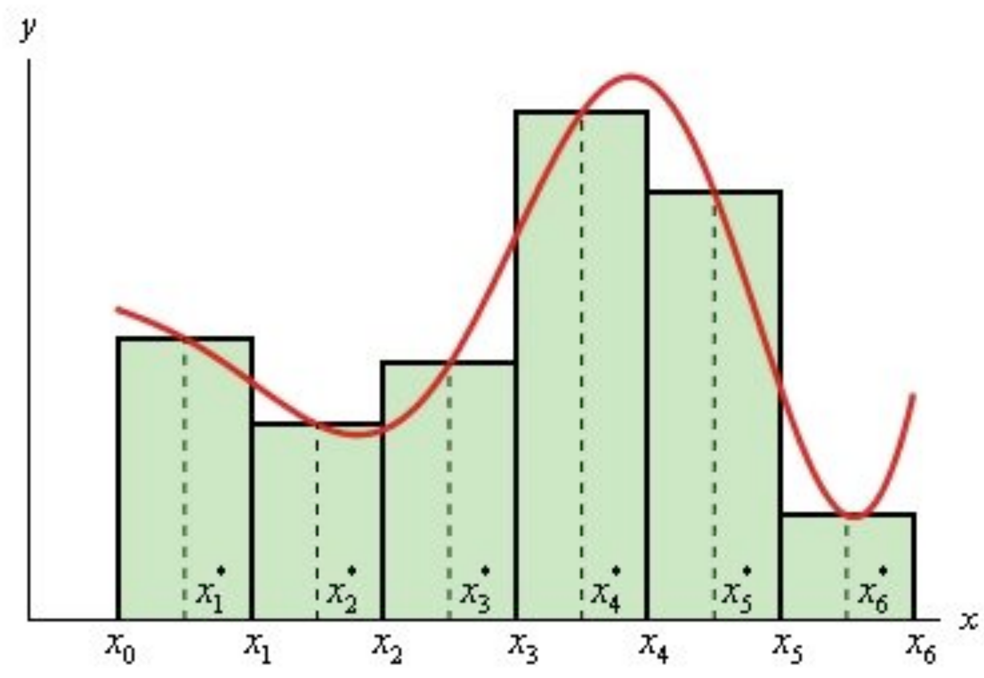
Integrazione numerica

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica



Introduzione

L'integrazione numerica di una funzione $f(x)$ è un modo approssimato per calcolare un integrale definito di f. Si utilizza nelle applicazioni sperimentali o nell'analisi statistica, in particolare quando:

- la funzione è nota soltanto per punti, ossia è assegnata mediante una tabella oppure attraverso una rilevazione sperimentale o statistica;
- è nota l'espressione analitica della funzione, ma essa non è integrabile con le regole di integrazione;
- l'applicazione delle regole di integrazione conduce a calcoli laboriosi.

Per semplicità, noi considereremo l'integrazione numerica soltanto nel caso di una funzione continua e derivabile in un intervallo limitato e chiuso.
La continuità è condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale

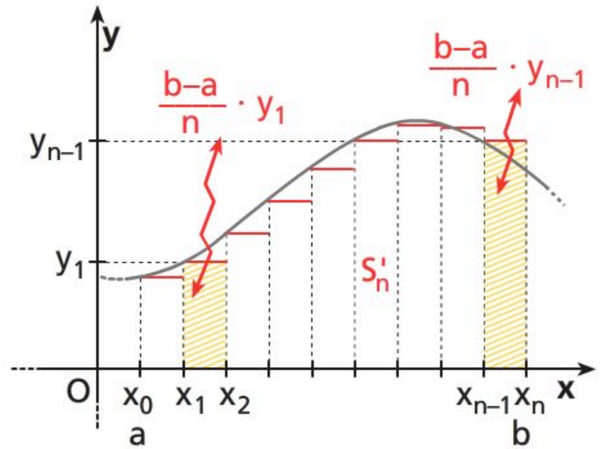
$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

se inoltre la f è derivabile più volte, è possibile anche la stima dell'errore commesso.

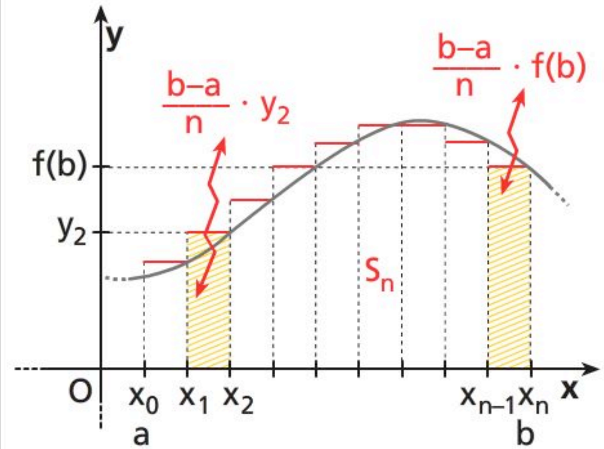
Il metodo dei rettangoli

x	y
$x_0=a$	$f(a)$
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
...	...
...	...
...	...
x_{n-2}	y_{n-2}
x_{n-1}	y_{n-1}
$x_n=b$	$f(b)$

a. Nella tabella sono riportati i valori della funzione che hanno per ascissa un punto della suddivisione.



b. I rettangoli hanno come misura dell'altezza l'ordinata della funzione calcolata nel primo estremo degli intervalli di suddivisione.



c. I rettangoli hanno come misura dell'altezza il valore della funzione calcolata nel secondo estremo degli intervalli di suddivisione.

Consideriamo una funzione f continua nell'intervallo $[a; b]$ e, per semplicità, sia $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$. Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti di uguale ampiezza $h = \dfrac{b-a}{n}$, mediante i punti di suddivisione:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_n = a + nh = b.$$

Ai punti di suddivisione corrispondono i seguenti valori della funzione:

$$y_0 = f(a),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(b)$$

Sui segmenti di suddivisione disegniamo i rettangoli che hanno ciascuno:

- per base un intervallo di suddivisione;
- per altezza il segmento determinato dal valore di f calcolato nel primo estremo di tale intervallo oppure nel secondo.

Otteniamo così due figure costituite da n rettangoli la cui base è $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Se prendiamo sempre il primo estremo degli intervalli di suddivisione, l'area del plurirettangolo, cioè la somma delle aree dei rettangoli, è data dalla formula:

$$S'_n = \frac{b-a}{n}[f(a) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Se invece prendiamo sempre il secondo estremo degli intervalli, l'area del plurirettangolo è:

$$S_n = \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + f(b)] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

FORMULE DEI RETTANGOLI

Queste somme costituiscono due valori approssimati dell'integrale della funzione

- Se la funzione ammette derivata prima continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità:

$$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M,$$ dove M è il massimo di $|f'(x)|$ in $[a; b]$.

ESEMPIO

Con le formule dei rettangoli calcoliamo due valori approssimati dell'integrale $\int_2^3 x^3\,dx$, valutiamo l'errore commesso e confrontiamo i risultati ottenuti con quello esatto.

Dividiamo l'intervallo in 10 intervalli di ampiezza $h = \frac{3-2}{10} = 0{,}1$ e quindi scriviamo i valori della funzione in una tabella.

x_i	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$y_i = x_i^3$	8	9,261	10,648	12,167	13,824	15,625	17,576	19,683	21,952	24,389	27

Ora calcoliamo le due somme:

$$S'_n = 0{,}1 \cdot (8 + 9{,}261 + 10{,}648 + \ldots + 24{,}389) = 15{,}3125;$$

$$S_n = 0{,}1 \cdot (9{,}261 + 10{,}648 + \ldots + 24{,}389 + 27) = 17{,}2125.$$

I due valori approssimati dell'integrale sono pertanto:

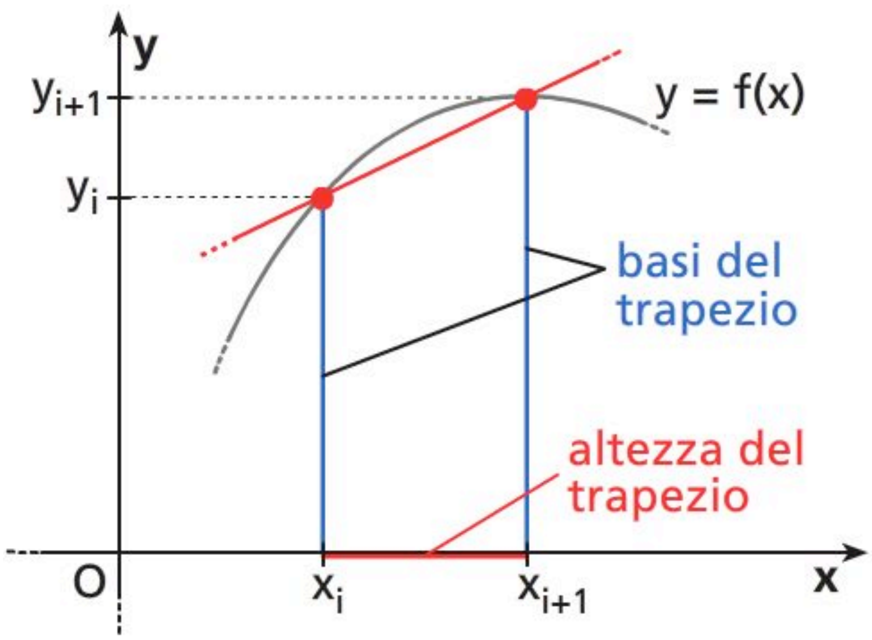
$$\int_2^3 x^3\,dx \simeq 15,3125 \quad \text{e} \quad \int_2^3 x^3\,dx \simeq 17,2125.$$

Osserviamo che la derivata $f'(x) = 3x^2$ è continua nell'intervallo $[2; 3]$ e il suo massimo è $M = \max_{[2;\,3]}\left| 3x^2 \right| = 27$; possiamo quindi valutare l'errore commesso mediante la relazione:

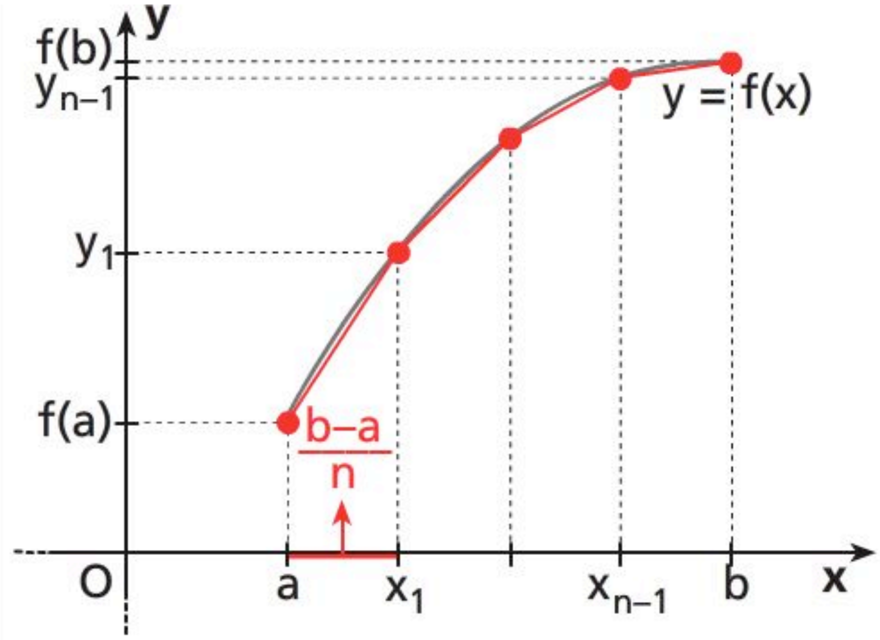
$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(3-2)^2}{2 \cdot 10} \cdot 27 = 1,35.$$

I due risultati hanno, pertanto, un'approssimazione minore o uguale a 1,35. Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo 16,25. Le differenze fra questo valore e quelli approssimati sono $\left| S'_n - 16,25 \right| = 0,9375$ e $\left| S_n - 16,25 \right| = 0,9625$, quindi entrambe minori di 1,35.

Il metodo dei trapezi



a. Il trapezio che si ottiene per ogni intervallo ha come misure delle basi le ordinate corrispondenti al primo e secondo estremo e come misura dell'altezza l'ampiezza dell'intervallo.



b. Il trapezoide è costituito dalla somma di *n* trapezi rettangoli aventi altezza uguale a:

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Consideriamo una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$ e dividiamo $[a; b]$ in n parti di uguale ampiezza, $h = \dfrac{b-a}{n}$, mediante i punti di suddivisione $x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ \dots,\ x_n = a + nh = b.$

Il metodo dei trapezi consiste nel sostituire, in ogni intervallo di suddivisione, il grafico della funzione $y = f(x)$ con la corda sottesa (cioè il segmento che congiunge i punti del grafico di $f(x)$ corrispondenti al primo e al secondo estremo dell'intervallo). Otteniamo così n trapezi rettangoli aventi tutti uguale altezza h.

FORMULA DEI TRAPEZI

La somma delle aree dei trapezi costituisce un valore approssimato dell'integrale della funzione.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h \cdot \frac{f(a) + y_1}{2} + h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h \cdot \frac{y_{n-1} + f(b)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right].$$

- Se la funzione ammette derivata seconda continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità:

$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M$, dove M è il massimo di $|f''(x)|$ in $[a; b]$.

ESEMPIO

Consideriamo nuovamente l'integrale dell'esempio precedente. Con la formula dei trapezi ripetiamo il calcolo approssimato dell'integrale $\int_2^3 x^3\,dx$, valutando l'errore commesso e confrontando il risultato ottenuto con quello esatto.

Dividiamo l'intervallo ancora in 10 parti uguali e utilizziamo la precedente tabella per calcolare la somma delle aree dei trapezi. Otteniamo così il seguente valore approssimato dell'integrale:

$$\int_2^3 x^3\,dx \simeq \frac{3-2}{10}\left(\frac{8+27}{2} + 9{,}261 + \ldots + 24{,}389\right) = 16{,}2625.$$

Osserviamo che la derivata seconda $f''(x) = 6x$ è continua nell'intervallo $[2; 3]$ e il suo massimo è $M = \max_{[2;3]} |6x| = 18$; possiamo quindi valutare l'errore commesso mediante la relazione:

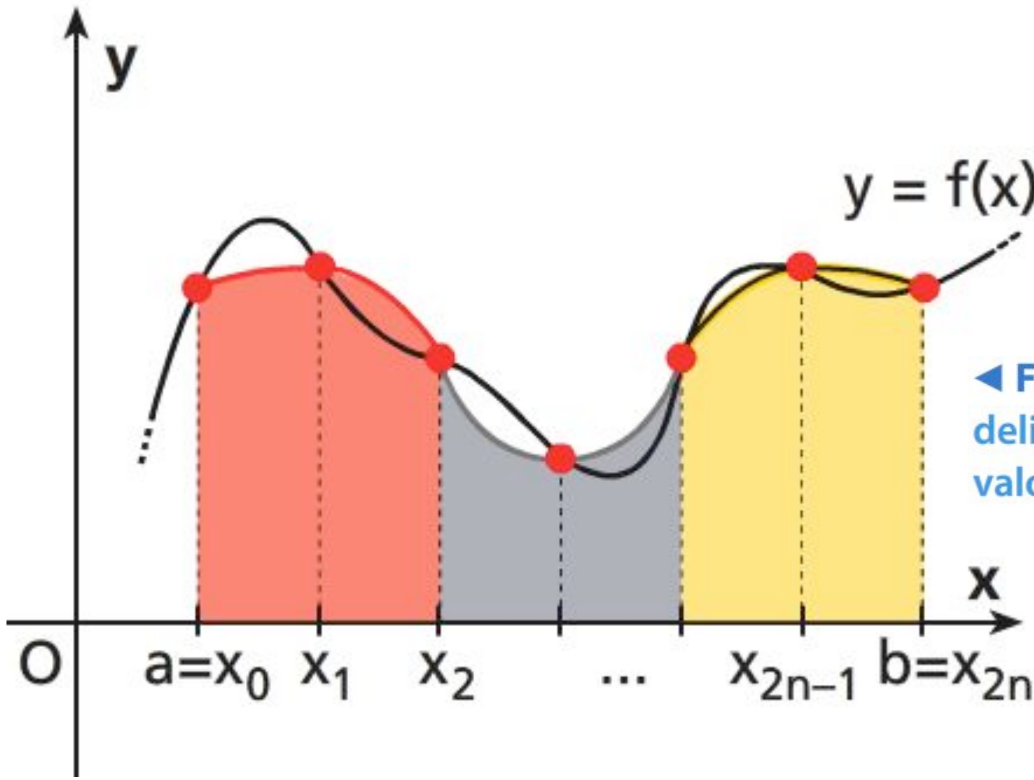
$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(3-2)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 18 = 0,015.$$

Il risultato ottenuto ha dunque un'approssimazione minore o uguale a 0,015. Infatti, confrontandolo con il valore esatto dell'integrale, abbiamo:

$$|16,25 - 16,2625| = 0,0125 < 0,015.$$

Notiamo, infine, che con la formula dei trapezi abbiamo ottenuto un risultato più preciso rispetto a quello ottenuto con il metodo dei rettangoli.

Il metodo delle parabole



◀ **Figura 24** La somma delle aree dei trapezoidi delimitati dagli archi di parabola rappresenta un valore approssimato dell'integrale della funzione.

Il **metodo delle parabole** consiste nell'approssimare il grafico della funzione con archi di parabola opportunamente scelti. Ciascun arco è individuato da tre punti del grafico e il valore approssimato dell'integrale si determina calcolando la somma delle aree dei trapezoidi delimitati da tali archi.

TEOREMA

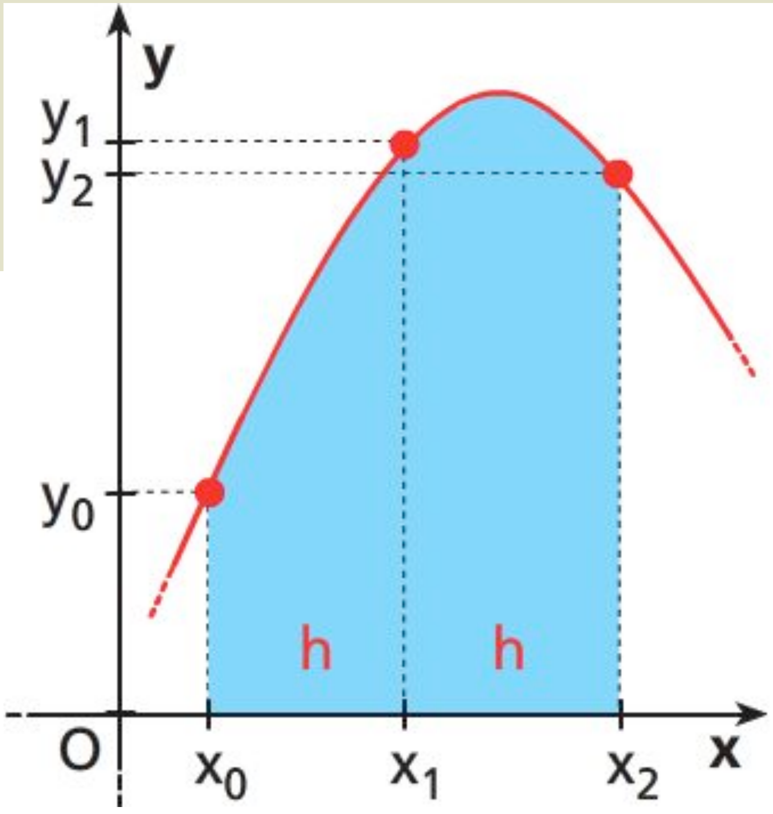
L'area S di un trapezoide avente come base l'intervallo $[x_0; x_2]$ e delimitato dal grafico di una parabola passante per i punti $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, dove

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

è il punto medio dell'intervallo, è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

dove $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.



Per applicare il metodo delle parabole procediamo nel modo seguente:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in $2n$ parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{2n}$, mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{2n} = b$;
- calcoliamo i corrispondenti valori della funzione: $f(a), y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, f(b)$;
- consideriamo gli intervalli $[a; x_2], [x_2; x_4], \ldots, [x_{2n-4}; x_{2n-2}], [x_{2n-2}; b]$ e i corrispondenti centri $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-3}, x_{2n-1}$;
- applichiamo a ciascuno di essi la formula del teorema precedente, e calcoliamo così le aree delimitate dagli archi di parabola passanti per ciascuna terna di punti $(x_i; y_i), (x_{i+1}; y_{i+1}), (x_{i+2}; y_{i+2})$:

$$\frac{h}{3} \cdot [f(a) + 4y_1 + y_2],$$

$$\frac{h}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\ldots,$$

$$\frac{h}{3} \cdot [y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + f(b)];$$

Il numero delle parti in cui si suddivide l'intervallo deve essere pari, perché si utilizza una parabola ogni due intervalli.

FORMULA DI CAVALIERI-SIMPSON

La somma delle aree precedenti costituisce un valore approssimato dell'integrale della funzione.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} \cdot [f(a) + f(b) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + $$
$$+ 4 \cdot (y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})].$$

- Se la funzione ammette derivata quarta continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità:

$$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M,$$ dove M è il massimo di $\left| f^{(4)}(x) \right|$ in $[a; b]$.

- È possibile valutare l'errore commesso senza calcolare derivate, utilizzando il **metodo di Runge** o del **raddoppiamento del passo**, che vedremo negli esercizi.

ESEMPIO

Consideriamo ancora l'integrale $\int_2^3 x^3 dx$. Con la formula di Cavalieri-Simpson determiniamo un valore approssimato, valutiamo l'errore e confrontiamo il risultato ottenuto con quello esatto. Utilizziamo sempre la suddivisione in 10 parti uguali e riorganizziamo la tabella:

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	$f(b)$
8	9,261	10,648	12,167	13,824	15,625	17,576	19,683	21,952	24,389	27

Ora applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_2^3 x^3\, dx \simeq \frac{3-2}{3\cdot 10}\cdot[8+27+2\cdot(10{,}648+\ldots+21{,}952)+4\cdot(9{,}261+\ldots+$$

$$+24{,}389)] = 16{,}25.$$

Osserviamo che la derivata quarta $f^{(4)}(x)$ è nulla per ogni $x \in [2; 3]$ e quindi anche l'errore commesso è nullo. Il risultato ottenuto, infatti, coincide con il valore esatto dell'integrale trovato in precedenza. La formula di Cavalieri-Simpson ha dunque permesso di ottenere la migliore precisione.

Esercizi

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo due valori approssimati dell'integrale $\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx$ utilizzando il metodo dei rettangoli, valutiamo l'errore commesso e confrontiamo i risultati ottenuti con l'integrale esatto.

Dividiamo l'intervallo in 10 intervalli di ampiezza $h = \frac{2-0}{10} = 0,2$. Compiliamo una tabella con i punti di suddivisione dell'intervallo [0; 2] e i corrispondenti valori della funzione integranda.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\sqrt{1+x}$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414	1,483	1,549	1,612	1,673	1,732

Ora calcoliamo le somme:

$$S'_n = 0,2 \cdot (1 + 1,095 + 1,183 + \ldots + 1,612 + 1,673) = 2,7232;$$

$$S_n = 0,2 \cdot (1,095 + 1,183 + \ldots + 1,673 + 1,732) = 2,8696.$$

I valori approssimati dell'integrale sono:

$$\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx \simeq 2{,}7232 \qquad \text{e} \qquad \int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx \simeq 2{,}8696.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata prima continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

$$E_n \leq \varepsilon_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } \left| f'(x) \right| \text{ in } [a; b].$$

Poiché la derivata $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ è continua nell'intervallo $[0; 2]$ e $M = \max\limits_{[0;\,2]} \left| \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \right| = f'(0) =$ $= \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = 0{,}5$, possiamo valutare l'errore commesso:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(2-0)^2}{2 \cdot 10} \cdot 0{,}5 = 0{,}1.$$

I due risultati hanno pertanto un'approssimazione minore o uguale a 0,1.
Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo:

$$\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} \right]_0^2 \simeq 2{,}797.$$

Le differenze fra questo valore e quelli approssimati sono $\left| S_n' - 2{,}797 \right| = 0{,}0738$ e $\left| S_n - 2{,}797 \right| = 0{,}0726$, entrambe minori di 0,1.

ESERCIZIO GUIDA

Utilizzando la formula dei trapezi, calcoliamo un valore approssimato di $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx$, valutiamo l'errore commesso e confrontiamo il risultato con quello del calcolo esatto.

Dividiamo l'intervallo in 10 intervalli di ampiezza $h = \frac{2-0}{10} = 0,2$. Compiliamo una tabella con i punti di suddivisione dell'intervallo [0; 2] e i corrispondenti valori della funzione integranda.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\frac{1}{1+x^2}$	1	0,962	0,862	0,735	0,610	0,500	0,410	0,338	0,281	0,236	0,200

Applichiamo la formula dei trapezi:

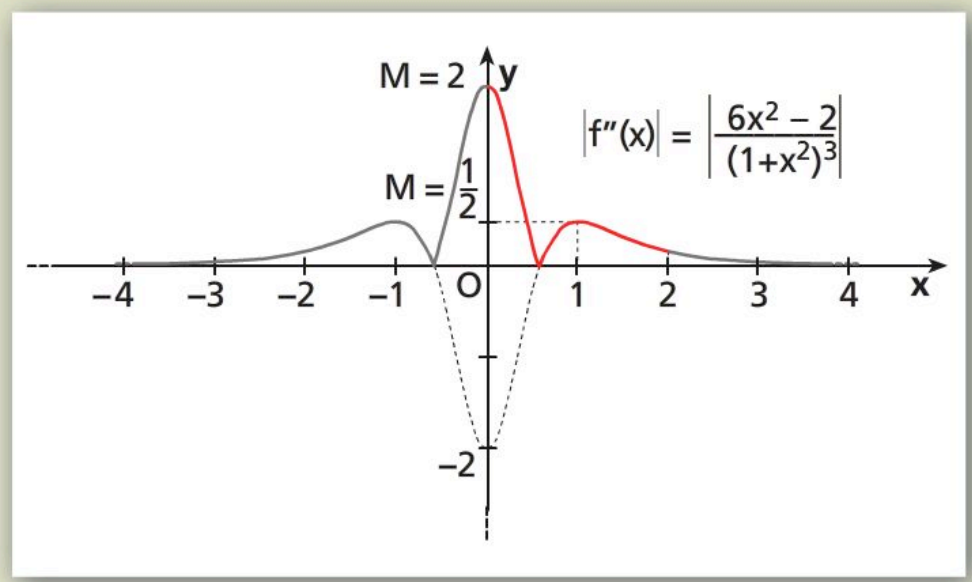
$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx \simeq \frac{2-0}{10}\left(\frac{1+0,2}{2} + 0,962 + 0,862 + \ldots + 0,281 + 0,236\right) \simeq 1{,}1068.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata seconda continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

$$E_n \leq \varepsilon_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } \left| f''(x) \right| \text{ in } [a; b].$$

Poiché la derivata seconda $f''(x) = \dfrac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$ è continua nell'intervallo [0; 2] e, dal grafico, deduciamo che è

$$M = \max_{[0;\,2]} \left| f''(x) \right| = \left| f''(0) \right| = 2,$$



possiamo valutare l'errore:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(2-0)^3}{12 \cdot 100} \cdot 2 = 0{,}01333\ldots = 0{,}01\bar{3}.$$

Il risultato dell'integrale ha pertanto un'approssimazione minore o uguale a $0{,}01\bar{3}$.

Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo :

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^2 = \operatorname{arctg} 2 \simeq 1{,}107.$$

La differenza fra questo valore e quello approssimato è $|1{,}1068 - 1{,}107| = 0{,}0002$, minore di $0{,}01\bar{3}$.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo un valore approssimato di $\int_1^2 (x^4 + 1)\, dx$, utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson. Valutiamo l'errore e confrontiamo il risultato ottenuto con l'integrale esatto.

Utilizziamo la suddivisione in $2n = 10$ parti uguali e organizziamo la tabella:

$$h = \frac{2-1}{10} = 0,1.$$

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	$f(b)$
2	2,46	3,07	3,86	4,84	6,06	7,55	9,35	11,50	14,03	17

Ora applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_1^2 (x^4+1)\,dx \simeq \frac{2-1}{30}[2+17+2(3{,}07+\ldots+11{,}50)+4(2{,}46+\ldots+14{,}03)] \simeq 7{,}20.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata quarta continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

$$E_n \leq \varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } \left| f^{(4)}(x) \right| \text{ in } [a;b].$$

$f^{(4)}(x) = 24$ per ogni $x \in [1;2]$, possiamo valutare l'errore:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(2-1)^5}{2880\cdot 5^4}\cdot 24 = 0{,}000013 = 1{,}3\cdot 10^{-5}.$$

Pertanto, il risultato dell'integrale ha un'approssimazione minore o uguale a $1{,}3 \cdot 10^{-5}$. Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo:

$$\int_1^2 (x^4+1)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}+x\right]_1^2 = \frac{32}{5}+2-\frac{1}{5}-1 = \frac{36}{5} = 7{,}20.$$

Il risultato approssimato coincide con il valore esatto dell'integrale: la formula di Cavalieri-Simpson ha permesso di ottenere un'ottima precisione.

ESERCIZIO GUIDA

Consideriamo l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$. Per valutare l'errore commesso con la formula di Cavalieri-Simpson, utilizziamo il metodo di Runge.

Suddividiamo l'intervallo [0; 1] in 8 parti e compiliamo la tabella di calcolo.

x_i	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
y_i	1	0,87671	0,7619	0,65979	0,57143	0,49612	0,43243	0,3787	0,33333

Applicando la formula di Cavalieri-Simpson, otteniamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \simeq 0,604588889 = N_1.$$

Per valutare l'errore utilizziamo il metodo di Runge, che non richiede il calcolo di derivate.
Dimezziamo il numero di intervalli raddoppiando il passo, ossia l'ampiezza di ciascun intervallo. La tabella risulta così modificata:

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	0,7619	0,57143	0,43243	0,33333

Applicando nuovamente la formula di Cavalieri-Simpson, otteniamo il seguente risultato:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \simeq 0{,}604459444 = N_2.$$

L'approssimazione dei due risultati è, ovviamente, diversa. Si può dimostrare che l'errore di N_1 è valutabile mediante la seguente formula:

$$E \simeq \frac{|N_1 - N_2|}{15} = \frac{|0{,}604588889 - 0{,}604459444|}{15} \simeq 0{,}000009.$$