basta calcolare la sua derivata prima e moltiplicarla per dx.

La funzione è il quoziente di due funzioni. Utilizzando la corrispondente regola di derivazione, otteniamo:

$$f'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x},$$

$$dy = \frac{2-x}{e^x} dx.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'incremento Δy della funzione

$$y = x^3 - 2x^2$$

quando $x_0 = 1$ viene incrementato di $\Delta x = 0{,}023$.

Calcoliamo Δy direttamente, cioè valutiamo la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ nei punti 1,023 e 1 e ne calcoliamo la differenza:

$$\Delta y = f(1{,}023) - f(1) = (1{,}023)^3 - 2 \cdot (1{,}023)^2 - (1 - 2) \simeq -0{,}02246.$$

Utilizzando il differenziale di $f(x)$, possiamo approssimare lo stesso risultato con calcoli più semplici:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x = (3x_0^2 - 4x_0) \cdot \Delta x = (3 - 4) \cdot 0{,}023 = -0{,}023.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il valore approssimato di $\ln(1{,}34)$.

Osserviamo che $\ln(1{,}34) = \ln(1 + 0{,}34)$. Allora possiamo calcolare il valore approssimato applicando la formula

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + dy = f(x_0) + \Delta x\, f'(x_0)$$

alla funzione $f(x) = \ln x$, con $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0{,}34$.
Poiché

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = 1,$$

otteniamo:

$$\ln(1 + 0{,}34) \simeq \ln(1) + 0{,}34 \cdot 1 = 0{,}34.$$

APPLICAZIONE DELLE DERIVATE ALLA FISICA

La velocità

In fisica per lo studio di un moto rettilineo si scrive la **legge oraria**

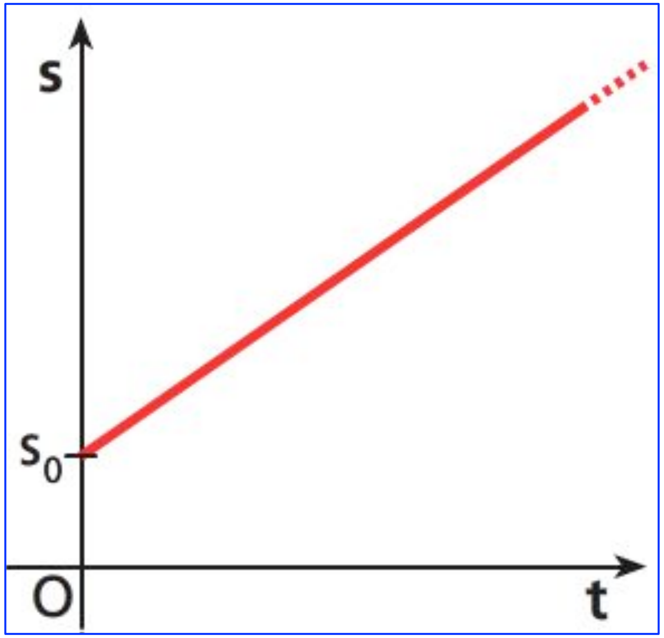
$$s = f(t),$$

ossia una funzione in cui la posizione s è la variabile dipendente e il tempo t è la variabile indipendente.

Nel moto rettilineo uniforme la legge oraria è:

$$s = vt + s_0,$$

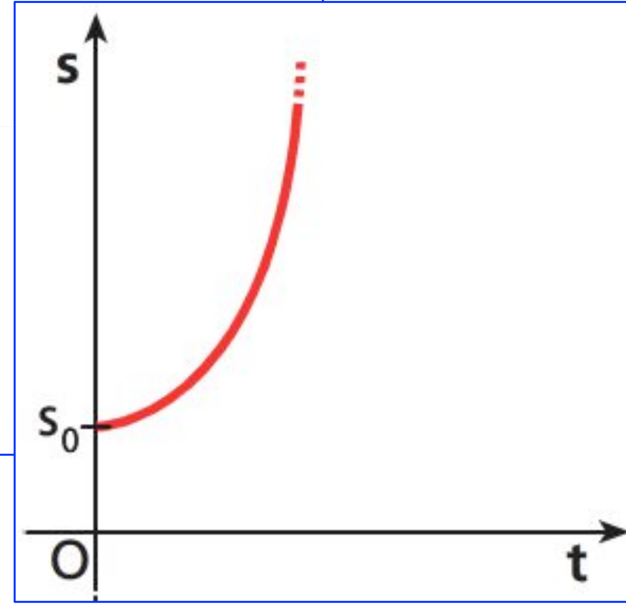
dove v è la velocità costante e s_0 la posizione al tempo $t = 0$.



Nel moto rettilineo uniformemente accelerato la legge oraria è:

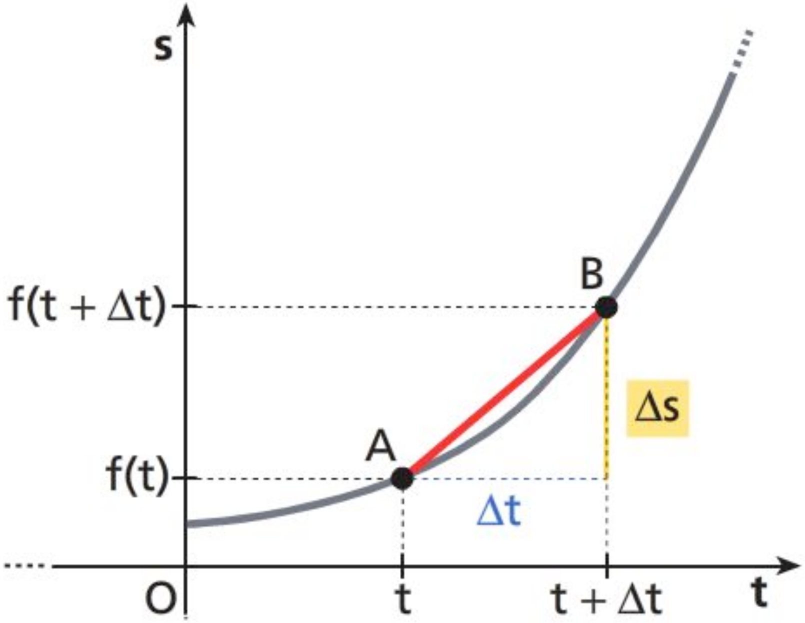
$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

dove a è l'accelerazione costante, v_0 e s_0 sono la velocità e la posizione al tempo $t = 0$.



La grandezza *velocità media* è definita dal rapporto fra lo spazio percorso Δs e il tempo Δt impiegato a percorrerlo, ossia:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$



Quindi v_m rappresenta il rapporto incrementale della legge oraria $s = f(t)$.

La *velocità istantanea* all'istante t si ottiene considerando il limite della velocità media v_m per $\Delta t \to 0$, ossia il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

La velocità istantanea è la derivata della funzione che rappresenta la legge oraria calcolata nell'istante preso in considerazione.

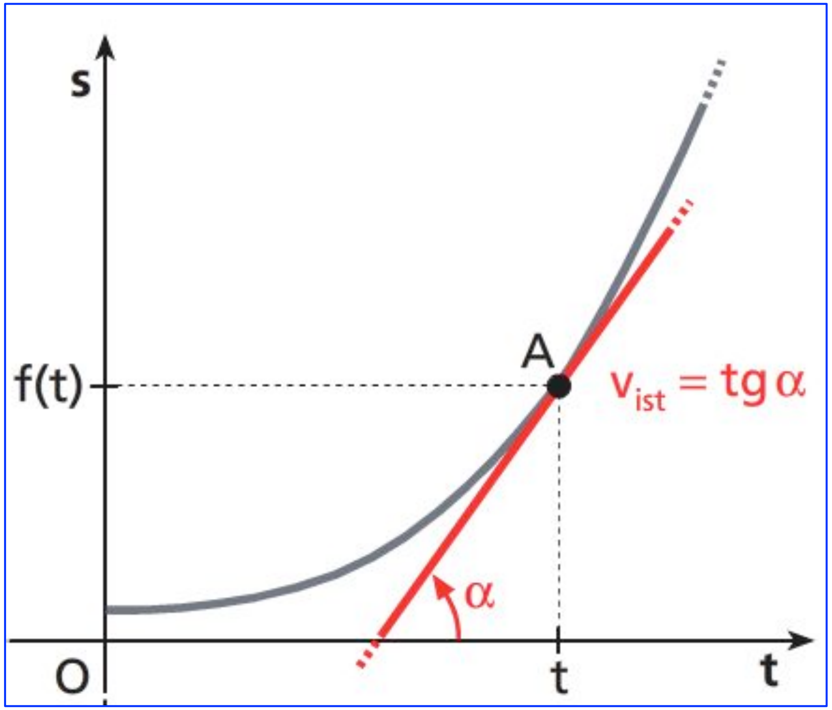
ESEMPIO

Data la legge oraria $s(t) = 2t + 6t^2$, con s misurato in metri e t in secondi, calcoliamo la velocità istantanea all'istante $t = 3$ s.

$$s'(t) = 2 + 12t,$$

pertanto:

$$v_{ist} = s'(3) = 2 + 36 = 38 \ \rightarrow \ v_{ist} = 38 \text{ m/s}.$$



Vediamo come è possibile ricavare informazioni sulla velocità dal grafico della legge oraria s=f(t), sfruttando il significato geometrico della derivata.

La **velocità istantanea** indica la “rapidità” con cui varia lo spazio al variare del tempo e **coincide con il coefficiente angolare della retta tangente** nel punto considerato.

Con riferimento alla figura, puoi verificare che la velocità aumenta all’aumentare del tempo tracciando in più punti la tangente.

L'accelerazione

Data la legge oraria $s = f(t)$, abbiamo visto che la velocità istantanea è data dalla relazione: $v_{ist} = f'(t)$.

La grandezza *accelerazione media* è definita dal rapporto

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

fra la variazione della velocità istantanea e il tempo nel quale è avvenuta tale variazione, cioè l'accelerazione media è il rapporto incrementale della funzione $v(t)$.

Passando al limite del rapporto incrementale, al tendere a 0 dell'incremento Δt, questo limite, se esiste, rappresenta l'accelerazione istantanea che possiede il punto materiale all'istante t:

$$a_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = f''(t).$$

L'accelerazione istantanea è la derivata prima della funzione velocità rispetto al tempo, ossia la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.

ESEMPIO

Data la legge oraria $s(t) = 5t + 2t^2$, calcoliamo l'accelerazione all'istante $t = 2$ s. Misuriamo la posizione in metri (m) e il tempo in secondi (s). L'unità di misura della velocità è metri al secondo (m/s) e quella dell'accelerazione metri al secondo al quadrato (m/s^2).

Poiché

$$s'(t) = 5 + 4t \text{ e } s''(t) = 4,$$

possiamo affermare che:

$$a_{ist} = 4 \text{ m/s}^2.$$

L'accelerazione risulta costante e uguale a 4 m/s^2, anche al tempo $t = 2$ s; infatti, la legge del moto assegnata è quella di un moto uniformemente accelerato.

L'intensità di corrente

Si definisce *intensità di corrente* la quantità di carica che attraversa una certa sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Se conosciamo la funzione $q(t)$ che lega la quantità di carica al tempo, per ottenere l'intensità di corrente media relativa a una quantità di carica Δq passata in un intervallo di tempo Δt, calcoliamo:

$$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

i_m è il rapporto incrementale della quantità di carica considerata come funzione del tempo.

Passando al limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento Δt, ossia calcolando la derivata della funzione $q(t)$, otteniamo, se il limite esiste, l'intensità della corrente che circola nel conduttore all'istante t:

$$i_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t).$$

ESEMPIO

La quantità di carica, misurata in coulomb, che attraversa un certo conduttore, segue la legge:

$$q = 3t^2 - 2t + 4.$$

Determiniamo l'intensità di corrente all'istante $t = 3$ s:

$$i_{ist} = q'(t) = 6t - 2$$

$$i_{ist}(3) = 18 - 2 = 16.$$

L'intensità di corrente cercata è di 16 A, dove con A indichiamo l'ampere, unità di misura dell'intensità di corrente.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Un corpo si muove su una traiettoria rettilinea seguendo la legge oraria $s = 4 \ln t - 2t^2$. Determiniamo la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo e calcoliamo in quale istante risulta $v = 0$ m/s e in quale $a = -20$ m/s².

La velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, quindi: $v = \dfrac{4}{t} - 4t$.

L'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, quindi: $a = -\dfrac{4}{t^2} - 4$.

$$v = 0 \quad \text{per} \quad \frac{4}{t} - 4t = 0 \quad \rightarrow \quad 4 - 4t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \pm 1.$$

Considerando il valore positivo, otteniamo che la velocità è nulla per $t = 1$ s.

$$a = -20 \quad \text{per} \quad -\frac{4}{t^2} - 4 = -20 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{t^2} + 4 = 20 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{t^2} = 4 \quad \rightarrow \quad t^2 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad t = \pm\frac{1}{2}.$$

Considerando il valore positivo, otteniamo che l'accelerazione vale -20 m/s² quando $t = 0,5$ s.

ESERCIZIO GUIDA

Un corpo si muove in un piano xOy seguendo la legge:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{3} & \text{nella direzione } x \\ y(t) = \dfrac{2}{9}t^2 - \dfrac{4}{3}t + 2 & \text{nella direzione } y \end{cases}$$

dove t è il tempo misurato in secondi e lo spazio è misurato in metri.

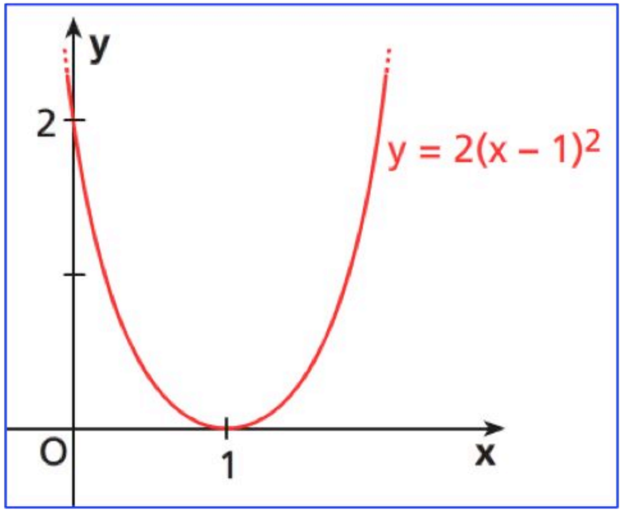
a) Determiniamo l'equazione cartesiana della traiettoria e rappresentiamola graficamente.
b) Troviamo le componenti lungo gli assi cartesiani della velocità e il modulo del vettore velocità al variare del tempo t.
c) Calcoliamo il modulo e la direzione della velocità per $t = \dfrac{15}{4}$ s.
d) Troviamo le componenti, il modulo e la direzione del vettore accelerazione al variare del tempo.

a) Dalla prima equazione ricaviamo la variabile t e la sostituiamo nella seconda determinando così l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$\begin{cases} t = 3x \\ y = \dfrac{2}{9} \cdot (3x)^2 - \dfrac{4}{3} \cdot (3x) + 2 \end{cases}$$

$$y = 2x^2 - 4x + 2.$$

La traiettoria del corpo è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice $V(1; 0)$.



b) Le componenti del vettore velocità sono date dalle derivate delle componenti della posizione:

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{3} \\ y'(t) = \dfrac{4}{9}t - \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Il modulo del vettore velocità è: $\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{4}{9}t - \dfrac{4}{3}\right)^2}$

c) Per $t = \dfrac{15}{4}$, otteniamo: $\left|\vec{v}\left(\dfrac{15}{4}\right)\right| = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{15}{4} - \dfrac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2}$ m/s;

la direzione del vettore $\vec{v}\left(\dfrac{15}{4}\right)$ forma con l'asse x un angolo α tale che: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y'\left(\dfrac{15}{4}\right)}{x'\left(\dfrac{15}{4}\right)} = \dfrac{1}{3}\cdot 3 = 1.$

Quindi $\alpha = 45°$.

d) Le componenti del vettore accelerazione sono date dalle derivate seconde delle componenti della posizione:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

L'accelerazione è costante, di modulo $a = \dfrac{4}{9}$ m/s^2 e diretta lungo l'asse y.

APPLICAZIONE DELLE DERIVATE ALLA GEOMETRIA ANALITICA

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = -1$.

Ricordiamo che la retta passante per il punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Quindi, per poter scrivere questa equazione, dobbiamo conoscere le coordinate del punto per il quale passa la retta tangente richiesta e il valore del suo coefficiente angolare m, che sappiamo essere uguale a $f'(x_0)$:

$$\text{per } x_0 = -1, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad \rightarrow \quad P(-1; 1)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x, \quad m = f'(x_0) = -2.$$

La retta tangente ha equazione $y - 1 = -2 \cdot (x + 1)$, cioè $2x + y + 1 = 0$.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le coordinate dei punti nei quali la retta tangente al grafico della funzione

$$y = f(x) = x^3 + 2x + 3$$

ha il coefficiente angolare $m = 5$.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto di ascissa x_0 è uguale al valore che la derivata prima della funzione assume per $x = x_0$, cioè $m = f'(x_0)$, per cui calcoliamo $f'(x)$ e poi la poniamo uguale al valore di m dato:

$$f'(x) = 3x^2 + 2; \quad 3x^2 + 2 = 5 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Calcoliamo ora le ordinate dei punti di cui abbiamo trovato l'ascissa:

per $x = +1$, si ha $y = 6$, $P_1(1; 6)$;

per $x = -1$, si ha $y = 0$, $P_2(-1; 0)$.

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione di equazione $y = 2x^3 - 2x$ e passante per il punto $A(0; -4)$.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y' = 6x^2 - 2.$$

Un punto generico della curva ha coordinate $P(c; 2c^3 - 2c)$ e il coefficiente angolare della retta tangente in P è

$$m = y'(c) = 6c^2 - 2,$$

perciò l'equazione della retta tangente alla curva nel punto P è:

$$y - (2c^3 - 2c) = (6c^2 - 2)(x - c).$$

Imponiamo il passaggio della retta per $A(0; -4)$:

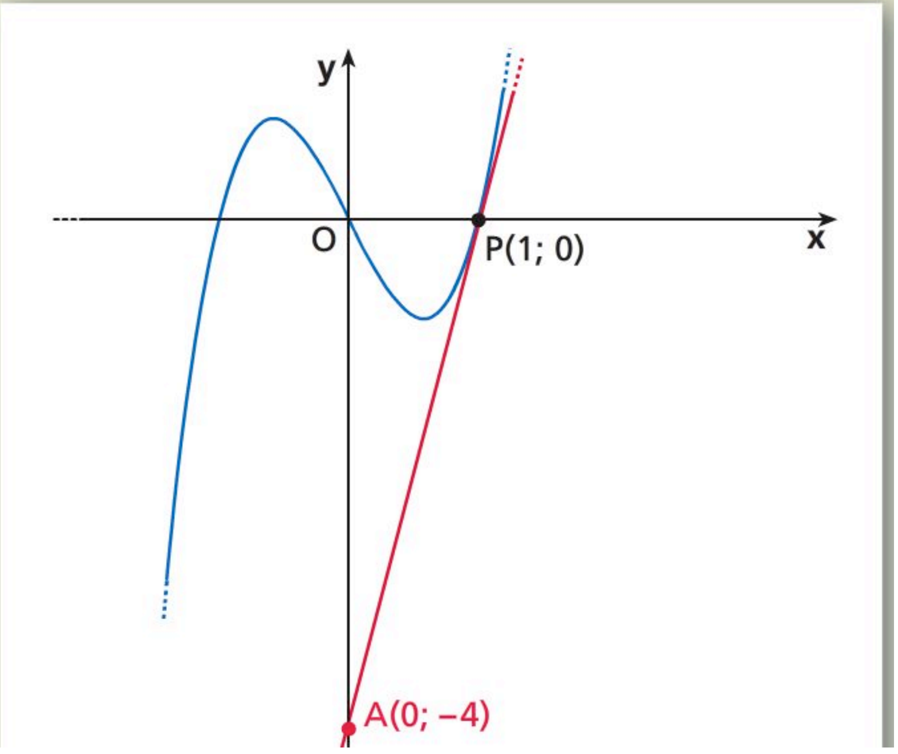
$$-4 - (2c^3 - 2c) = (6c^2 - 2)(-c) \quad \to$$

$$\to \quad -4 - 2c^3 + 2c = -6c^3 + 2c \quad \to$$

$$\to \quad 4c^3 - 4 = 0 \quad \to \quad c^3 = 1 \quad \to \quad c = 1.$$

Sostituiamo nell'equazione della retta e otteniamo:

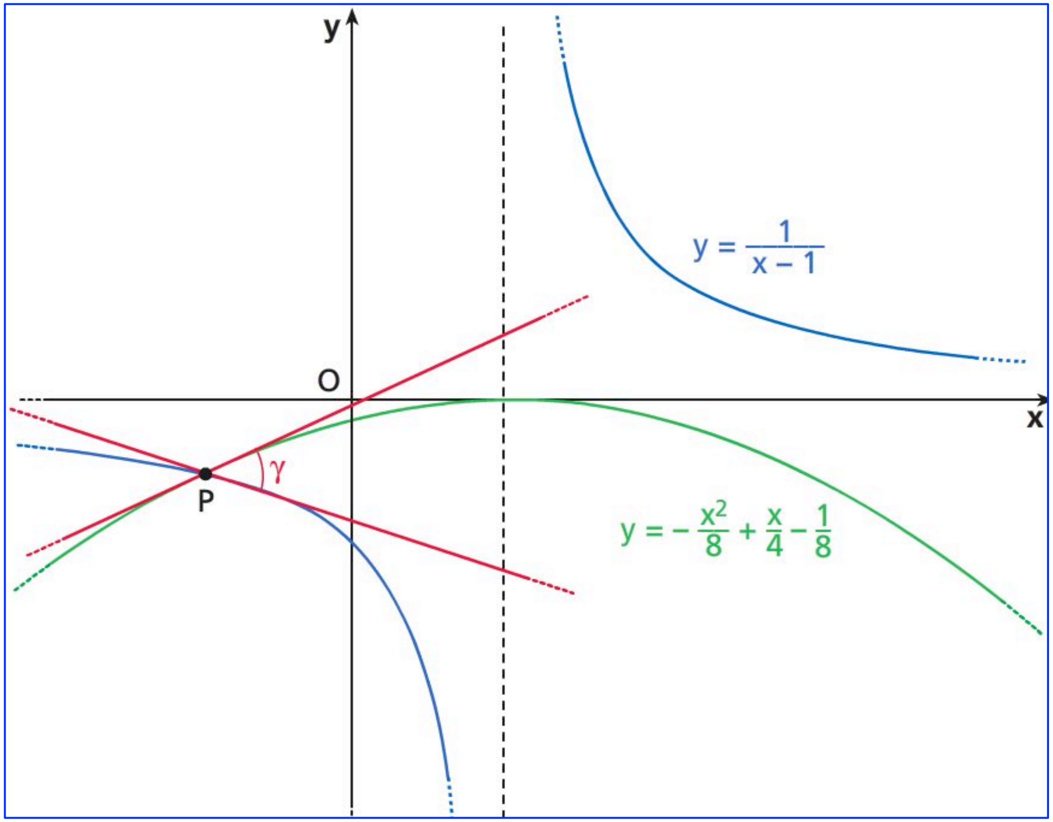
$$y = 4(x - 1).$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = \dfrac{1}{x-1}$ e $y = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}$.

L'angolo formato da due curve è l'angolo formato dalle rette tangenti alle due curve nel loro punto di intersezione.



Se sono noti i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle due rette, si può calcolare la tangente dell'angolo acuto da esse formato con la formula:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

Troviamo il punto P di intersezione delle due curve con il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ y = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$8 = -x^2(x-1) + 2x(x-1) - x + 1, \quad \text{con } x \neq 1,$$

$$8 = -x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x - x + 1 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0.$$

Applicando la regola di Ruffini si ottiene l'unica soluzione $x = -1$ e sostituendo nella prima equazione si ottiene $y = -\frac{1}{2}$. Il punto di intersezione ha dunque coordinate $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Calcoliamo ora le derivate delle due funzioni:

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{e} \quad y' = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Determiniamo i coefficienti angolari delle due rette tangenti nel punto di ascissa $x = -1$:

$$m_1 = y'(-1) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo infine:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left| \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} \right| = \left| -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} \right| = \frac{6}{7}.$$

Ricaviamo γ:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{6}{7}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione di equazione $y = f(x) = x^3 + 2kx + k - 1$, determiniamo il parametro k in modo che la tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$ formi un angolo di 135° con l'asse x.

Il coefficiente angolare m della retta tangente a una curva in un suo punto è uguale al valore che la derivata prima assume in quel punto, cioè $m = f'(x_0)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2k \quad \rightarrow \quad m = f'(1) = 3 + 2k.$$

Ricordando che il coefficiente angolare m di una retta è uguale alla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x, cioè $m = \text{tg}\, \alpha$, possiamo scrivere, per la retta tangente nel punto $x_0 = 1$:

$$m = \text{tg}\, 135° = -1.$$

Essendo $m = f'(1) = -1$, otteniamo:

$$3 + 2k = -1 \quad \rightarrow \quad 2k = -4 \quad \rightarrow \quad k = -2.$$

Per $k = -2$, la retta tangente alla curva nel punto $x_0 = 1$ forma un angolo di 135° con l'asse x.

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = ax^3 + bx$, individuiamo i parametri a e b in modo che il suo grafico abbia nel punto $P(1; 2)$ una tangente di coefficiente angolare $m = 1$.

La funzione dipende da due parametri, a e b, quindi abbiamo bisogno di due condizioni che ci permettano di impostare un sistema di due equazioni nelle due incognite a e b.

In questo caso le condizioni sono:

1. il passaggio per il punto $P(1; 2)$ che otteniamo sostituendo nell'equazione della curva le coordinate del punto stesso;
2. l'uguaglianza fra il valore dato per il coefficiente angolare della tangente nel punto P e il valore che assume la derivata prima nel punto stesso.

Calcoliamo: $f'(x) = 3ax^2 + b$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = a + b & \leftarrow \quad \text{dalla condizione } \mathbf{1} \\ 3a + b = 1 & \leftarrow \quad \text{dalla condizione } \mathbf{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

La funzione richiesta è $y = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{2}x$.