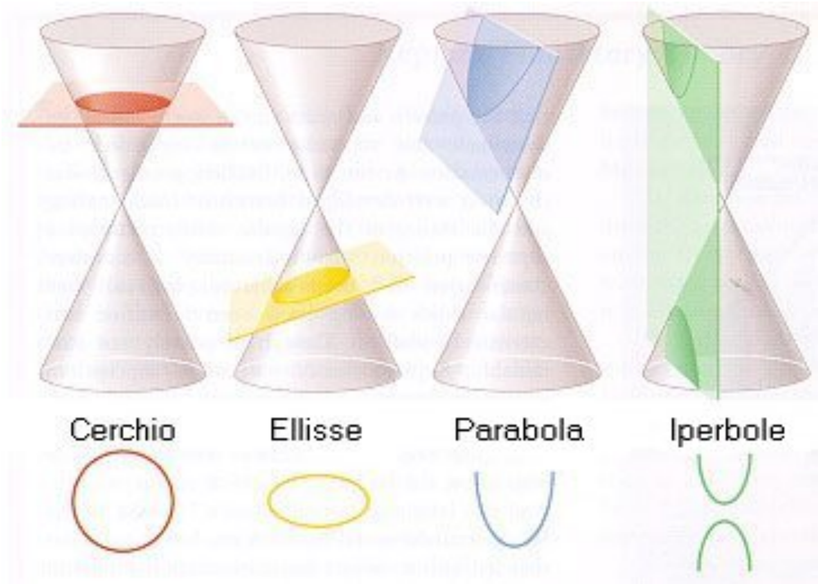
Geometria Analitica

L'IPERBOLE

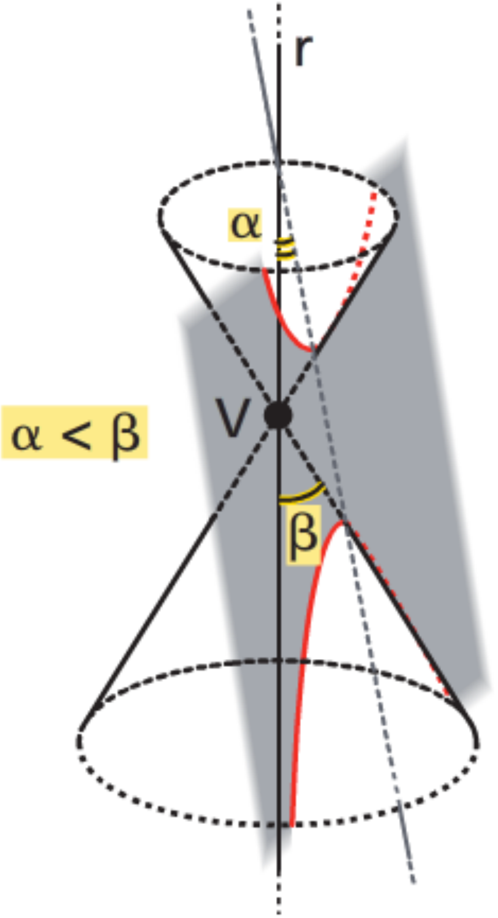
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica



L'iperbole fa parte di un insieme di curve (circonferenza, parabola, ellisse) chiamate *coniche*, perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano.

Consideriamo un cono di asse r con angolo al vertice 2β. Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo $\alpha<\beta$.

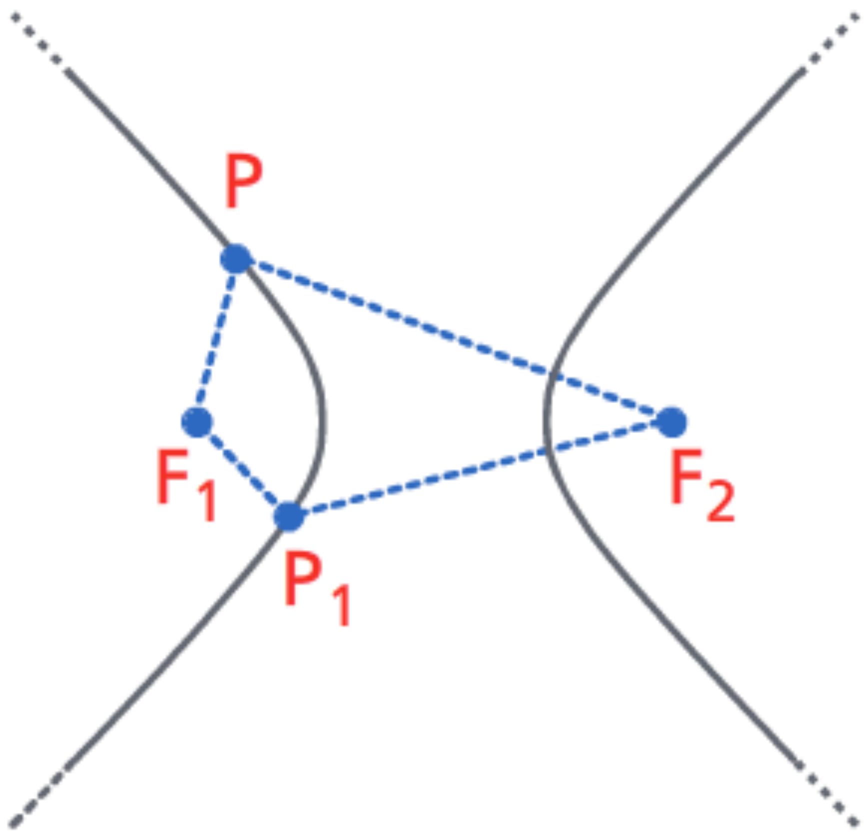


La figura che si ottiene dall'intersezione è *un'iperbole*.

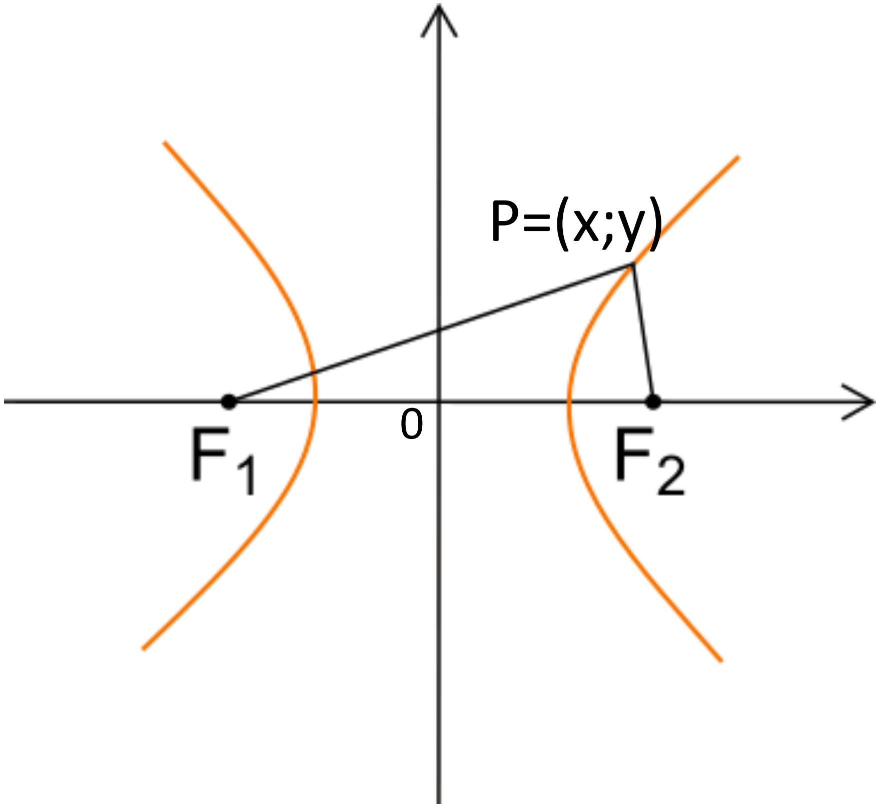
DEFINIZIONE

Assegniamo nel piano due punti fissi F_1 e F_2 detti **fuochi**, si chiama *iperbole la curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la differenza delle distanze di P da F_1 e F_2:*

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \text{costante} = 2a$$

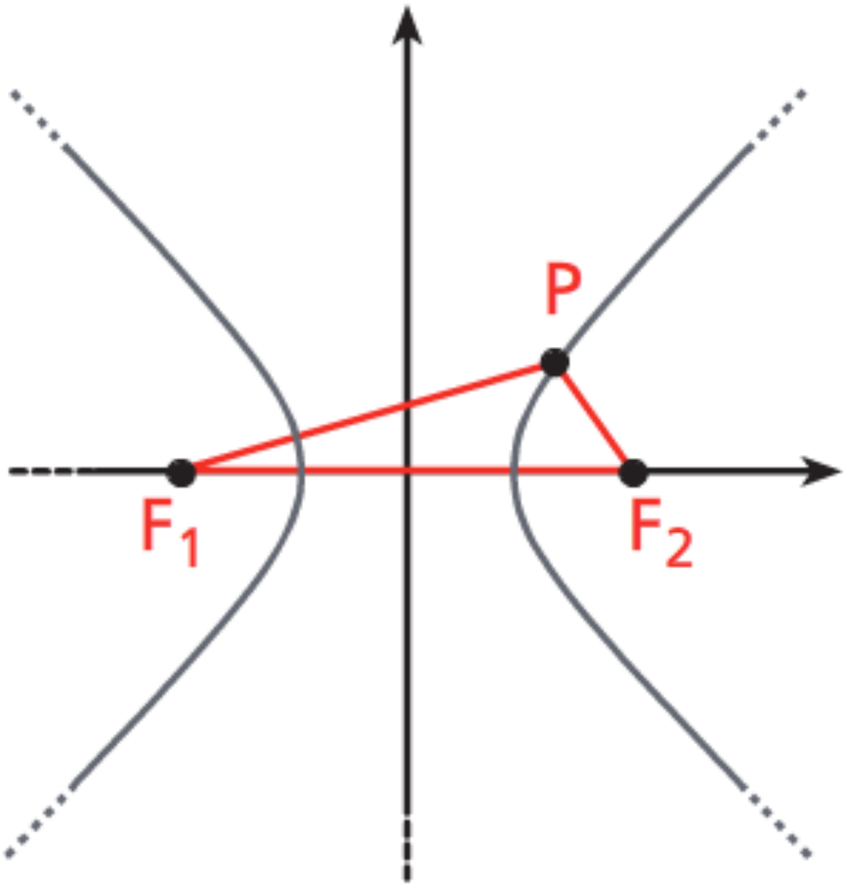


$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{P_1F_2} - \overline{P_1F_1}$$



- distanza focale = 2c
- differenza costante delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi = 2a
- centro iperbole=punto medio di F_1F_2

$$\boxed{\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \text{costante} = 2a}$$



In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due. Nel triangolo PF_1F_2 si ha che:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

Il terzo lato è il segmento F_1F_2 di lunghezza 2c, per cui:

$$\boxed{2a < 2c \;\Rightarrow\; a < c}$$

Determiniamo l'equazione dell'iperbole con il centro nell'origine degli assi cartesiani e l'asse x passante per i fuochi.

Fissiamo i fuochi nei punti $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$.

Applichiamo la definizione di iperbole, usando la distanza tra due punti:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \rightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Effettuando calcoli analoghi a quelli svolti per l'ellisse, e dopo aver posto:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

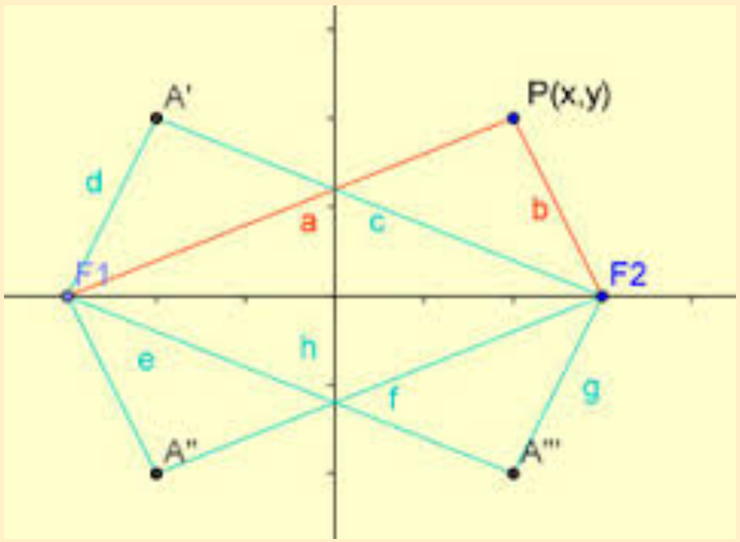
si ottiene:

EQUAZIONE CANONICA
DELL'IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{equivalente a}} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Simmetrie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} \frac{(-x_1)^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \rightarrow simmetria\, rispetto\, all'asse\, y \\ \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{(-y_1)^2}{b^2}=1 \rightarrow simmetria\, rispetto\, all'asse\, x \\ \frac{(-x_1)^2}{a^2}-\frac{(-y_1)^2}{b^2}=1 \rightarrow simmetria\, rispetto\, all'origine \end{cases}$$



L'iperbole è simmetrica rispetto agli assi cartesiani

Intersezione con gli assi

$$Asse\, x \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x=\pm a$$

$$Asse\, y \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow impossibile$$

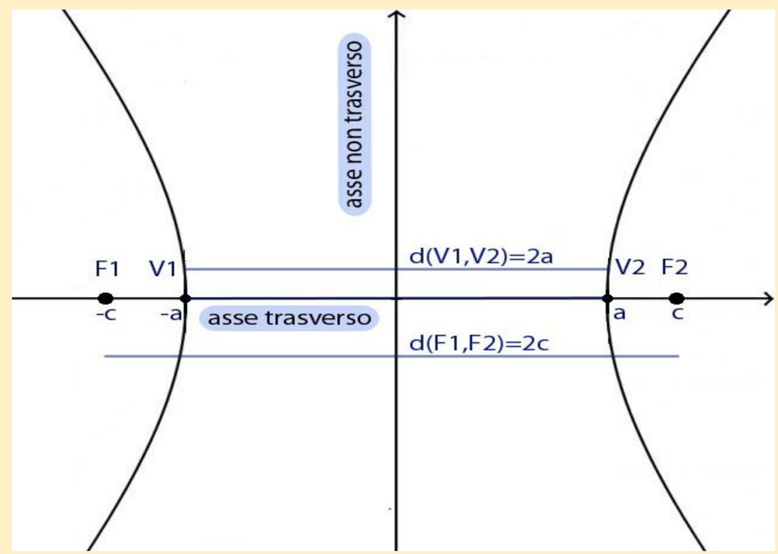
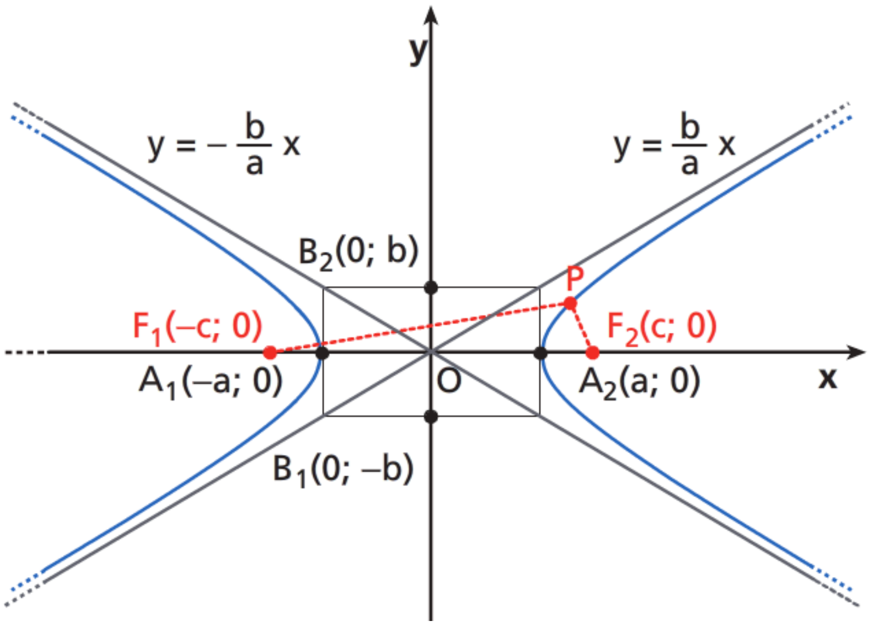


Grafico dell'iperbole

- Disegnare i vertici reali A_1 e A_2 e non reali B_1 e B_2
- Disegnare il rettangolo passante per i punti A_1 A_2 B_1 B_2



- Disegnare le rette (asintoti) sulle quali giacciono le diagonali del rettangolo:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

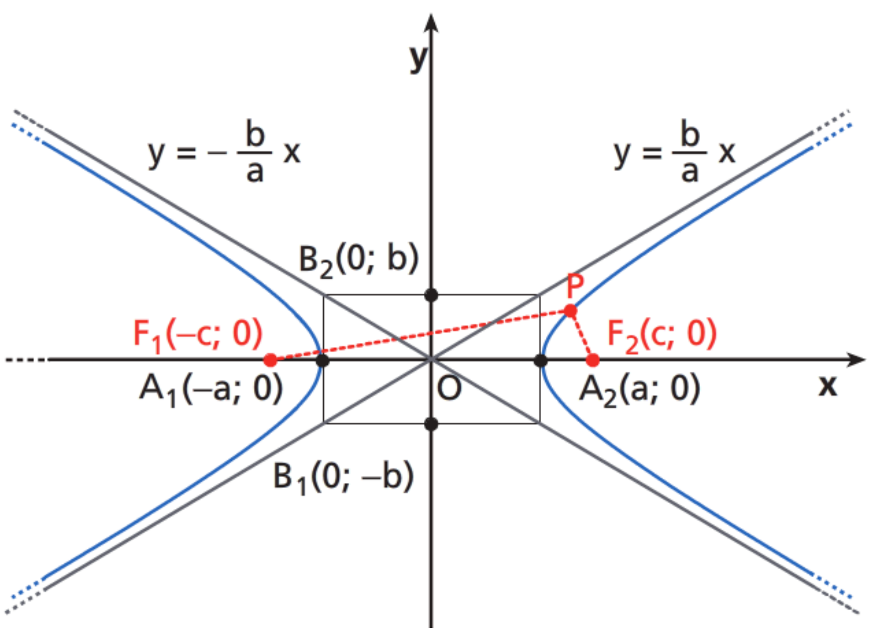
- Tutti i punti dell'iperbole, eccetto A_1 e A_2, sono esterni al rettangolo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{da\ cui} x \le -a \vee x \ge a$$

✧ I due rami dell'iperbole, sono interni agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi:

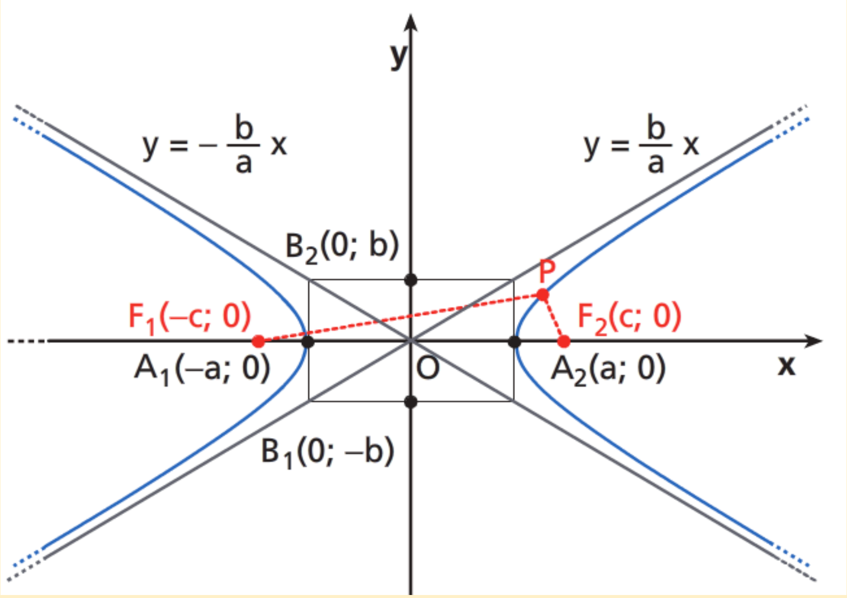
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow[\textit{soluzione se}]{\textit{ammette}} -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$$

Si dice che gli asintoti intersecano la curva all'infinito.



L'iperbole non è una curva chiusa, ma è costituita da due rami distinti, chiamati rami d'iperbole.

Coordinate fuochi



Sapendo che $b^2=c^2-a^2$, si ottiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pertanto, nota l'equazione dell'ellisse, le coordinate dei fuochi sono date da:

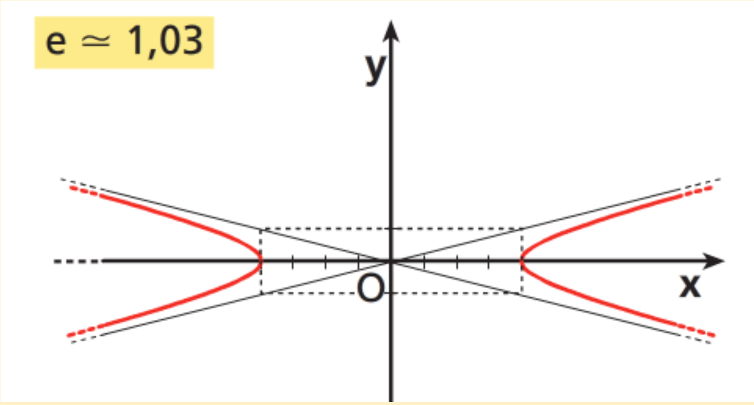
$$F_1 = (-c;0) \qquad F_2 = (c;0)$$

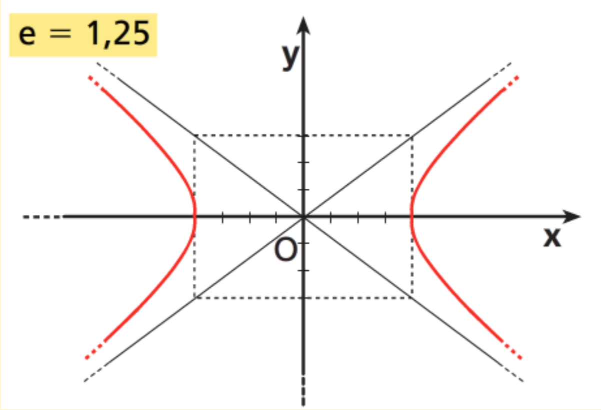
Eccentricità

E' definita come:

$$e = \frac{distanza\ \ focale}{lunghezza\ \ asse\ \ traverso} = \frac{c}{a}$$

Poiché c > a >0, si ha: e > 1





ESERCIZI

Data l'equazione $9x^2-16y^2=144$, determinare le caratteristiche dell'iperbole e poi rappresentarla graficamente.

Scriviamo l'equazione dell'iperbole nella forma canonica:

$$\boxed{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1}$$

Si tratta di un'iperbole con i fuochi sull'asse delle x. Da questa equazione ricaviamo immediatamente le coordinate dei vertici reali A_1 e A_2 e non reali B_1 e B_2:

$$\boxed{a=4 \quad b=3 \quad \Rightarrow \quad A_1=(-4;0) \quad A_2=(4;0) \quad B_1=(0;-3) \quad B_2=(0;3)}$$

Le coordinate dei fuochi sono:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \quad \Rightarrow \quad F_1 = (-5;0) \quad F_2 = (5;0)}$$

Il valore dell'eccentricità è:

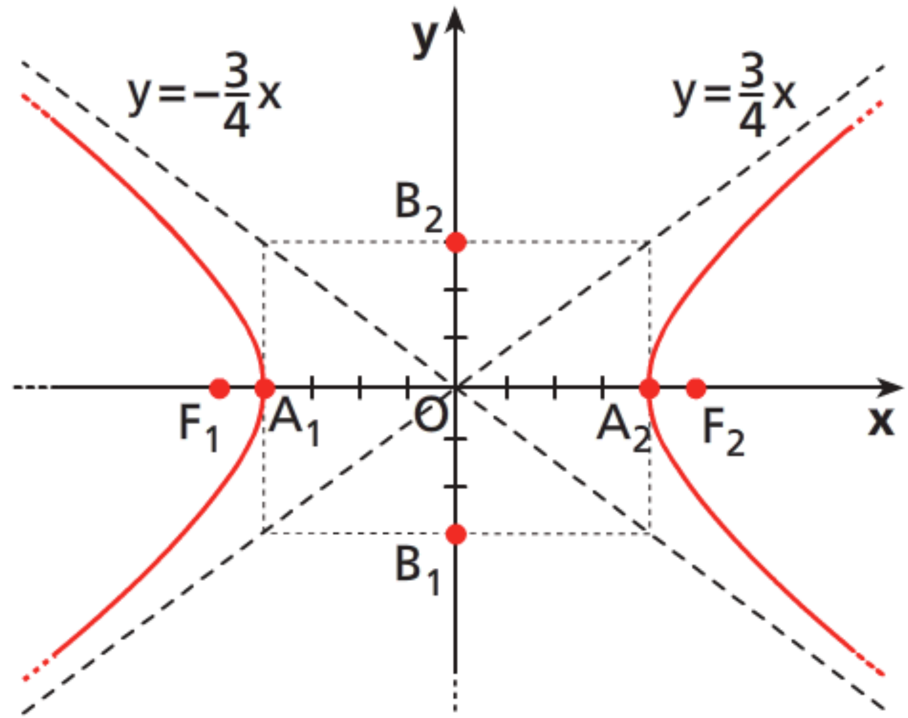
$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}}$$

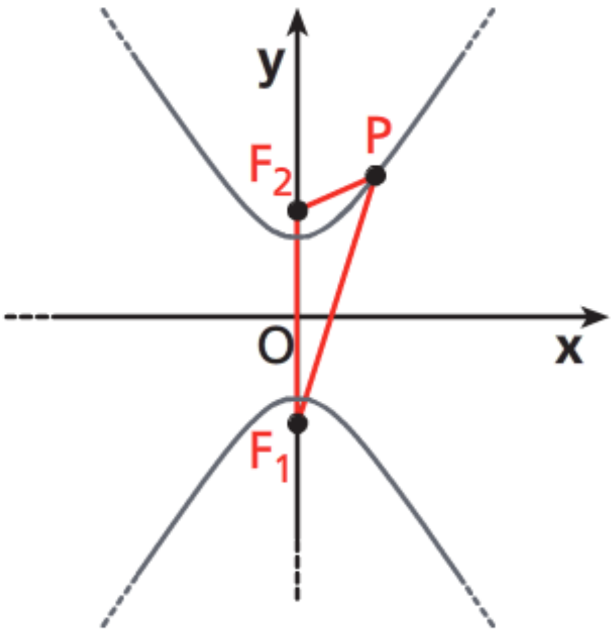
Infine, le equazioni degli asintoti sono:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x \qquad y = -\frac{3}{4}x}$$

Per disegnare bene l'iperbole:

- disegnare i quattro vertici
- disegnare il rettangolo
- disegnare gli asintoti (che sono le diagonali del rettangolo)
- disegnare i due rami dell'iperbole che sono interni agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi.





Il procedimento per determinare l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y è analogo a quello dell'iperbole con i fuochi sull'asse x.

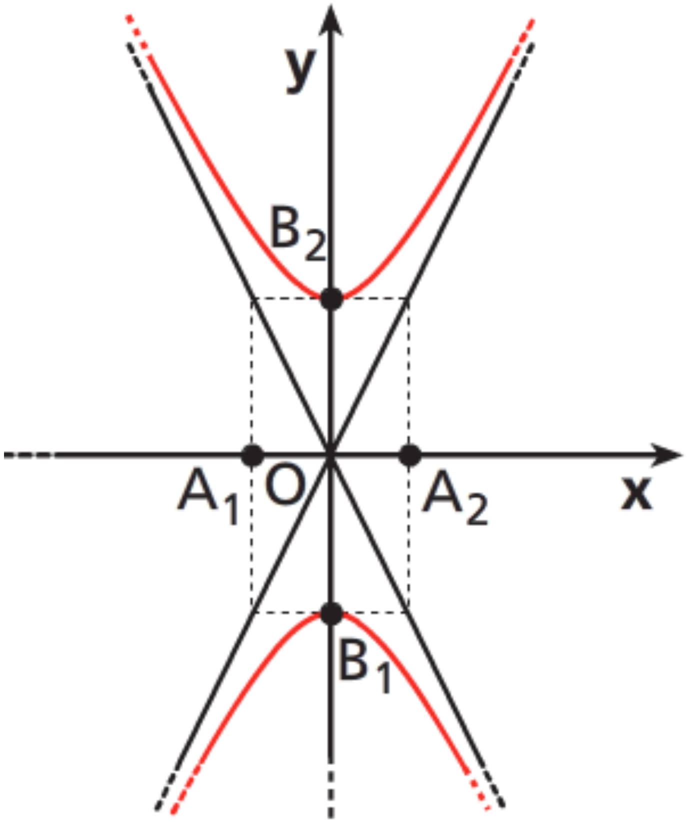
L'equazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

L'equazione è stata ottenuta dopo aver posto:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Proprietà dell'iperbole



- ✓ È simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine
- ✓ L'asse y è l'asse traverso e i vertici reali sono $B_1=(0;-b)$; $B_2=(0;b)$
- ✓ L'asse x è l'asse non traverso e i vertici non reali sono $A_1=(-a;0)$; $A_2=(a;0)$
- ✓ Gli asintoti sono le rette:

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x \qquad y=-\frac{b}{a}x}$$

- ✓ Coordinate dei fuochi:

$$\boxed{F_1=(0;-c) \qquad F_2=(0;c)}$$

- ✓ Eccentricità:

$$\boxed{e=\frac{c}{b}}$$

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=-1$, essendo $a=2$ e $b=4$,

i vertici reali sono $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$;

i vertici non reali sono

$$A_1(-2;0),\ A_2(2;0);$$

gli asintoti hanno equazioni

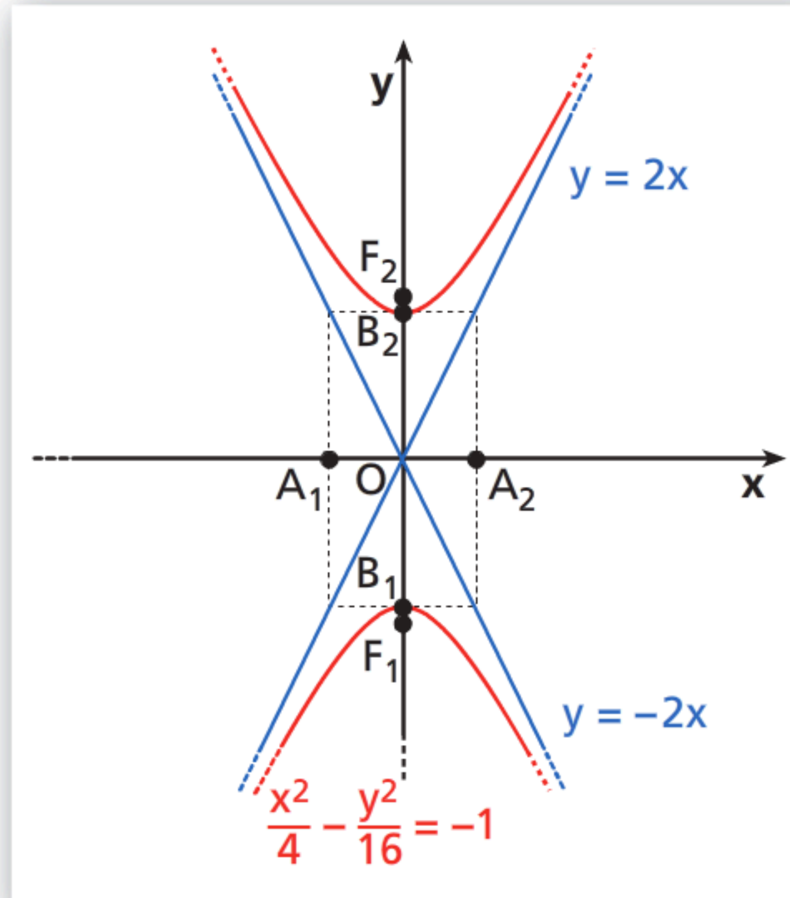
$$y=-2x \text{ e } y=2x;$$

la semidistanza focale è

$$c=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5};$$

i fuochi sono $F_1(0;-2\sqrt{5})$ e $F_2(0;2\sqrt{5})$;

l'eccentricità è $e=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Per studiare la posizione di una retta rispetto a un'iperbole, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

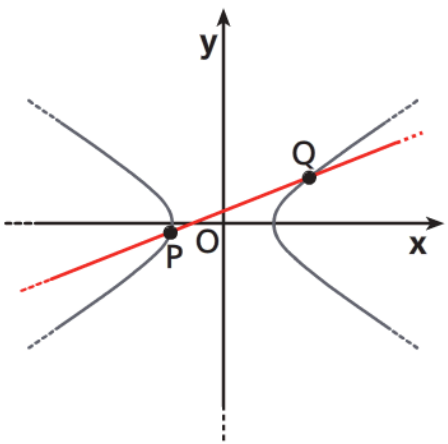
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}}$$

$\Delta > 0$
il sistema ammette due soluzioni reali

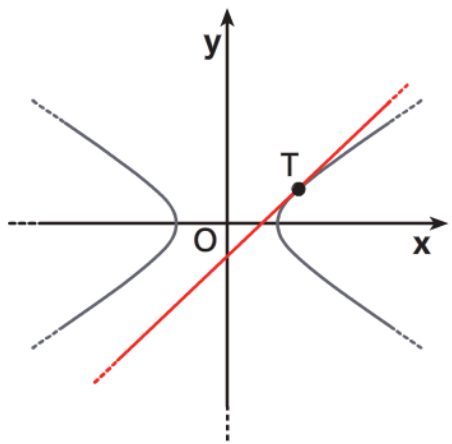
$\Delta = 0$
il sistema ammette due soluzioni reali e coincidenti

$\Delta < 0$
il sistema non ammette soluzioni

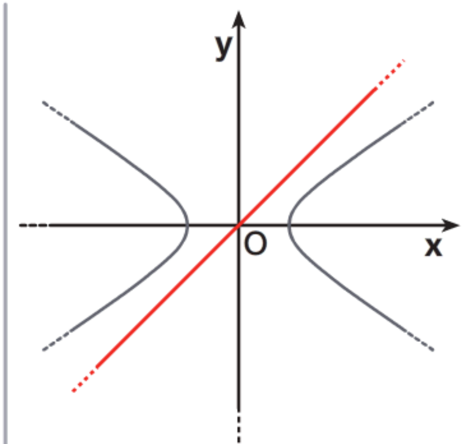
Equazione risolvente di 1° grado



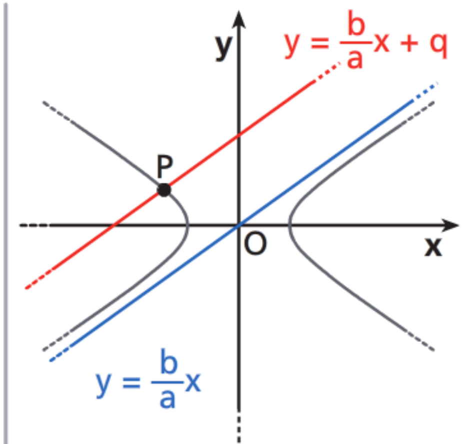
a. La retta è secante l’iperbole. I punti di intersezione sono due.



b. La retta, non parallela agli asintoti, è tangente all’iperbole. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.



c. La retta è esterna all’iperbole. Non vi sono punti di intersezione.



d. La retta è parallela a un asintoto: la retta è secante e il punto di intersezione è unico.

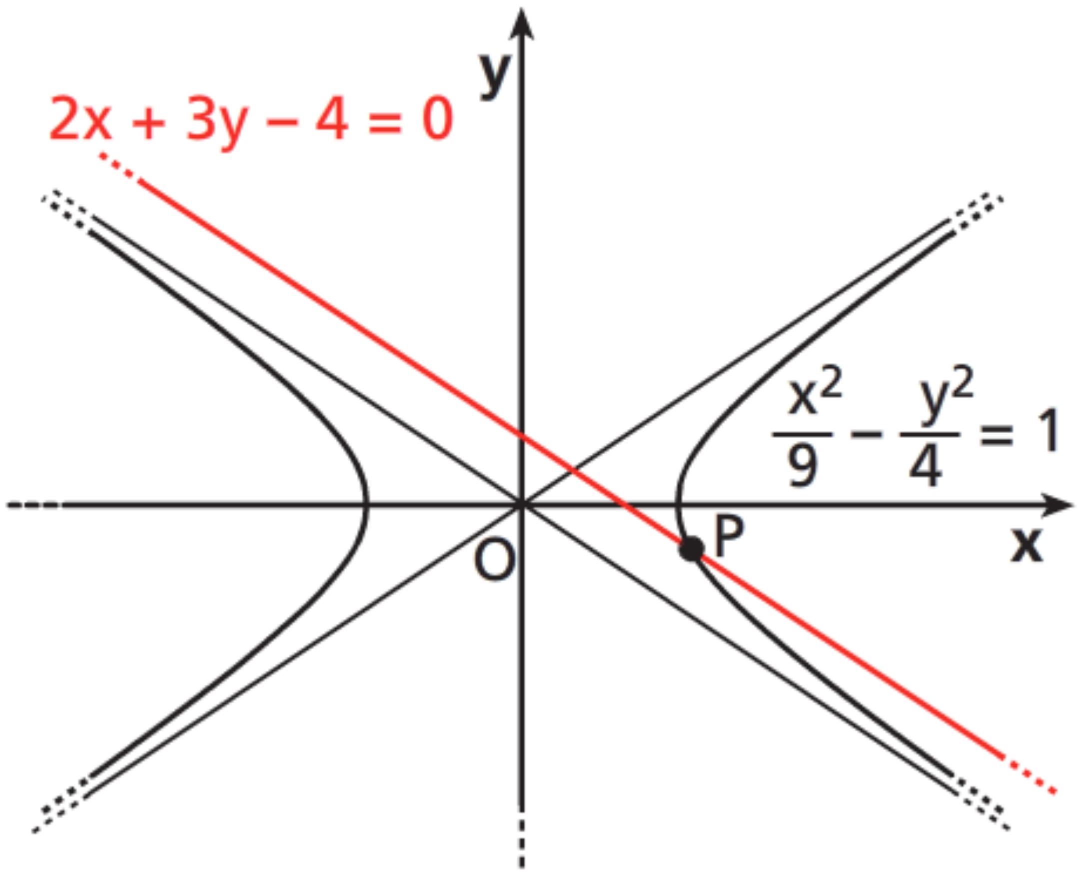
Studiare la posizione della retta 2x+3y-4=0 rispetto all'iperbole $(x^2/9)-(y^2/4)=1$

Per studiare la posizione di una retta rispetto a un'iperbole, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1 \\ 2x+3y-4=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{sostituzione}]{\text{metodo di}} \begin{cases} \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{4-3y}{2}\right)^2-\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x=\dfrac{4-3y}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{algebrici}]{\text{calcoli}} \begin{cases} 6y+5=0 \\ x=\dfrac{4-3y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{6} \\ x=\dfrac{13}{4} \end{cases}$$

Poiché l'equazione risolvente (la prima del sistema) è di 1° grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto P=(13/4;-5/6).



Metodo generale

valido per tutte le coniche, per trovare le equazioni delle rette tangenti all'iperbole condotte da un punto $P=(x_0;y_0)$

METODO DEL DISCRIMINANTE NULLO $\Delta=0$

1. Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P=(x_0;y_0)$:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

2. Si scrive il sistema formato dalle equazioni dell'iperbole e del fascio:

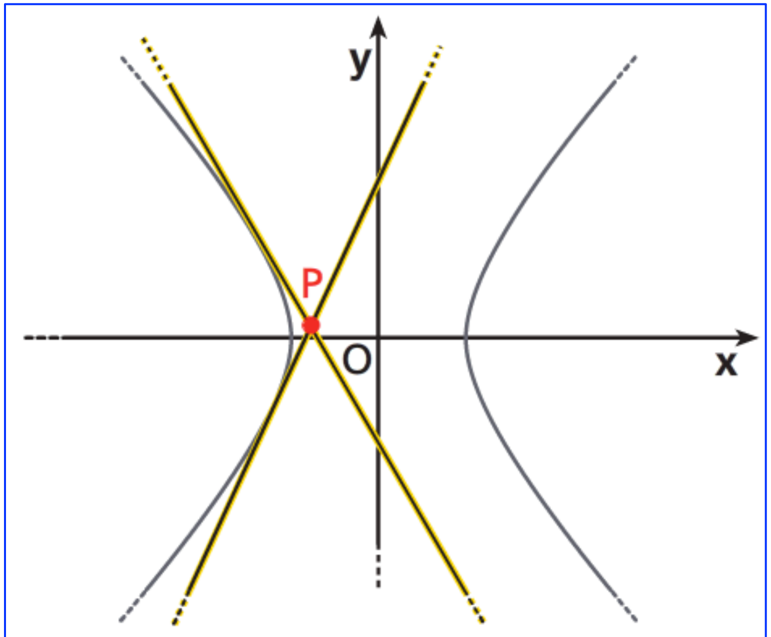
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{cases}}$$

3. Si giunge all'equazione risolvente di 2° grado nella variabile x o y.

4. Si pone la condizione di tangenza: $\Delta = 0$

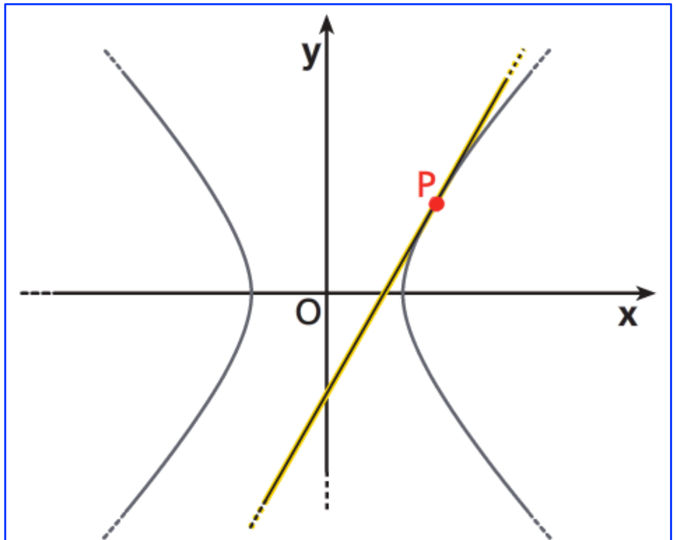
5. L'equazione $\Delta=0$ è un'equazione di 2° grado rispetto a m. Risolvendola, si ottengono i seguenti casi:

- ✓ Se $m_1 \neq m_2$ le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'iperbole (fig. a).



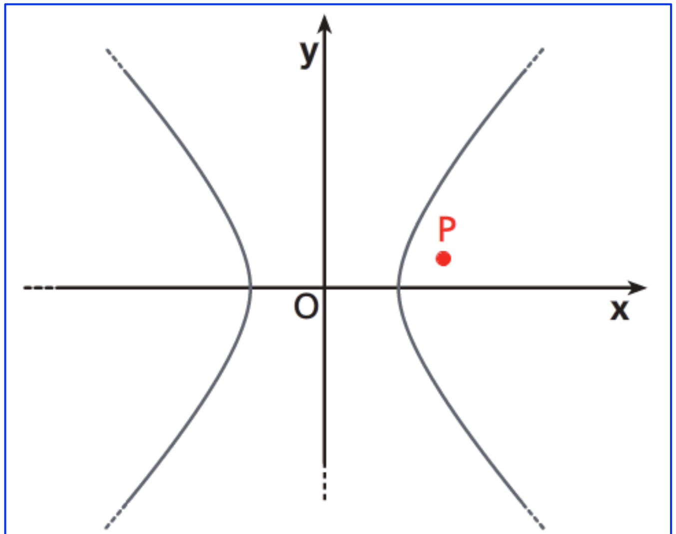
a. Esistono due rette tangenti per *P*.

✓ Se $m_1=m_2$ la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'iperbole (fig. b).



b. *P* appartiene all'iperbole: esiste una sola retta tangente per *P*.

✓ Se $(m_1,m_2)\notin\Re$ non esistono rette tangenti e il punto è interno all'iperbole (fig. c).



c. Non esistono rette tangenti per *P*.

Determinare le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2-4y^2=9$, condotte dal punto $P=(9/5;0)$

Scriviamo il sistema formato dalle equazioni dell'iperbole e del fascio:

$$\begin{cases} x^2-4y^2=9 \\ y-0=m\left(x-\dfrac{9}{5}\right) \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente (ricavando la y dalla seconda equazione e sostituendola nella prima) e riduciamola a forma normale:

$$x^2-4\left(mx-\frac{9}{5}m\right)^2=9 \xrightarrow[\text{algebrici}]{\text{passaggi}} 25(1-4m^2)x^2+360m^2x-9(36m^2+25)=0$$

Imponiamo la condizione di tangenza:

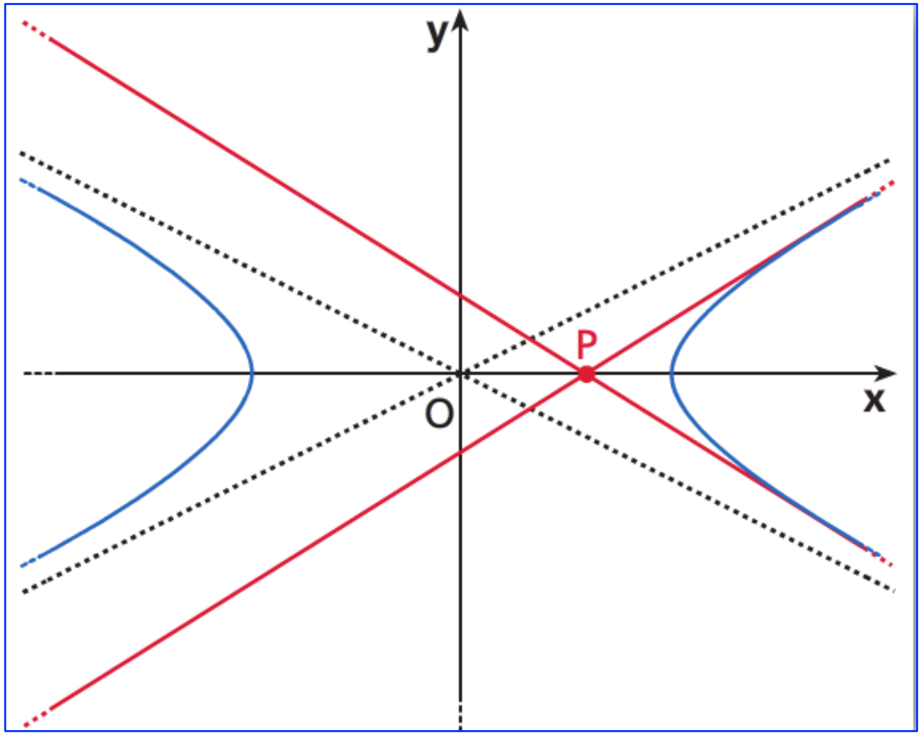
$$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; (180m^2)^2 - 25(1-4m^2)(-9)(36m^2+25) = 0$$

Dopo vari calcoli algebrici, l'equazione risolvente diventa:

$$64m^2 - 25 = 0 \;\rightarrow\; m = \pm\frac{5}{8}$$

Sostituendo i valori ottenuti di *m* nell'equazione del fascio, otteniamo le equazioni delle tangenti richieste:

$$t_1:\; y = -\frac{5}{8}x + \frac{9}{8} \qquad t_2:\; y = \frac{5}{8}x + \frac{9}{8}$$



METODO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO

Si applica solo se il punto $P=(x_0;y_0)$ appartiene all'IPERBOLE

Formula dello sdoppiamento

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad per\ l'iperbole\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=-1 \qquad per\ l'iperbole\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Determinare l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $16x^2-3y^2=1$ nel suo punto $P=(-1/2;1)$

Scriviamo l'equazione dell'iperbole nella forma canonica:

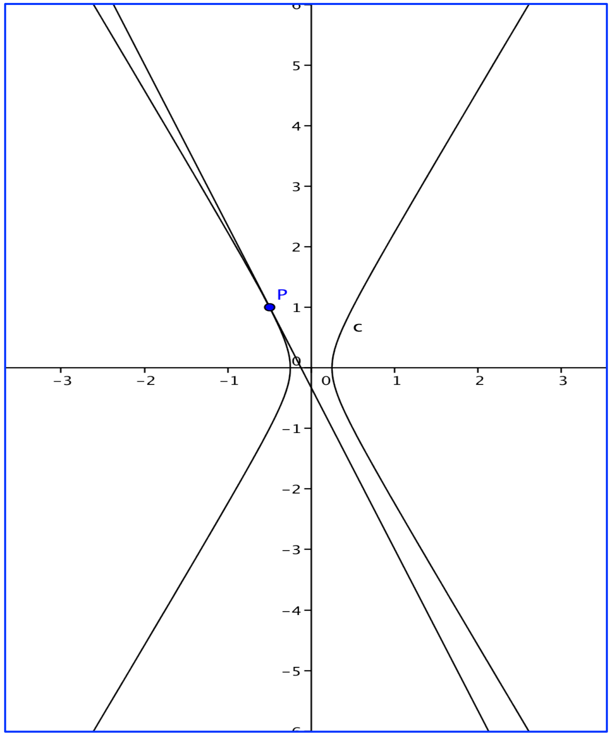
$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

dove:

$$a^2 = \frac{1}{16} \qquad b^2 = \frac{1}{3}$$

Pertanto, secondo la formula della sdoppiamento, l'equazione della retta tangente all'iperbole nel suo punto $P=(-1/2;1)$ è:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{16}} - \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1 \rightarrow 8x+3y+1=0$$



6. CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

L'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

contiene due coefficienti *a*,*b*. Quindi, determinare l'equazione dell'iperbole significa calcolare "*a* e *b*".

Pertanto il problema è: trovare due condizioni tra loro indipendenti tali da tradurle in un sistema di due equazioni nelle due incognite *a*,*b*.

Alcune condizioni possibili sono:

1. Sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice; 2. L’iperbole passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o vertice); 3. L’iperbole passa per un punto noto e si conosce l’eccentricità; 4. L’iperbole passa per due punti noti; 5. E’ nota l’eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice); 6. E’ nota l’equazione di una retta tangente all’iperbole e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell’iperbole); 7. E’ nota l’equazione di una asintoto e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell’iperbole).

Determinare l'equazione dell'iperbole avente fuoco F=(√5;0) e passante per P=(√5/2;1).

L'equazione dell'iperbole è $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$, pertanto il problema consiste nel trovare due condizioni tra loro indipendenti tali da formare un sistema di due equazioni nelle due incognite *a,b*:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ P \in iperbole \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ \dfrac{5}{4a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2=5-b^2 \\ 5b^2-4a^2=4a^2b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2=5-b^2 \\ 4b^2-11b^2-20=0 \end{cases}$$

Scegliendo b^2 come incognita, dalla seconda equazione otteniamo:

$$\boxed{b^2 = \left[\begin{array}{l} 4 \\ \\ -\dfrac{5}{4} \; non \;\; accettabile \end{array}\right.}$$

Poiché b^2 è sempre positivo, l'unica soluzione accettabile è 4, quindi:

$$\boxed{\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}}$$

L'equazione richiesta si ottiene sostituendo i valori dei parametri nell'equazione canonica dell'iperbole:

$$\boxed{x^2 - \frac{y^2}{4} = 1}$$

Nota l'equazione, possiamo determinare le altre caratteristiche dell'iperbole e disegnare il suo grafico:

intersezioni con gli assi

$$A_1 = (-1;0) \quad A_2 = (1;0)$$

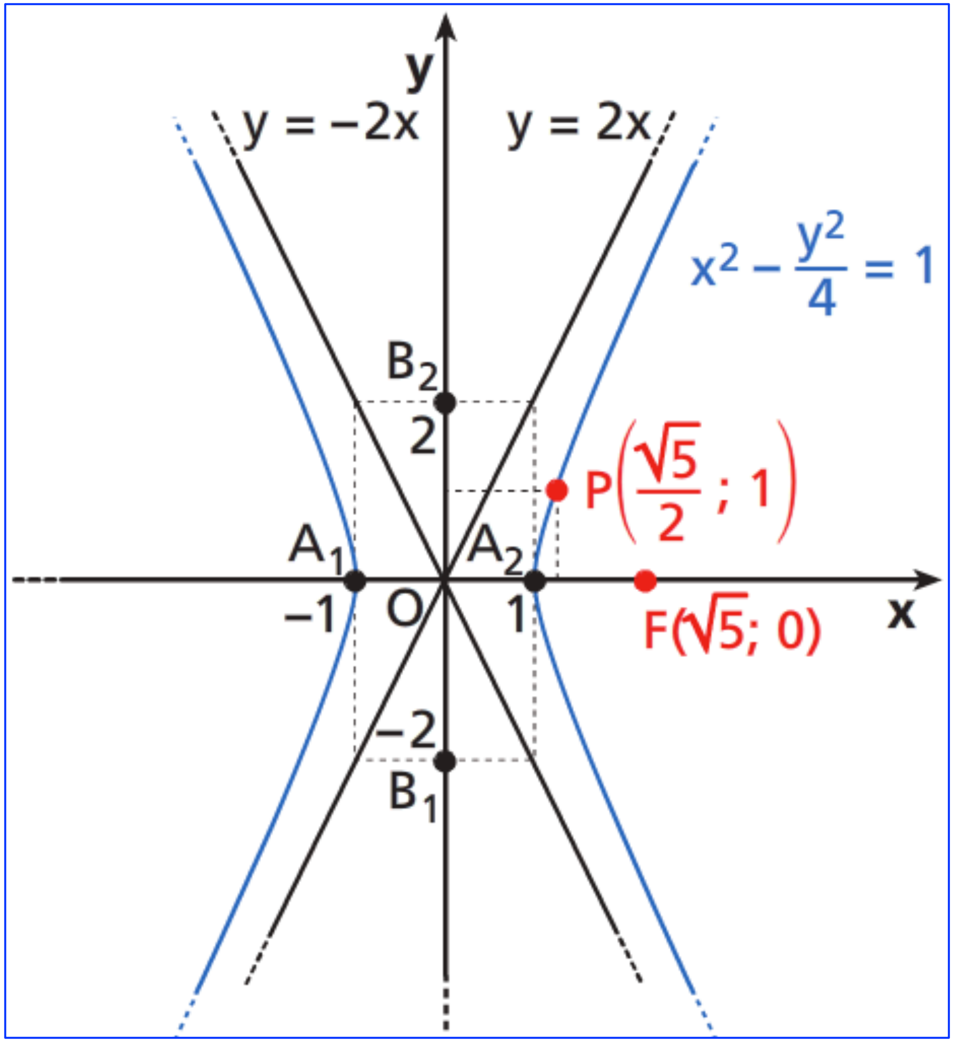
$$B_1 = (0;-2) \quad B_2 = (0;2)$$

$$\textit{eccentricità} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$$

asintoti

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = 2x \qquad y = -2x$$



Determinare l'equazione dell'iperbole avente fuoco F=(-5/2;0) e un asintoto di equazione y=(4/3)x

L'equazione dell'iperbole è $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$, pertanto il problema consiste nel trovare due condizioni tra loro indipendenti tali da formare un sistema di due equazioni nelle due incognite *a*,*b*.

Dalle coordinate del fuoco deduciamo che:

$$\boxed{a^2+b^2=c^2 \rightarrow a^2+b^2=\frac{25}{4}}$$

Dall'equazione dell'asintoto ricaviamo:

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x \rightarrow y=\frac{4}{3}x \rightarrow \frac{b}{a}=\frac{4}{3} \rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{9}}$$

Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{25}{4} \\ \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + \dfrac{16}{9}a^2 = \dfrac{25}{4} \\ b^2 = \dfrac{16}{9}a^2 \end{cases} \xrightarrow{calcoli\ algebrici} \begin{cases} a^2 = \dfrac{9}{4} \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

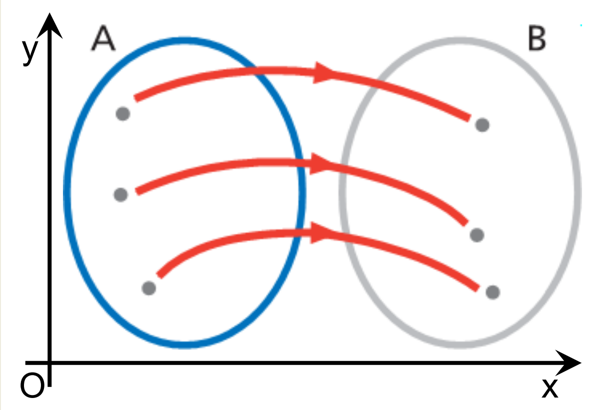
da cui, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione canonica, si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{4}{9}x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

Ci servono alcuni elementi sulle trasformazioni geometriche

DEFINIZIONE

Una **trasformazione geometrica** nel piano è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.

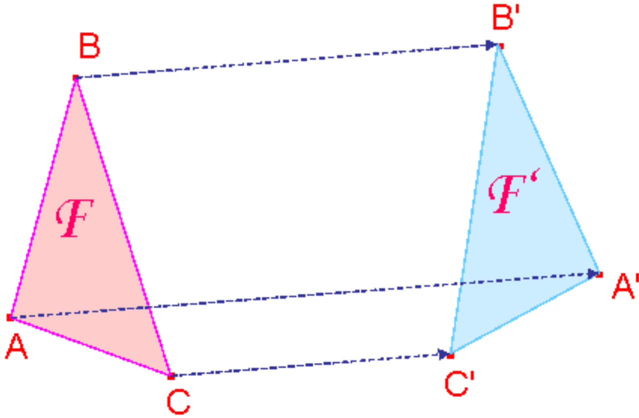


ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 2 - 2 \cdot 1 + 6 \\ y' = -2 + 1 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -2 \end{cases}$$

$P\,(2;\,1)$ $\qquad$ $P'\,(6;\,-2)$

Le ***isometrie*** sono tutte le trasformazioni (movimenti, spostamenti) che mantengono inalterate le figure, più precisamente che mantengono inalterate le caratteristiche misurabili (la lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli).



Una **traslazione** è una isometria di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

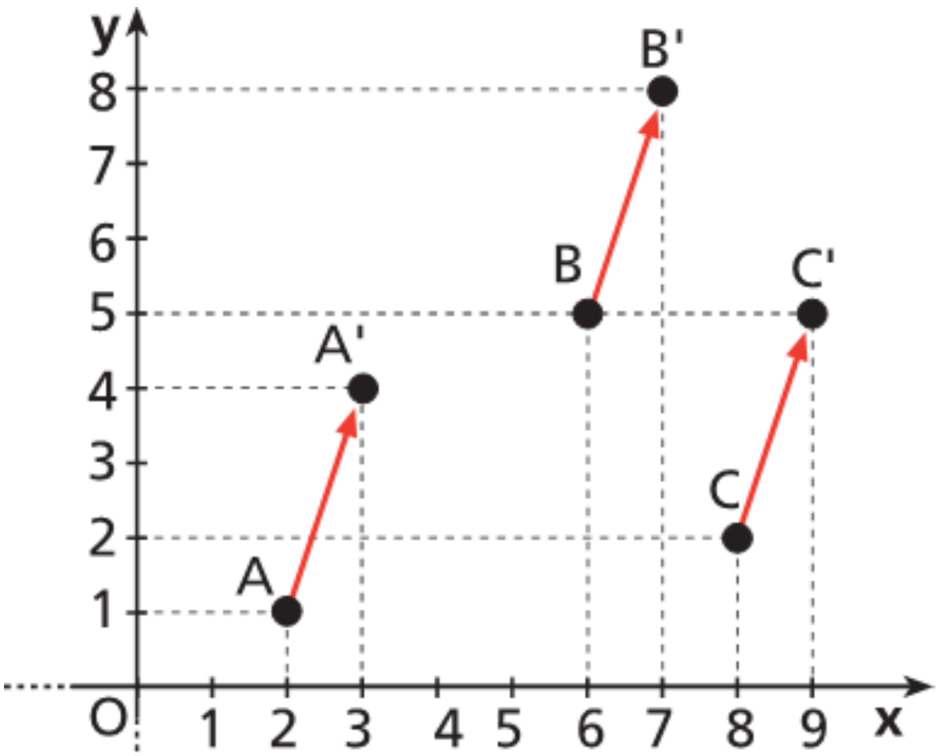
Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto P'(x';y') note quelle del punto P(x;y).

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Ogni punto viene traslato aumentando di 1 unità la sua ascissa e di 3 unità la sua ordinata.

I segmenti orientati AA', BB', CC' sono tutti equipollenti e si chiamano vettori.

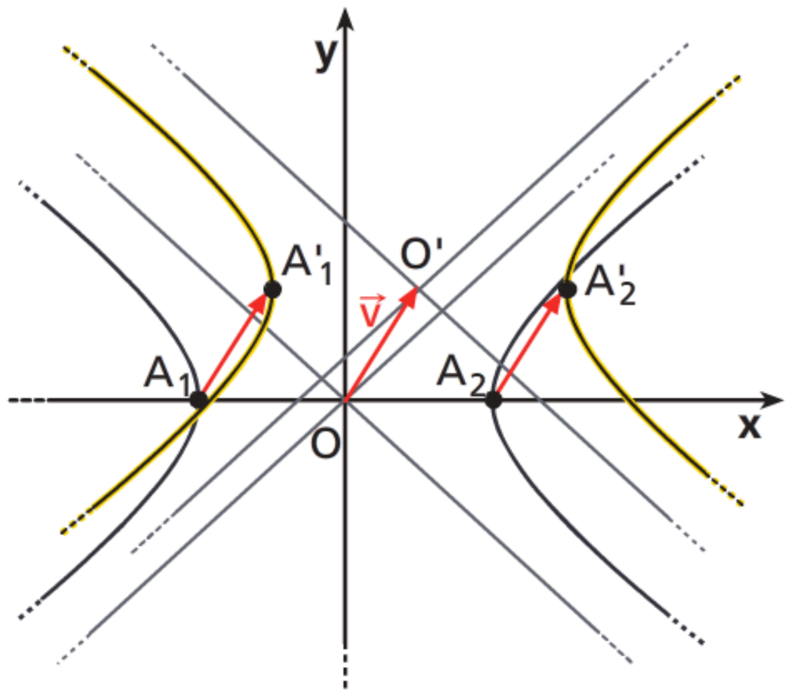


➤ *IPERBOLE traslata*

Se trasformiamo un'iperbole con una trasformazione di vettore **v**, la curva ottenuta è ancora un'iperbole.

Infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'iperbole e con F'_1 e F'_2 i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole, vale ancora:

$$\left|\overline{P'F_1'} - \overline{P'F_2'}\right| = 2a$$



L'iperbole traslata ha il centro, i vertici, gli assi di simmetria e gli asintoti che sono i corrispondenti di quelli dell'iperbole data.

Ricaviamo l'equazione dell'iperbole traslata.

Applichiamo alla generica iperbole, con centro di simmetria nell'origine degli assi cartesiani, la traslazione di vettore **v**(p;q):

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

Sostituiamo queste trasformazioni nell'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x'-p)^2}{a^2} - \frac{(y'-q)^2}{b^2} = 1$$

Eliminando gli apici, otteniamo l'equazione cercata:

$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1}$$

L'equazione può essere scritta anche in altro modo. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\boxed{a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0}$$

dove:

$$a' = b^2 \quad b' = -a^2 \quad c' = -2b^2 p$$
$$d' = 2a^2 q \quad e' = b^2 p^2 - a^2 q^2 - a^2 b^2$$

Centro di simmetria:

$$0' = \left(-\frac{c'}{2a'} ; -\frac{d'}{2b'} \right)$$

Assi di simmetria:

$$x = -\frac{c'}{2a'} \qquad y = -\frac{d'}{2b'}$$

ESERCIZIO GUIDA

Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, determiniamo l'equazione dell'iperbole corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e rappresentiamo le due iperboli.

L'iperbole data ha i fuochi sull'asse y e inoltre $a = 2$ e $b = 4$. I vertici reali sono perciò $B_1(0; -4)$ e $B_2(0; 4)$, mentre quelli non reali sono $A_1(-2; 0)$ e $A_2(2; 0)$. Gli asintoti dell'iperbole hanno equazione:

$$y = \pm 2x.$$

Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 6 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione dell'iperbole alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x' - 6)^2}{4} - \frac{(y' - 2)^2}{16} = -1.$$

L'equazione dell'iperbole traslata è:

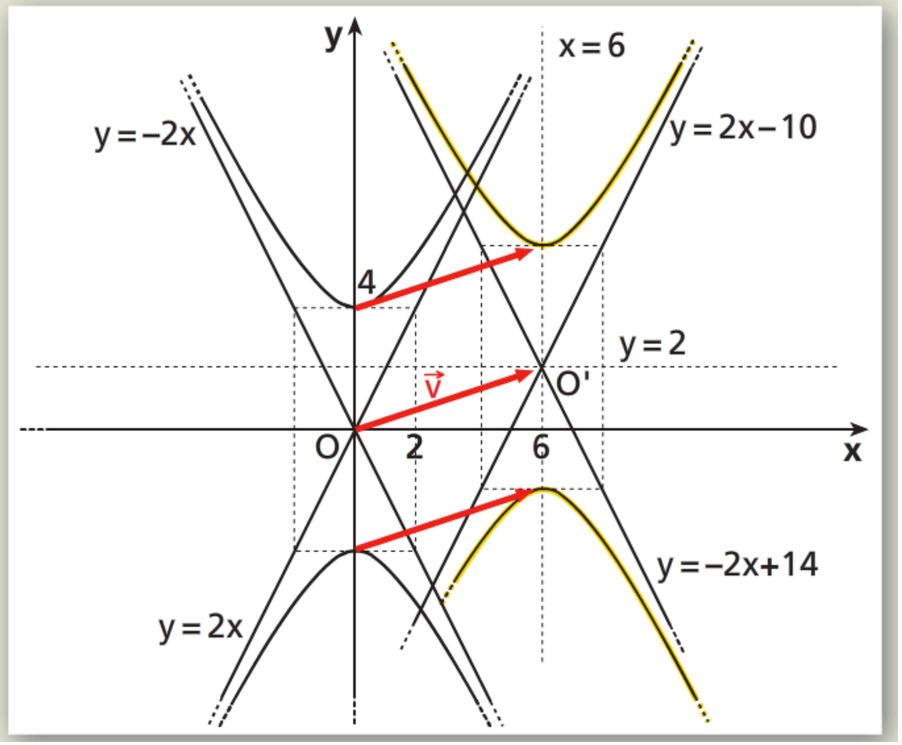
$$\frac{(x - 6)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{16} = -1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$4x^2 - y^2 - 48x + 4y + 156 = 0.$$

Ricaviamo le coordinate del centro di simmetria e dei vertici dell'iperbole traslata, sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei punti corrispondenti:

$$O'(6; 2),\ A_1'(4; 2),\ A_2'(8; 2),\ B_1'(6; -2),\ B_2'(6; 6).$$

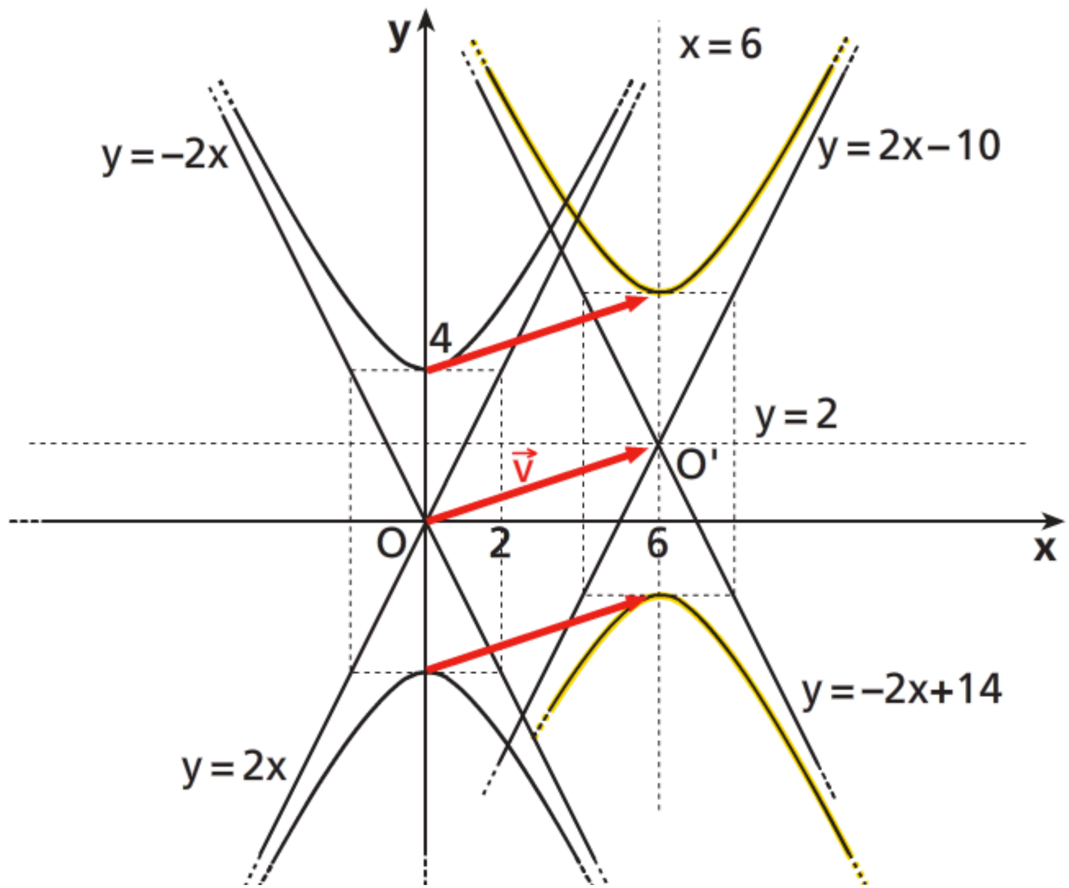


Gli assi di simmetria dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$x = 6$ e $y = 2$.

Gli asintoti dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli asintoti dell'iperbole data. La loro equazione è:

$$y - 2 = \pm 2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14 \vee y = 2x - 10.$$



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e tracciamo il grafico delle curve di equazioni:
a) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y + 29 = 0$; b) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y = 0$.

a) Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole. Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y:

$$9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y + 29 = 0 \rightarrow 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) + 29 = 0.$$

Perché i termini all'interno delle parentesi diventino il quadrato di un binomio, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo i termini mancanti a entrambi i membri dell'equazione:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) + 29 = 9 - 16 \rightarrow 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 + 29 = -7 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = -36.$$

Dividendo entrambi i membri per 36, otteniamo: $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = -1.$

Il centro di simmetria dell'iperbole è $O'(1; 2)$.
Le coordinate di O' potevano essere determinate anche ricordando che nell'equazione

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$$

si ha $x_{O'} = -\dfrac{c'}{2a'}$ e $y_{O'} = -\dfrac{d'}{2b'}$.

Quindi

$$x_{O'} = -\frac{-18}{2 \cdot 9} = 1, \quad y_{O'} = -\frac{16}{2 \cdot (-4)} = 2.$$

Gli assi di simmetria sono le rette per O' parallele agli assi:

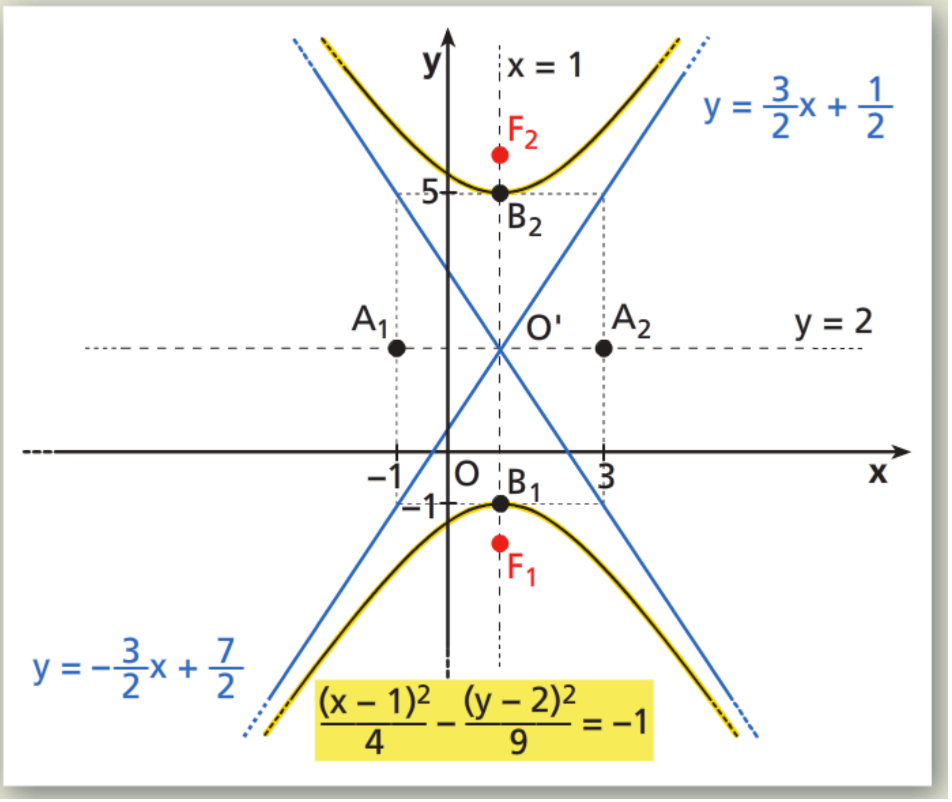
$$x = 1, \qquad y = 2.$$

La lunghezza dei semiassi dell'iperbole è $a = 2$ e $b = 3$.

La semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.
Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse y, i vertici reali sono $B_1(1; -1)$ e $B_2(1; 5)$, i vertici non reali sono $A_1(-1; 2)$ e $A_2(3; 2)$, e i fuochi sono $F_1(1; 2 - \sqrt{13})$ e $F_2(1; 2 + \sqrt{13})$.
Gli asintoti sono le rette per O' con coefficiente angolare $m = \pm\frac{b}{a}$:

$$y - 2 = \pm\frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \ y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \vee y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$



b) Applichiamo il metodo del completamento del quadrato riscrivendo l'equazione data:

$$4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) = 0 \rightarrow$$

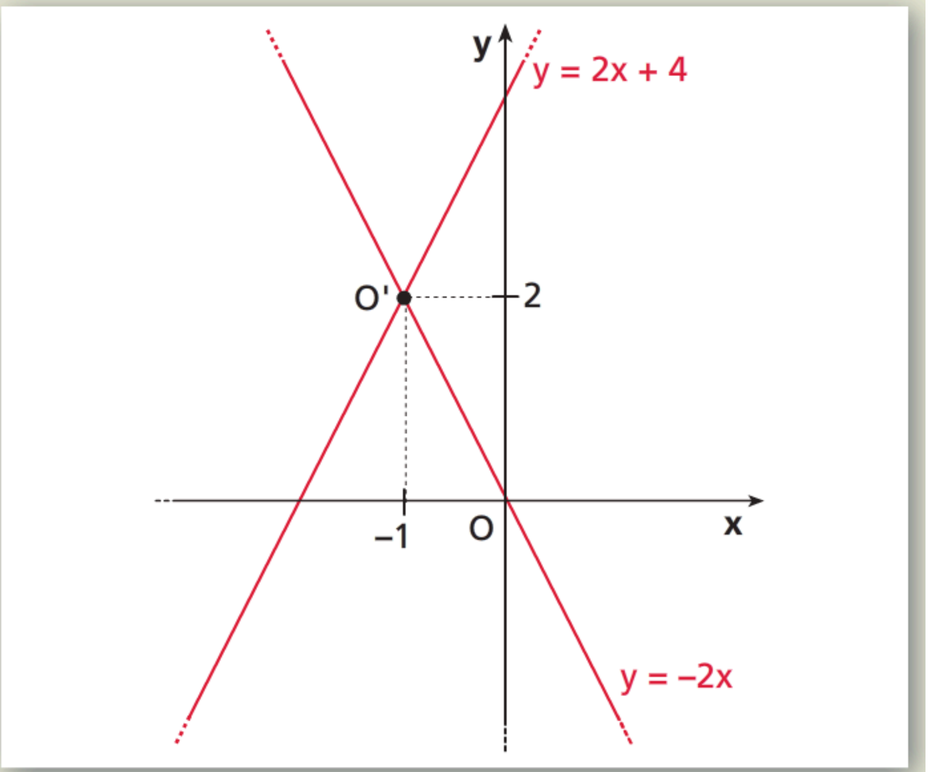
$$\rightarrow 4(x^2+2x+1)-4-(y^2-4y+4)+4=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1)^2 = (y-2)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x+1) = \pm(y-2).$$

Questo risultato significa che l'equazione data rappresenta un'*iperbole degenere* costituita dalle due rette $y = 2x + 4$ e $y = -2x$ passanti per $O'(-1; 2)$.



Dopo aver determinato il dominio, rappresentare graficamente la funzione:

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} + 1$$

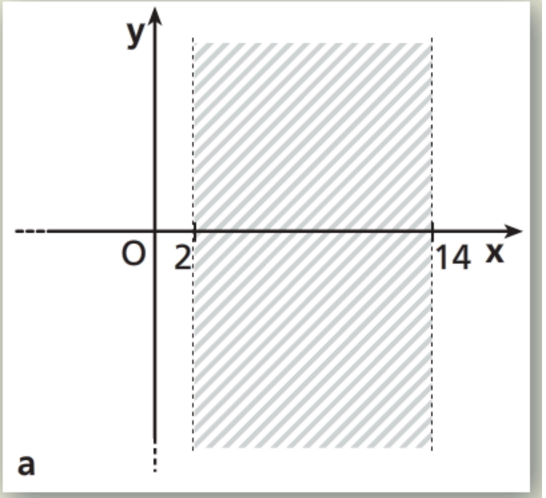
Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \vee x \geq 14.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2 \vee x \geq 14\}.$$

Tracciamo nel piano cartesiano le rette $x = 2$ e $x = 14$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa maggiore di 2 e minore di 14 (figura *a*).



a

Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

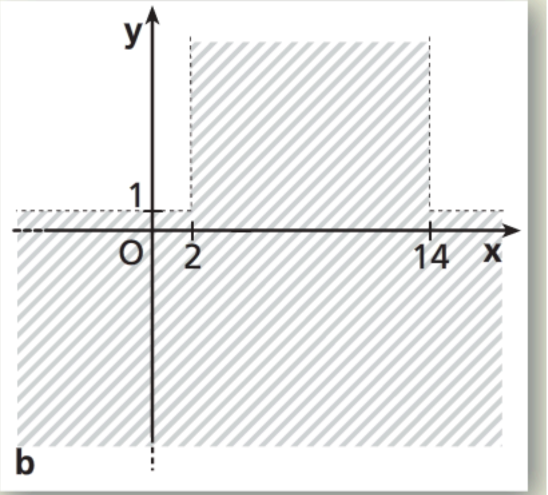
$$y - 1 = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} \rightarrow \frac{y-1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7}.$$

Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{2} \geq 0 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} = \dfrac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{x^2 - 16x + 64 - 64}{4} = 7 \end{cases} \rightarrow$$

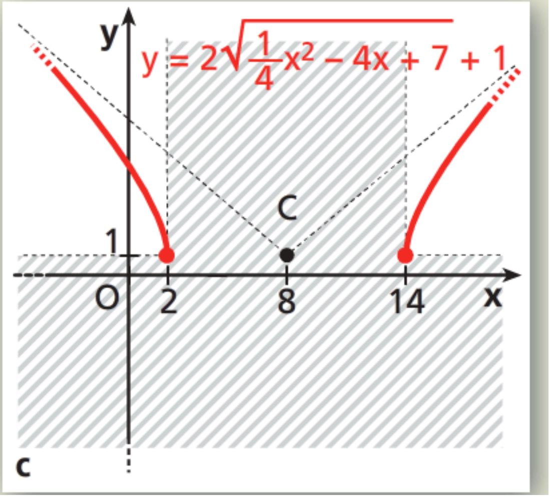
$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{x^2 - 16x + 64}{4} = -9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(x-8)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1 \end{cases}$$



Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura *b*).

L'equazione $\dfrac{(x-8)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$ rappresenta un'iperbole traslata di centro $C(8; 1)$, assi di simmetria $x = 8$ e $y = 1$, asintoti $y = x - 7$ e $y = -x + 9$. Tracciamo ora i rami di iperbole contenuti nella parte di piano che non abbiamo eliminato (figura *c*), ottenendo così il grafico cercato.



➢ Caso I: i fuochi sono sull'asse *x*

Equazione generica dell'iperbole riferita agli assi di simmetria:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ponendo *b* = *a* , si ottiene l'iperbole equilatera, cioè:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

➢ Caso II: i fuochi sono sull'asse *y*

Equazione generica dell'iperbole riferita agli assi di simmetria:

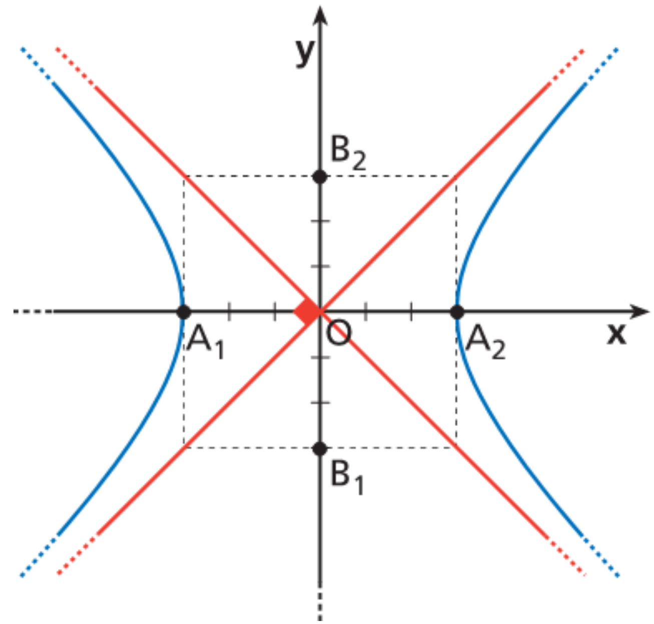
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Ponendo *b* = *a* , si ottiene l'iperbole equilatera, cioè:

$$\boxed{x^2-y^2=-a^2}$$

➢ Esempio

Disegnare la seguente iperbole equilatera: $x^2-y^2=9$



✓ Vertici (reali e non reali):

$$a = b \Rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

$$A_1 = (-3;0) \quad A_2 = (3;0) \quad B_1 = (0;-3) \quad B_2 = (0;3)$$

✓ Fuochi:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \xrightarrow{a=b} c = a\sqrt{2}$$

$$F_1 = (-3\sqrt{2};0) \quad F_2 = (3\sqrt{2};0)$$

✓ Asintoti:

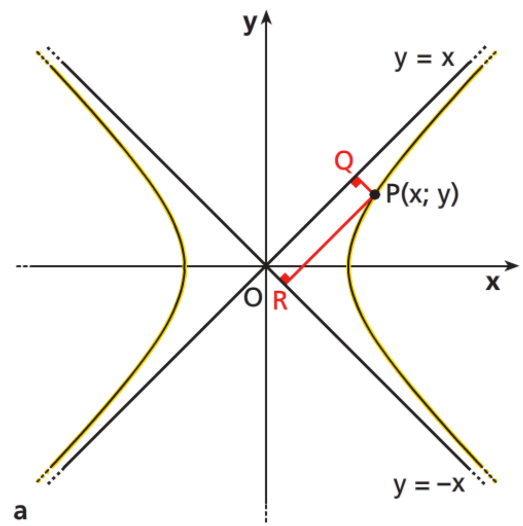
$$a = b \Rightarrow y = x \quad y = -x$$

$$bisettrici\ dei\ quadranti$$

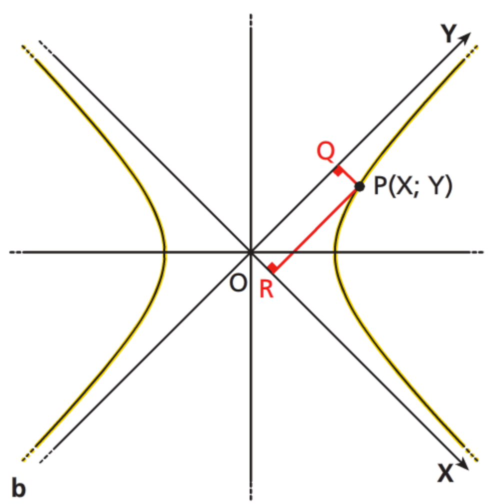
✓ Eccentricità: $a = b \Rightarrow e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$

Gli asintoti dell'iperbole equilatera $\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$, che coincidono con le bisettrici dei quadranti, sono perpendicolari tra loro.

Consideriamo questi asintoti come assi di un nuovo sistema di riferimento per l'iperbole. Sia P=(x;y) un punto dell'iperbole nel primo sistema e P=(X;Y) nel secondo sistema.

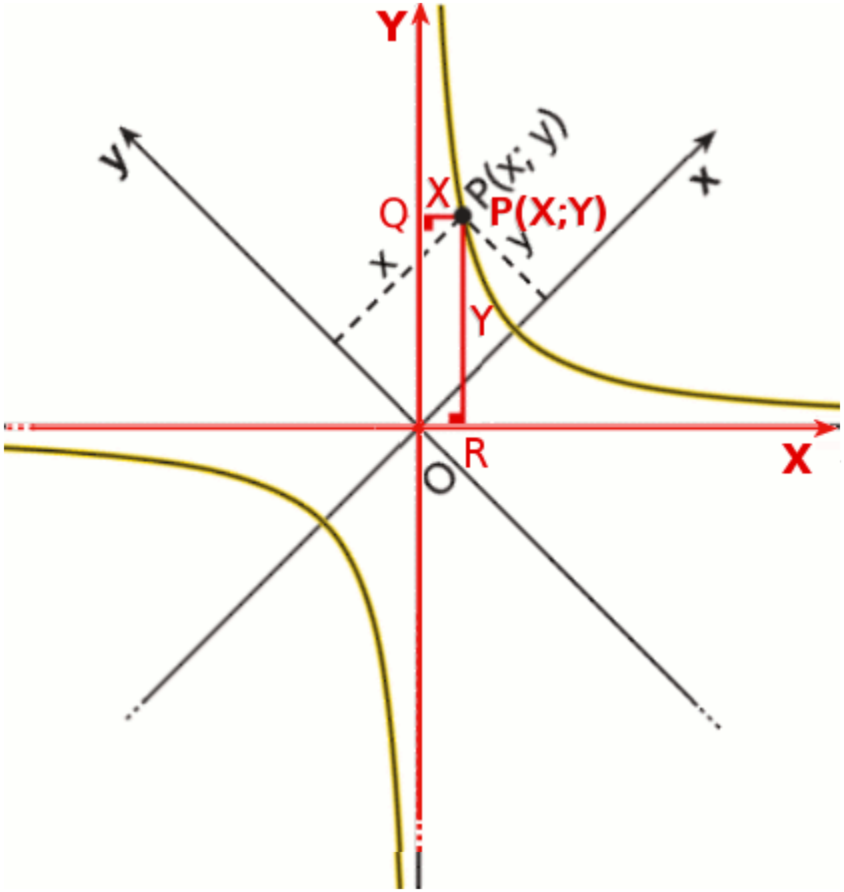


a



b

Ruotando (applichiamo una rotazione che è una trasformazione geometrica) il grafico dell'iperbole portiamo gli asintoti (sistema XOY) nella posizione occupata dal primo sistema di assi (xOy).



Equazione dell'iperbole nel nuovo sistema è:

$$\boxed{XY = k \qquad (k = a^2)}$$

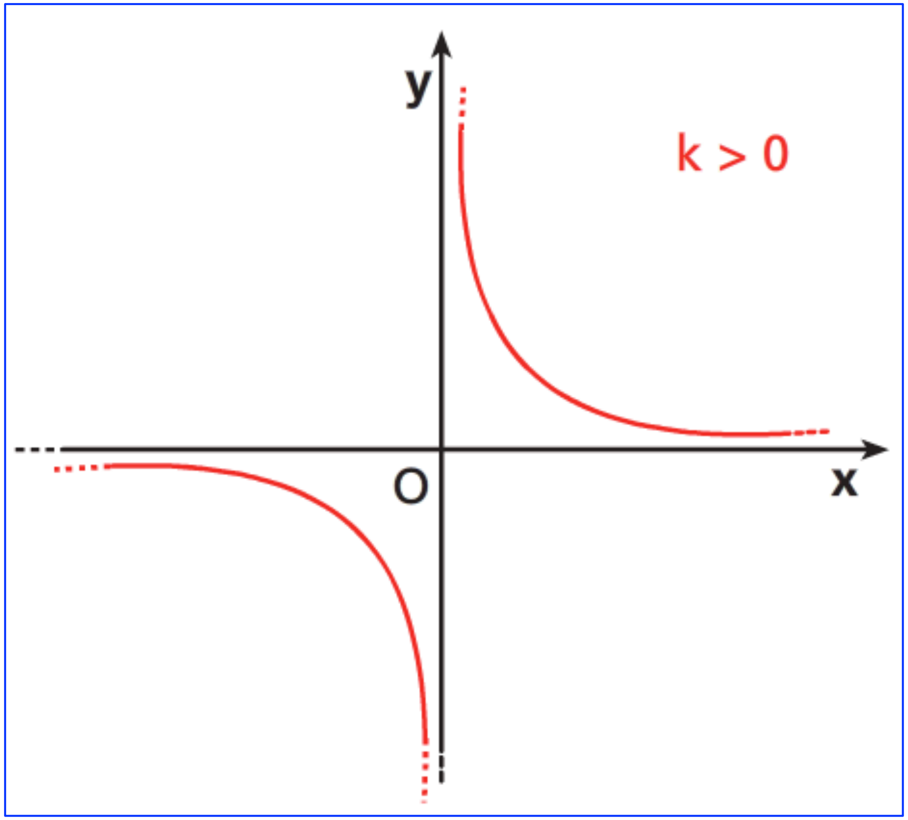
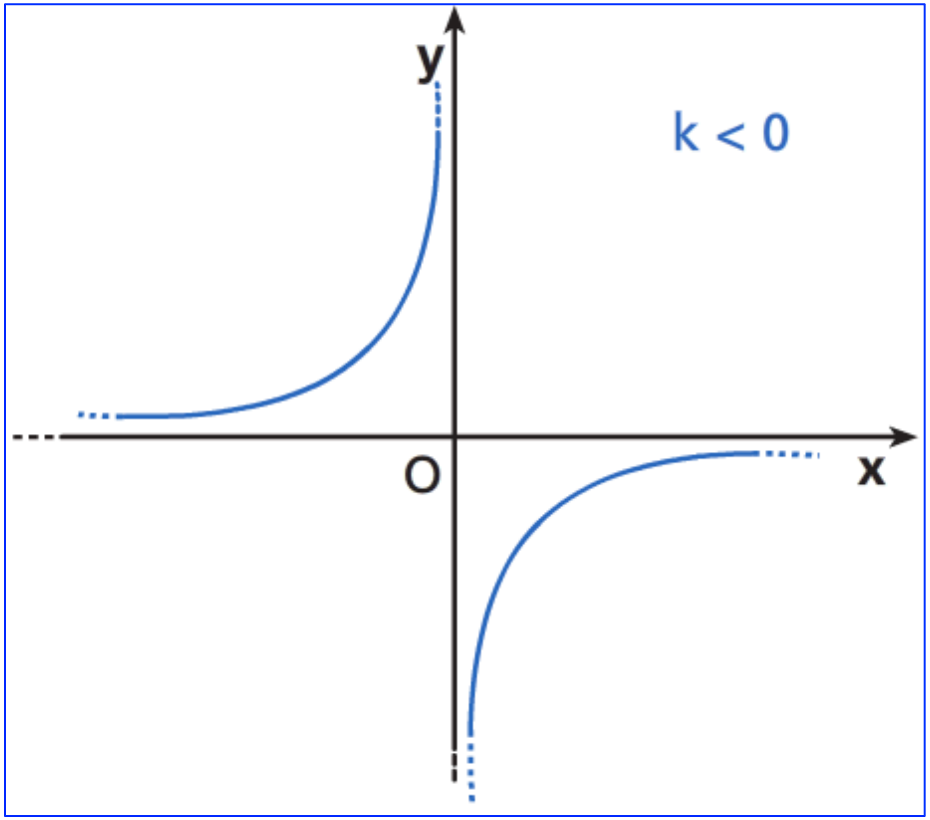
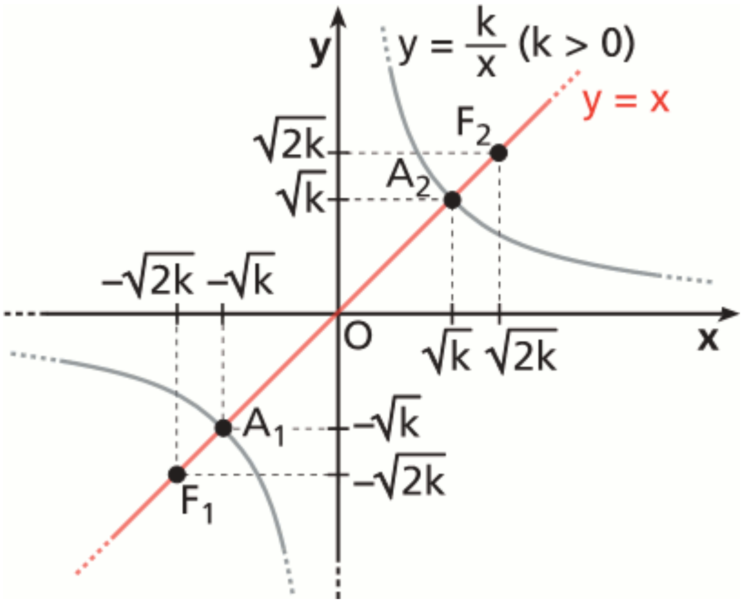


Grafico dell’iperbole equilatera riferita ai propri asintoti



Vertici e fuochi

***k* > 0**



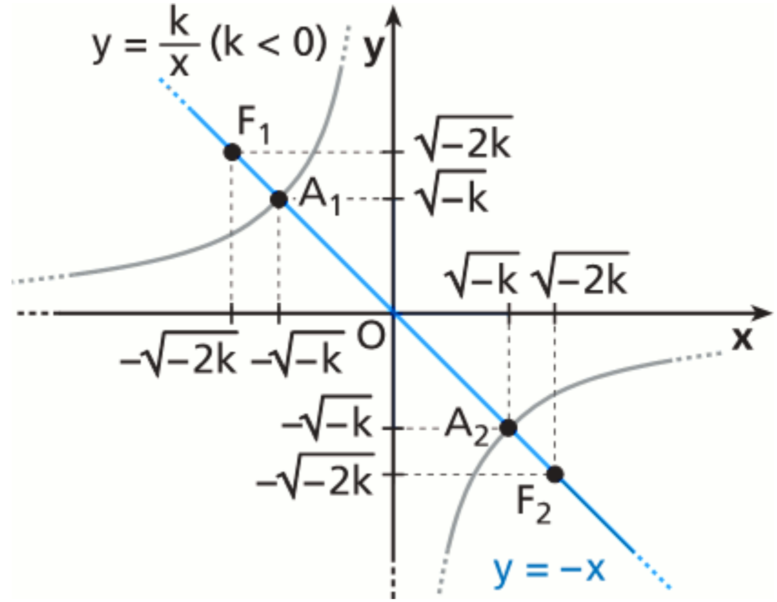
Vertici

$$A_1 = (-\sqrt{k}; -\sqrt{k}),\ A_2 = (\sqrt{k}; \sqrt{k}).$$

Fuochi

$$F_1 = (-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k}),\ F_2 = (\sqrt{2k}; \sqrt{2k}).$$

***k* < 0**



Vertici

$$A_1 = (-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}),\ A_2 = (\sqrt{-k}; -\sqrt{-k}).$$

Fuochi

$$F_1 = (-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k}),\ F_2 = (\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k}).$$

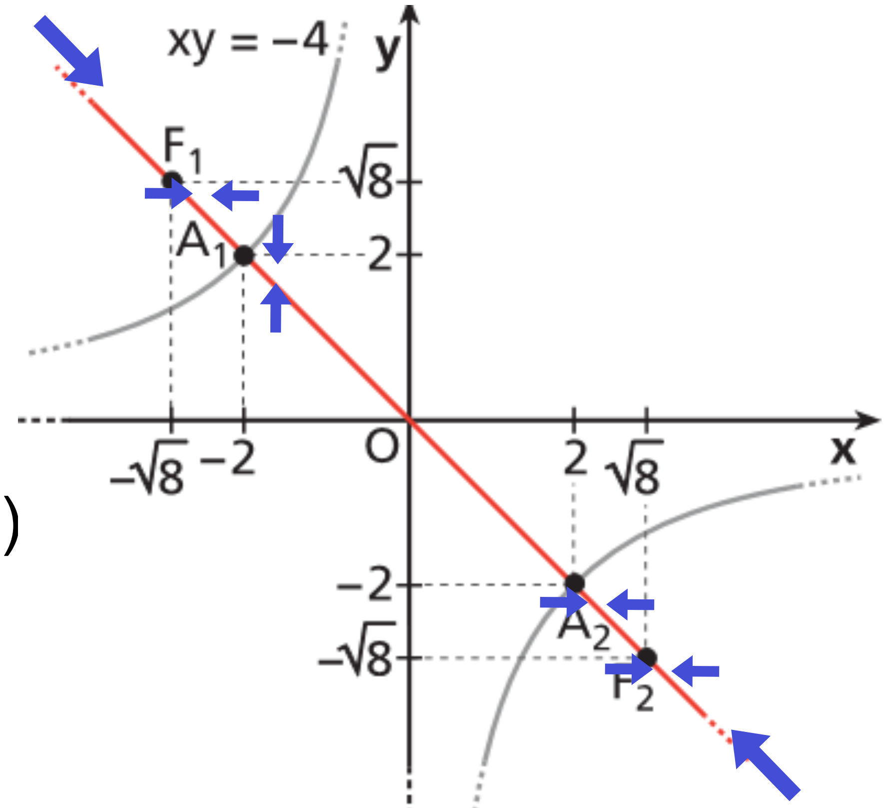
Studiamo il grafico e le proprietà dell'iperbole equilatera di equazione:

$$xy = -4$$

Asse trasverso: $y = -x$

Vertici: $A_1(-2; 2)$ $A_2(2; -2)$

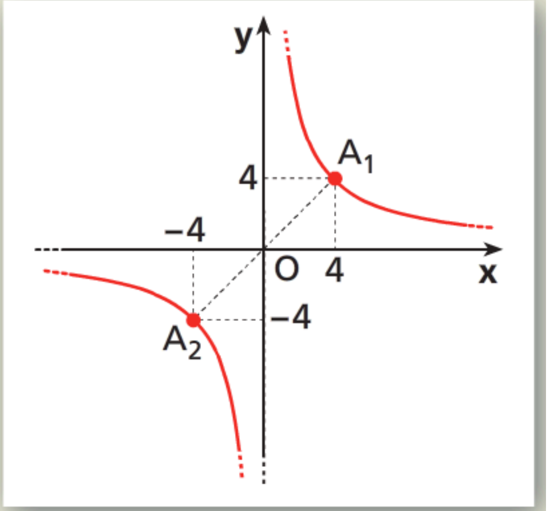
Fuochi: $F_1(-\sqrt{8}; \sqrt{8})$ $F_2(\sqrt{8}; -\sqrt{8})$



ESERCIZIO GUIDA

Data l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$, determiniamo le coordinate dei vertici e rappresentiamo la curva graficamente.

Poiché $k = 16 > 0$, il grafico della curva si trova nel primo e terzo quadrante e l'asse trasverso della curva è la bisettrice dei precedenti quadranti, ossia $y = x$.



Per determinare le coordinate dei vertici risolviamo il sistema costituito dalle equazioni dell'iperbole e della bisettrice. Otteniamo:

$$A_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}),\ A_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k}) \rightarrow A_1(4; 4),\ A_2(-4; -4).$$

Per disegnare l'iperbole troviamo qualche punto della curva assegnando valori a x, purché diversi da 0, e calcolando i corrispondenti valori di y. Per esempio, per $x = 2$ abbiamo $y = 8$.

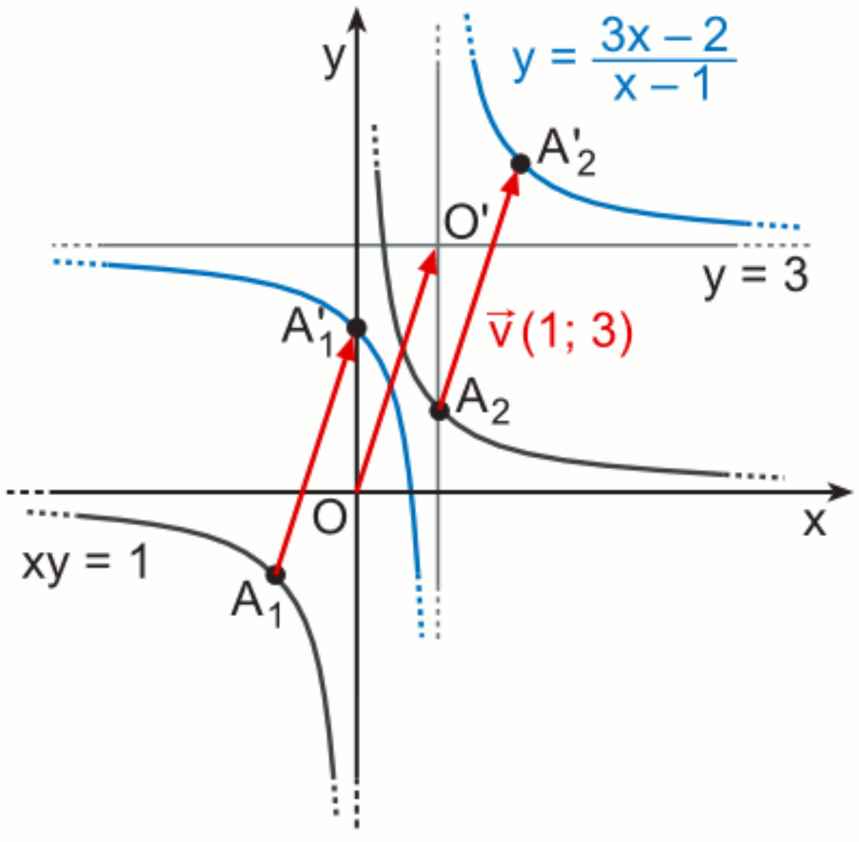
Infine, congiungendo i punti ottenuti, rappresentiamo la curva richiesta, ricordando che gli assi cartesiani sono gli asintoti.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della curva ottenuta applicando all'iperbole di equazione $xy=1$ la traslazione di vettore $\mathbf{v}=(1;3)$.

Equazioni della traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$



Sostituendo x e y nell'equazione dell' iperbole, otteniamo:

$$(x' - 1)\,(y' - 3) = 1$$

Ribattezzando x e y le variabili della nuova equazione e ricavando la *y*:

$$\boxed{y = \frac{3x - 2}{x - 1}}$$

In generale, ogni iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi ha un' equazione del tipo:

$$\boxed{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$$

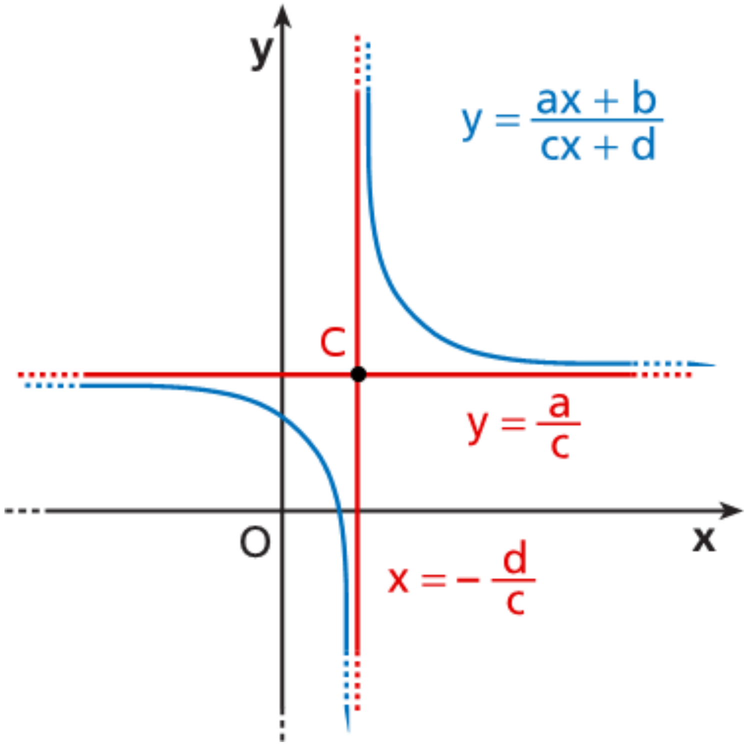
che definisce una funzione detta funzione omografica.

Equazioni degli asintoti:

$$\boxed{x = -\frac{d}{c} \qquad y = \frac{a}{c}}$$

Coordinate del centro:

$$\boxed{C = \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)}$$



ESERCIZI

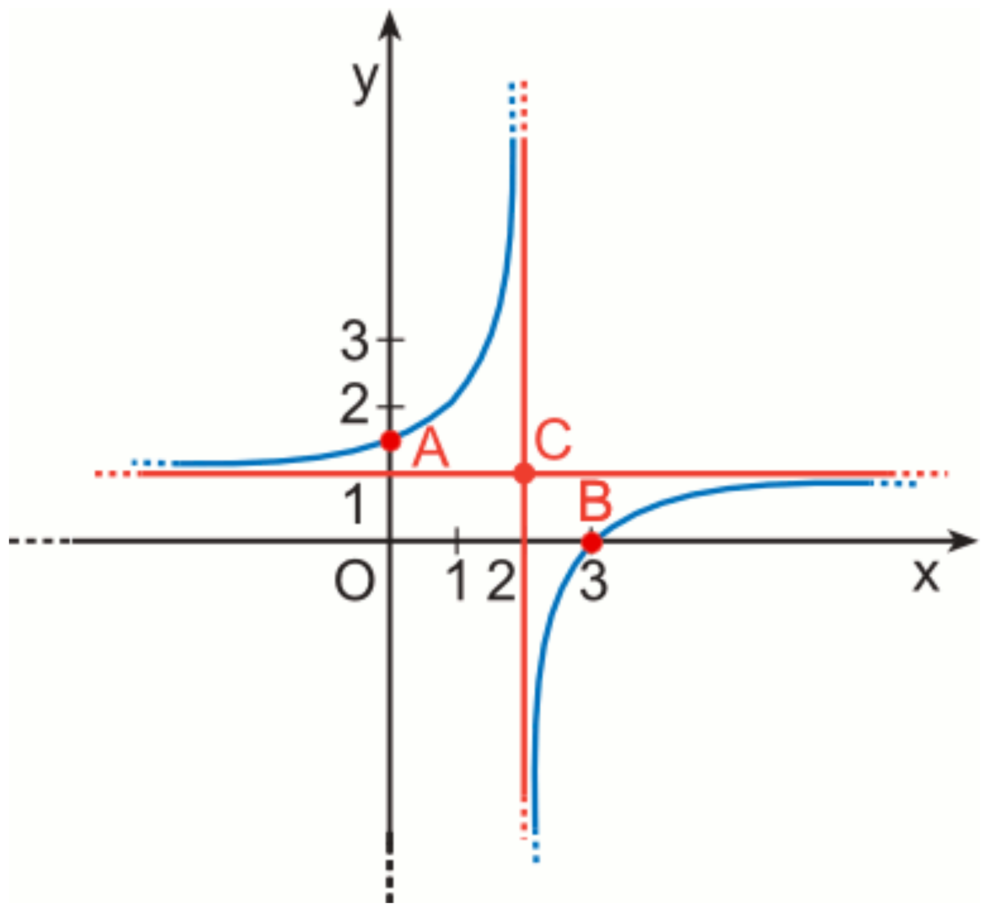
Studiamo il grafico della funzione: $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Asintoti:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-2}{1} = 2 \qquad y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$$

Centro di simmetria:

$$C = \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) = (2;1)$$



Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x-3}{x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left(0; \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x-3}{x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow B = (3;0)$$

ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $y = \dfrac{6x+1}{2x-4}$.

L'equazione $y = \dfrac{6x+1}{2x-4}$ è quella della funzione omografica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, che rappresenta un'iperbole equilatera avente gli asintoti $x = -\dfrac{d}{c}$ e $y = \dfrac{a}{c}$ e le coordinate del centro di simmetria $C\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

In questo caso abbiamo: $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -4$.

Il centro è $C\left(-\dfrac{-4}{2}; \dfrac{6}{2}\right)$, ossia $C\,(2; 3)$.

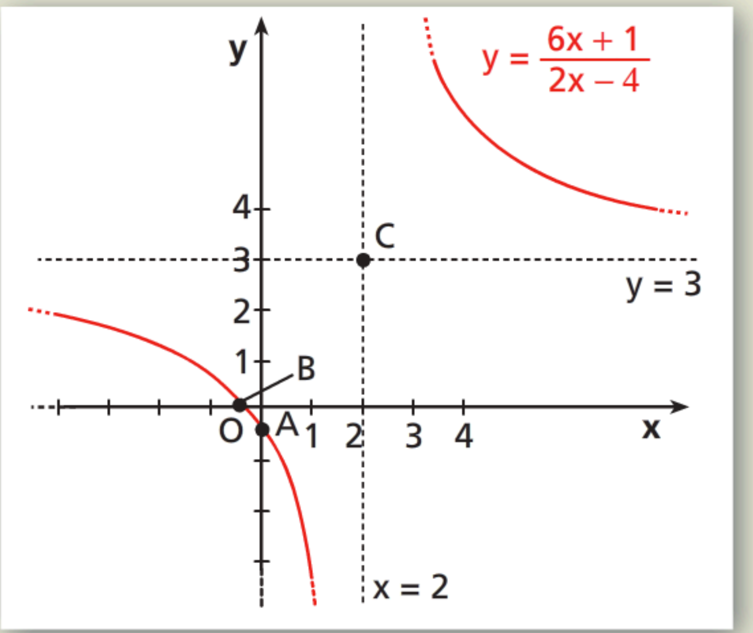
Le equazioni degli asintoti sono $x = 2$ e $y = 3$.

Per disegnare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, per esempio le intersezioni con gli assi:

asse y) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{6x+1}{2x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow A\left(0; -\dfrac{1}{4}\right)$;

asse x) $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{6x+1}{2x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \rightarrow B\left(-\dfrac{1}{6}; 0\right)$.

Tracciamo il grafico dell'iperbole assegnata.



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo il fascio di funzioni omografiche di equazione $y = \dfrac{(k-1)x+2}{kx-4}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e troviamo il luogo dei centri di simmetria.

L'equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ rappresenta una funzione omografica se $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

- $c = 0$ per $k = 0$. L'equazione diventa:

  $y = \dfrac{-x+2}{-4} \rightarrow y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$, che è l'equazione di una retta.

- $ad - bc = 0$ se $-4(k-1) = 2k \rightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

  L'equazione diventa:

  $$y = \frac{-\frac{1}{3}x+2}{\frac{2}{3}x-4} = \frac{-\frac{1}{3}x+2}{-2\left(-\frac{1}{3}x+2\right)} = -\frac{1}{2} \text{ (con } x \neq 6\text{)},$$

  ossia l'equazione della retta $y = -\dfrac{1}{2}$ privata del punto $\left(6; -\dfrac{1}{2}\right)$.

- Per $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{2}{3}$, abbiamo un fascio di funzioni omografiche.

  Cerchiamo i **punti base** del fascio, scrivendo la sua equazione nella forma implicita ed evidenziando k:

  $$(kx-4)y=(k-1)x+2 \ \rightarrow \ ykx-4y-kx+x-2=0 \ \rightarrow \ k(yx-x)-4y+x-2=0.$$

  Per ottenere le coordinate dei punti base, risolviamo il sistema:

  $$\begin{cases} yx-x=0 \\ -4y+x-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(y-1)=0 \\ -4y+x-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=1 \\ -4y+x-2=0 \end{cases}$$

  Sostituendo nella seconda equazione:

  per $x=0, -4y-2=0 \ \rightarrow \ y=-\frac{1}{2}$, $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ è un punto base;

  per $y=1, -4+x-2=0 \ \rightarrow \ x=6$, $B(6;1)$ è un punto base.

- Il **centro di simmetria** delle funzioni omografiche è $C\left(\frac{4}{k}; \frac{k-1}{k}\right)$ con $k \neq 0$ e $k \neq \frac{2}{3}$.

- Cerchiamo il **luogo dei centri di simmetria**, determinando k in funzione dell'ascissa e sostituendo nell'ordinata:

  $$x=\frac{4}{k} \ \rightarrow \ k=\frac{4}{x};\ y=\frac{k-1}{k} \ \rightarrow \ y=\frac{\frac{4}{x}-1}{\frac{4}{x}}=\frac{\frac{4-x}{\cancel{x}}}{\frac{4}{\cancel{x}}}=1-\frac{x}{4} \text{ (con } x \neq 0).$$

  Il luogo cercato è la retta di equazione $y=1-\frac{x}{4}$, privata del punto $(0;1)$ e privata inoltre del punto $\left(6; -\frac{1}{2}\right)$ relativo a $k=\frac{2}{3}$, valore per cui non si ha un'iperbole ma una retta.