

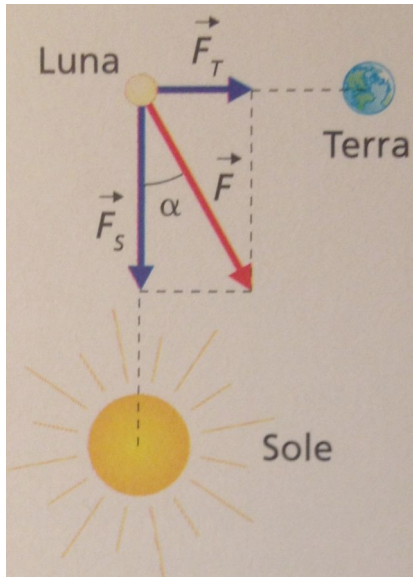
Problemi di Fisica

La Gravitazione

PROBLEMA

Calcolare la forza che agisce sulla Luna per effetto dell'interazione gravitazionale con la Terra e il Sole. I dati sono: massa Sole $M_S=1,98 \cdot 10^{30}$ kg; massa Terra $M_T=5,98 \cdot 10^{24}$ kg; massa Luna $M_L=7,34 \cdot 10^{22}$ kg; distanza Sole-Luna $R_{SL}=1,50 \cdot 10^{11}$ m; distanza Terra-Luna $R_{TL}=3,84 \cdot 10^8$ m; costante gravitazione universale $G=6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg²

SOLUZIONE



Cominciamo a calcolare i moduli delle forze, attraverso la legge della gravitazione universale, che la Terra e il Sole esercitano sulla Luna:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{R_{TL}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}}{3,84 \cdot 10^8} = 1,99 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$$F_S = G \cdot \frac{M_S \cdot M_L}{R_{SL}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,98 \cdot 10^{30} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}}{1,50 \cdot 10^{11}} = 4,31 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Per ricavare la forza totale che agisce sulla Luna dobbiamo eseguire la somma vettoriale delle forze $\mathbf{F}_T$ e $\mathbf{F}_S$. Graficamente, la risultante è rappresentata in figura (regola del parallelogramma). Per quanto riguarda l'intensità, poichè le due forze sono perpendicolari fra loro, è data dal teorema di Pitagora:

$$F = \sqrt{F_T^2 + F_S^2} = \sqrt{(1,99 \cdot 10^{20})^2 + (4,31 \cdot 10^{20})^2} = 4,75 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

mentre l'angolo è dato da:

$$\tan \alpha = \frac{F_T}{F_S} = \frac{1,99 \cdot 10^{20}}{4,31 \cdot 10^{20}} = 0,462 \rightarrow \alpha = 24,8^\circ$$

La massa del Sole è cinque ordini di grandezza maggiore della Terra, ma, a causa della sua maggiore distanza, esercita sulla Luna una forza d'intensità paragonabile a quella della Terra. Il moto della Luna è la composizione dei moti prodotti singolarmente dalle due forze.

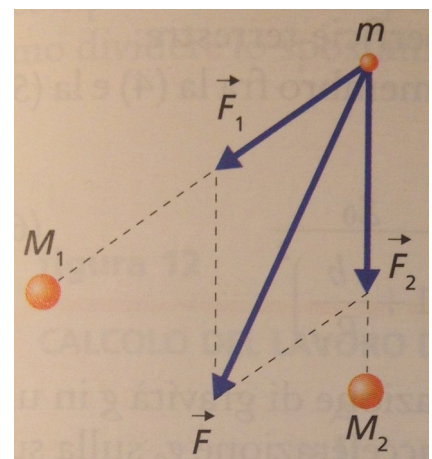
PROBLEMA

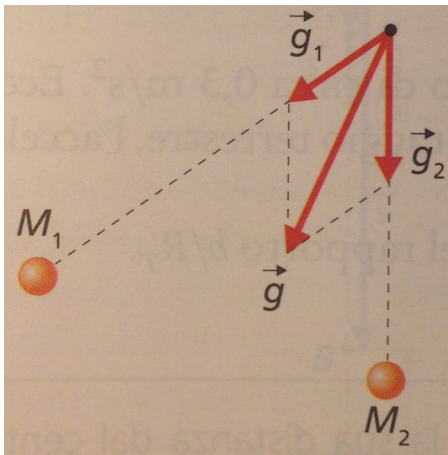
Determinare graficamente la forza e il campo gravitazionale su una massa di prova m , generati dalle masse M_1 e M_2 .

SOLUZIONE

- La forza gravitazionale che due masse puntiformi M_1 e M_2 esercitano su una massa di prova m situata in una data posizione, per il principio di sovrapposizione, è data dalla somma vettoriale di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ (vedere figura):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$





➤ Il campo gravitazionale $\mathbf{g}$ nella posizione considerata è la somma vettoriale dei campi $\mathbf{g}_1$ e $\mathbf{g}_2$ generati da ciascuna delle due masse M_1 e M_2 indipendentemente dall'altra (principio di sovrapposizione):

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Le considerazioni che valgono per la forza e il campo generato da due masse puntiformi, possono essere estese a qualsiasi distribuzione di masse.

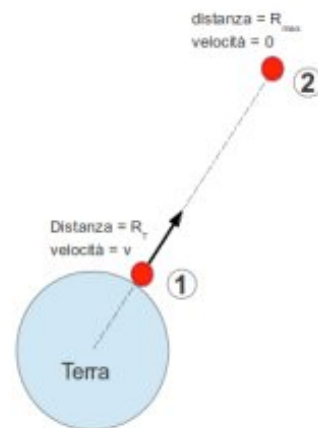
PROBLEMA

Calcolare la velocità di fuga di un corpo dalla Terra. I dati sono: massa Terra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; raggio Terra $R_T = 6,378 \cdot 10^6$ m; costante gravitazione universale $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg².

SOLUZIONE

La velocità di fuga dalla Terra è la velocità minima con cui un corpo deve essere lanciato dalla superficie terrestre perché se ne allontani all'infinito. Supponiamo che un corpo di massa m sia lanciato verticalmente dalla superficie della Terra con una velocità iniziale di modulo v_0 . La sua energia meccanica è:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$



La condizione che deve verificarsi affinché il corpo si allontani indefinitamente dalla Terra è che l'energia meccanica, costante durante il moto (principio di conservazione energia meccanica per la presenza di sole forze conservative), sia maggiore di zero o, al limite, nulla. Nel caso sia nulla, la velocità di lancio v_0 del corpo coincide con la sua velocità di fuga:

$$0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R_T} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Sostituendo i dati si ottiene:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

Nota: la velocità di fuga è indipendente dalla massa del corpo lanciato dalla Terra.

Quanto vale la velocità di fuga da Giove? Dati: massa Giove $M_G = 1,898 \cdot 10^{27}$ kg; raggio Giove $R_G = 6,99 \cdot 10^7$ m; costante gravitazione universale $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg².

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_G}{R_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,898 \cdot 10^{27}}{6,99 \cdot 10^7}} = 60.000 \text{ m/s} = 60 \text{ km/s}$$

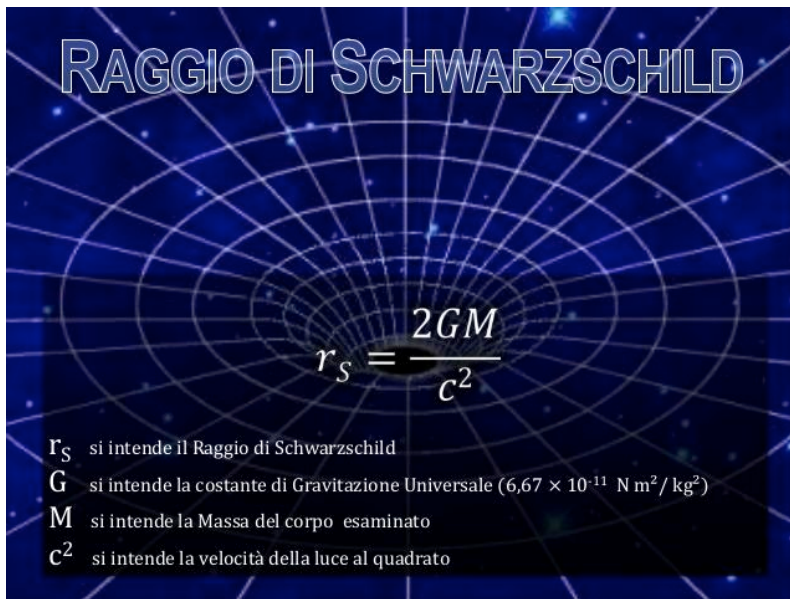
OSSERVAZIONI IMPORTANTI

Nella formula della velocità di fuga, il raggio R è al denominatore. Quindi, se la massa di un corpo celeste rimane costante mentre il suo raggio diminuisce (come accade a una stella alla fine della sua "vita" per effetto dell'esaurimento del proprio combustibile nucleare), la velocità

di fuga da esso aumenta. Se il raggio R continua a diminuire, la velocità di fuga può diventare superiore alla velocità c della luce nel vuoto. Però, la teoria della relatività di Einstein stabilisce che nessun oggetto può viaggiare a una velocità superiore a c, per cui è impossibile che un oggetto possa allontanarsi da questo corpo celeste.

Questo corpo celeste si è trasformato in un **buco nero**, ossia in un pozzo gravitazionale da cui nulla, neppure la luce, può uscire.

Il valore critico di R per il quale, dato un corpo celeste di massa M, si ha $v_f = c$ è detto *raggio di Schwarzschild*:



$$v_f = c = \sqrt{\frac{2GM_G}{R_G}} \Rightarrow R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Per tutti i corpi celesti è possibile calcolare il raggio di Schwarzschild, ma non tutti possono diventare dei buchi neri (una stella per diventare un buco nero deve avere una massa superiore a tre volte quella del Sole). Quindi, calcoliamo, per fini puramente matematici, il raggio di Schwarzschild per la Terra e il Sole:

$$R_s = \frac{2GM_T}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 9 \text{ mm}$$

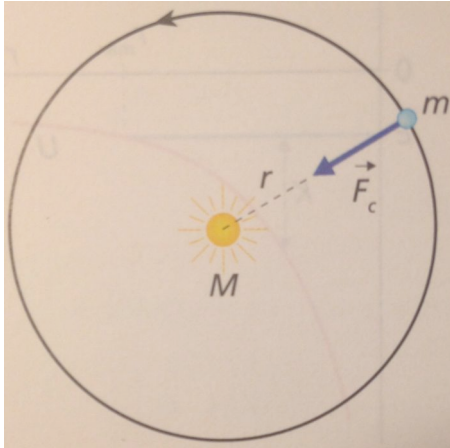
$$R_s = \frac{2GM_s}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 3 \text{ km}$$

Questi valori indicano che la Terra, per diventare un buco nero, deve avere un raggio di circa 9 mm e il Sole di circa 3 km.

PROBLEMA

Calcolare la velocità con cui deve essere lanciato un satellite di massa m affinché entri in orbita intorno alla Terra, e il suo periodo di rivoluzione. I dati sono: massa Terra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; raggio Terra $R_T = 6,378 \cdot 10^6$ m; costante gravitazione universale $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg².

SOLUZIONE



La forza centripeta che mantiene il satellite (o il pianeta) in orbita intorno alla Terra (o al Sole) è la forza gravitazionale, quindi:

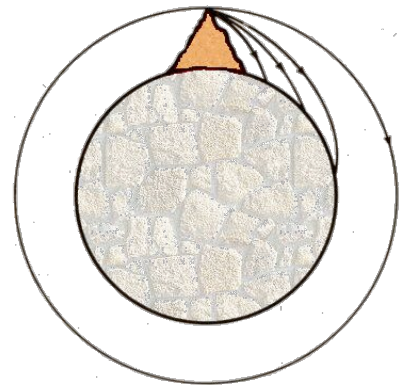
$$F_G = F_C \Rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R}}$$

Un satellite lanciato orizzontalmente dalla cima di una montagna può entrare in orbita intorno alla Terra se assume una adeguata velocità. Trascurando la resistenza dell'aria, possiamo usare l'equazione precedente per calcolare tale velocità (il raggio nella formula sarà quello della Terra):

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6}} = 7,91 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,91 \text{ km/s}$$

Conseguentemente, il periodo orbitale del satellite è:

$$v = \frac{2\pi R_T}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R_T}{v} = \frac{2\pi \cdot 6,378 \cdot 10^6}{7,91 \cdot 10^3} = 5,07 \cdot 10^3 \text{ s}$$



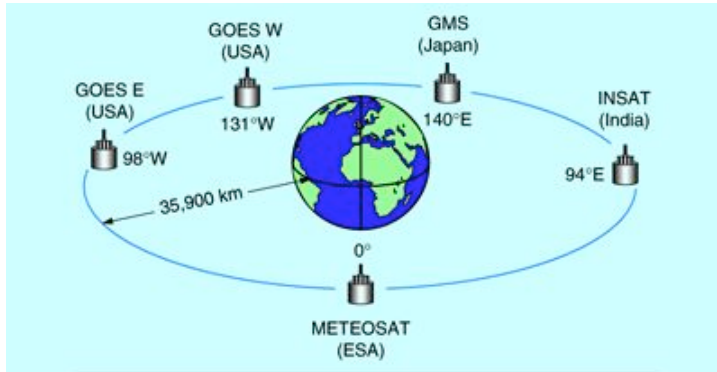
OSSERVAZIONI IMPORTANTI

- Nei nostri calcoli abbiamo trascurato la resistenza dell'aria, per cui qualsiasi proiettile sparato orizzontalmente alla velocità di 7,91 km/s diventerebbe un satellite artificiale della Terra. In realtà i satelliti vengono messi in orbita con l'uso di missili. Dapprima vengono portati alla quota prescelta e poi vengono spinti in direzione orizzontale, acquistando così la velocità sufficiente che ne garantisce la permanenza in orbita.
- La velocità è indipendente dalla massa del satellite e dipende dal raggio dell'orbita e dalla massa della Terra.

PROBLEMA

A quale altezza dalla superficie terrestre si trovano i satelliti geostazionari? Dati: massa Terra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; raggio Terra $R_T = 6,378 \cdot 10^6$ m; costante gravitazione universale $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg²; periodo di rotazione $T = 24$ h = 86400 s.

SOLUZIONE



Un satellite è detto geostazionario o sincrono se, rispetto alla superficie della Terra, si trova sempre nella stessa posizione. Questi satelliti, usati per le telecomunicazioni e le previsioni meteorologiche, descrivono un'orbita circolare sul piano equatoriale terrestre girando con lo stesso periodo (24 h) e nello stesso verso (da ovest a est) della rotazione della Terra intorno al proprio asse.

Il secondo principio della dinamica fornisce l'equazione da cui ricavare l'altezza. La forza centripeta che mantiene il satellite di massa m in orbita geostazionaria intorno alla Terra M_T , alla distanza $R_T + h$ rispetto al centro della Terra, è la forza gravitazionale. Quindi:

$$F_G = F_C \Rightarrow G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

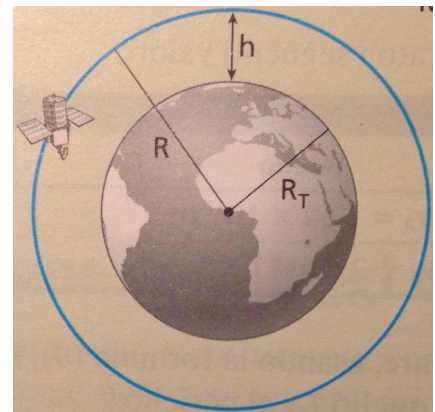
Poiché:

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

sostituito nell'equazione precedente, si ottiene:

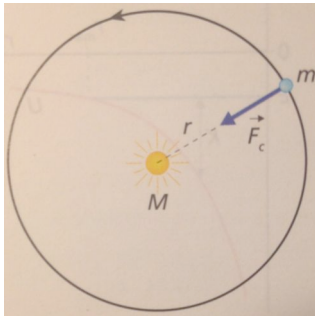
$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 36.000 \text{ km}$$

Tutti i satelliti geostazionari, indipendentemente dalla loro massa, orbitano intorno alla Terra, sul piano equatoriale, all'altezza di circa 36.000 km.



PROBLEMA

Ganimede, il più grande dei quattro satelliti medicei di Giove, impiega 7,15 giorni a compiere un giro della sua orbita. Quanto dista Ganimede da Giove? E qual è la sua velocità e accelerazione? Dati: massa Giove $M_G = 1,90 \cdot 10^{27}$ kg; costante gravitazione universale $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg²; periodo di rotazione $T = 7,15$ giorni $= 6,18 \cdot 10^5$ s.



SOLUZIONE

Supponiamo, per semplicità, che la traiettoria del satellite Ganimede sia una circonferenza di raggio r , e si muova di moto circolare uniforme. Lo stesso discorso fatto per i pianeti intorno al Sole, può essere fatto per i satelliti intorno ai pianeti. Pertanto, la forza centripeta che mantiene Ganimede in orbita intorno a Giove, è la forza gravitazionale. Quindi:

$$F_G = F_C \Rightarrow G \frac{M_G \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow{\text{poichè } v = \frac{2\pi r}{T}} T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

La formula per T può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Questa equazione esprime la terza legge di Keplero applicata al caso di un'orbita circolare. Infatti, se indichiamo con:

$$K = \frac{4\pi^2}{GM}$$

otteniamo:

$$\frac{T^2}{r^3} = k \xrightarrow{\text{orbita circolare}} T^2 = kr^3 \xrightarrow{\text{orbita ellittica}} T^2 = ka^3$$

Ossia: il quadrato del periodo di rivoluzione è direttamente proporzionale al cubo del raggio dell'orbita.

Per un'orbita ellittica si perviene allo stesso risultato, con l'unica differenza che al posto del raggio r della circonferenza figura il semiasse maggiore a dell'ellisse.

Allora, usiamo la terza legge di Keplero per calcolare la distanza r di Ganimede da Giove:

$$k = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,90 \cdot 10^{27}} = 3,12 \cdot 10^{-16} \text{ s}^2 / \text{m}^3$$

$$T^2 = kr^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(6,18 \cdot 10^5)^2}{3,12 \cdot 10^{-16}}} = 1,07 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Sempre dal secondo principio, ricaviamo velocità e accelerazione centripeta:

$$F_G = F_C \Rightarrow G \frac{M_G \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_G}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,90 \cdot 10^{27}}{1,07 \cdot 10^9}} = 11.645 \text{ m/s} \approx 12 \text{ km/s}$$

$$F_G = F_C \Rightarrow G \frac{M_G \cdot m}{r^2} = ma_c \Rightarrow a_c = G \cdot \frac{M_G}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,90 \cdot 10^{27}}{(1,07 \cdot 10^9)^2} = 0,111 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMA

Un astronauta effettua un salto di 58 cm su un pianeta, il cui raggio è $R=3,86 \cdot 10^6$ m, con una velocità iniziale di 3,10 m/s. Calcolare la massa del pianeta.

SOLUZIONE

L'altezza del salto dell'astronauta è molto piccola se paragonata al raggio del pianeta, perciò possiamo assumere che l'accelerazione di gravità sia costante lungo il salto. Utilizziamo il principio di conservazione dell'energia meccanica per determinare un'espressione per la g su questo pianeta:

$$E_{M_i} = E_{M_f} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh \Rightarrow g = \frac{v_i^2}{2h} \quad (1)$$

La forza che il pianeta di massa M esercita sull'astronauta di massa m , è data dalla legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Ma tale forza F non è altro che la forza peso:

$$F = mg$$

Quindi, uguagliando le due espressioni per F , ricaviamo g :

$$G \frac{M \cdot m}{R^2} = mg \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2} \quad (2)$$

Infine, uguagliando la (1) e la (2), otteniamo la massa del pianeta:

$$\frac{v_i^2}{2h} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{R^2 v_i^2}{2Gh} = \frac{(3,86 \cdot 10^6)^2 \cdot 3,86 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,58} = 1,85 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Se aumenta l'altezza del salto, a parità di velocità iniziale, vuol dire che la massa del pianeta diminuisce. Su un pianeta con massa piccola è possibile fare salti maggiori. Ricordate le immagini degli astronauti sulla Luna?

PROBLEMA

Due stelle orbitano intorno al loro comune centro di massa, come mostrato in figura. La stella che ha massa maggiore o minore orbiterà sulla circonferenza di raggio minore? Calcolare il periodo di rotazione delle stelle.

SOLUZIONE

Il centro di massa o baricentro di un sistema è il punto geometrico corrispondente al valor medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio. In particolare, per il nostro sistema di due masse situate su una stessa retta, l'ascissa del CM è data da:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Le stelle esercitano l'una sull'altra una forza data dalla legge della gravitazione universale. Per il terzo principio della dinamica, le due forze sono uguali e opposte e corrispondono alle forze centripete necessarie a mantenere le stelle su un'orbita circolare:

$$F_{c_1} = F_{c_2} \Rightarrow m_1 a_{c_1} = m_2 a_{c_2} \Rightarrow m_1 \left(\frac{v_1^2}{r_1} \right) = m_2 \left(\frac{v_2^2}{r_2} \right)$$

Poichè:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

si ottiene:

$$\frac{m_1 \left(\frac{2\pi r_1}{T} \right)^2}{r_1} = \frac{m_2 \left(\frac{2\pi r_2}{T} \right)^2}{r_2} \xrightarrow{\text{da cui}} \frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{2r_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = 2m_2$$

La stella di massa maggiore, ossia m_1 , orbiterà sulla circonferenza di raggio minore.

Poniamo la forza gravitazionale fra le due stelle uguale alla forza centripeta necessaria a mantenere la stella m_1 sull'orbita circolare:

$$F_G = F_c \Rightarrow G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1}$$

Sostituendo nell'equazione ottenuta:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad r_2 = 2r_1 \quad m_2 = \frac{1}{2} m_1$$

si ottiene, dopo alcuni passaggi algebrici, il periodo T:

$$T = \sqrt{\frac{72\pi^2 r_1^3}{Gm_1}}$$

Il periodo aumenta all'aumentare di r_1 e diminuisce all'aumentare di m_1 .

