Problemi di Fisica

termologia

PROBLEMA

Nella sala in cui si svolge un convegno di fisici il termometro segna 292 K.

- A quanto corrisponde in °C?
- A quanto corrisponde in °F

SOLUZIONE

La correlazione tra le scale di temperatura è la seguente:

$$\frac{t(°C)}{100} = \frac{t(°F) - 32}{180} = \frac{T(K) - 273}{100}$$

Per trasformare i K in °C dobbiamo utilizzare la seguente uguaglianza:

$$\frac{t(°C)}{100} = \frac{T(K) - 273}{100} \Rightarrow t = T - 273 = 292 - 273 = 19°C$$

Per trasformare i K in °F dobbiamo utilizzare la seguente uguaglianza:

$$\frac{t(°F) - 32}{180} \Rightarrow \frac{T(K) - 273}{100}$$

$$\frac{x-32}{180} = \frac{292-273}{100} \Rightarrow 100 \cdot (x-32) = 180 \cdot 19 \Rightarrow x = \frac{6620}{100} = 66,2°F$$

dove abbiao posto t(°F) = x

PROBLEMA

Sono date due sbarre lunghe 1 m. La sbarra A è fatta di argento ($\lambda = 19 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}) e la sbarra B di piombo ($\lambda = 28 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}).

- Se la temperatura passa da 0 °C a 50 °C, quale delle due sbarre subirà l'allungamento maggiore?

SOLUZIONE

Per stabilire quale delle due sbarre subisce l'allungamento maggiore in seguito alla variazione di temperatura di 50 °C, dobbiamo utilizzare la seguente legge della dilatazione lineare:

$$\Delta L = \lambda \cdot L_0 \cdot \Delta t$$

$$\Delta L_A = 19 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 50 = 950 \cdot 10^{-6} m = 0,95 \cdot 10^{-3} m = 0,95mm$$

$$\Delta L_B = 28 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 50 = 1400 \cdot 10^{-6} m = 1,4 \cdot 10^{-3} m = 1,4mm$$

Conclusione: la sbarra di piombo subisce un allungamento maggiore rispetto alla sbarra di argento.

PROBLEMA

Calcolare il coefficiente di dilatazione di un metallo non noto, sapendo che a °0 la sua lunghezza è di 1,250 m e che a 296 °C la lunghezza è diventata di 1,254 m.

SOLUZIONE

Il coefficiente di dilatazione lineare lo calcoliamo come formula inversa della legge della dilatazione lineare:

$$\Delta L = \lambda \cdot L_0 \cdot \Delta t \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta L}{L_0 \cdot \Delta t} = \frac{L - L_0}{L_0 \cdot \Delta t} = \frac{1{,}254 - 1{,}250}{1{,}250 \cdot 296} = 10{,}81 \cdot 10^{-6} {}^{\circ}C^{-1}$$

PROBLEMA

Determinare la temperatura a cui è arrivata una sbarra di ferro ($\lambda = 12 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}), sapendo che a 0 °C la sua lunghezza è di 4,50 m e che per tale aumento di temperatura ha raggiunto una lunghezza di 4,55 m.

SOLUZIONE

La temperatura finale a cui è arrivata la sbarra di ferro la calcoliamo come formula inversa della legge della dilatazione lineare:

$$\Delta L = \lambda \cdot L_0 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta L}{\lambda \cdot L_0} = \frac{L - L_0}{\lambda \cdot L_0} = \frac{4{,}55 - 4{,}50}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}50} = 926{}^{\circ}C$$

PROBLEMA

Sono dati due cubi di lato 1,3 m. Il cubo A è fatto di alluminio ($\lambda = 23{,}36 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}) ed il cubo B di ghisa ($\lambda = 10{,}75 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}). Se la temperatura passa da 0 °C a 100 °C, quale dei due cubi subirà la dilatazione maggiore?

SOLUZIONE

Per stabilire quale dei due cubi subisce la dilatazione maggiore in seguito alla variazione di temperatura di 100 °C, dobbiamo utilizzare la seguente legge della dilatazione volumetrica:

$$\Delta V = \alpha \cdot V_0 \cdot \Delta t$$

$$\Delta V_A = 3 \cdot 23{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}3^3 \cdot 100 = 0{,}015 m^3 \qquad \Delta V_B = 3 \cdot 10{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}3^3 \cdot 100 = 0{,}0071 m^3$$

dove: $\alpha = 3 \cdot \lambda$ $V_0 = L^3$

Conclusione: il cubo di alluminio subisce una dilatazione volumetrica maggiore rispetto al cubo di ghisa.

PROBLEMA

Un contenitore cilindrico di vetro con diametro di 8,0 cm e altezza 25,0 cm, chiuso ermeticamente e senza aria all'interno, è riempito di mercurio fino a un'altezza di 24,7 cm alla temperatura di 0 °C. Ipotizzando che quest' ultima salga a un valore di 45 °C, stabilisci se il contenitore di vetro, di cui si può trascurare la dilatazione, rischia di rompersi oppure no.

SOLUZIONE

La risposta va trovata nel confronto tra il volume del contenitore cilindrico di vetro e quello del mercurio alla temperatura alla temperatura di 45 °C.

Calcolo del volume del contenitore cilindrico di vetro:

$$V_{cil} = \pi \cdot R^2 \cdot h_{cil} = \pi \cdot 4^2 \cdot 25 = 1256\,cm^3$$

Volume del mercurio alla temperatura di 45 °C:

$$V_{mer} = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = 1241 \cdot (1 + 1{,}82 \cdot 10^{-4} \cdot 45) = 1251\,cm^3$$

dove:

$$V_0 = \pi \cdot R^2 \cdot h_{mer} = \pi \cdot 4^2 \cdot 24{,}7 = 1241\,cm^3$$

Conclusione - Il contenitore di vetro non si rompe in quanto il suo volume è superiore al volume dilatato del mercurio:

$$V_{cil} > V_{mer} \rightarrow \text{ Il contenitore di vetro non si rompe}$$

PROBLEMA

Un'asta di ferro ($\lambda = 12 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$) è lunga 30 m alla temperatura di 0 °C.

1) Completa la seguente tabella:

Δt (°C)	50	100	150	200	250
ΔL (m)	…	…	…	…	…

2) Elabora un grafico riportando sull'asse delle X le variazioni di temperature Δt e sull'asse delle Y le variazioni di lunghezza ΔL

3) Che tipo di proporzionalità intercorre tra le variazioni di temperatura e le variazioni di lunghezza?

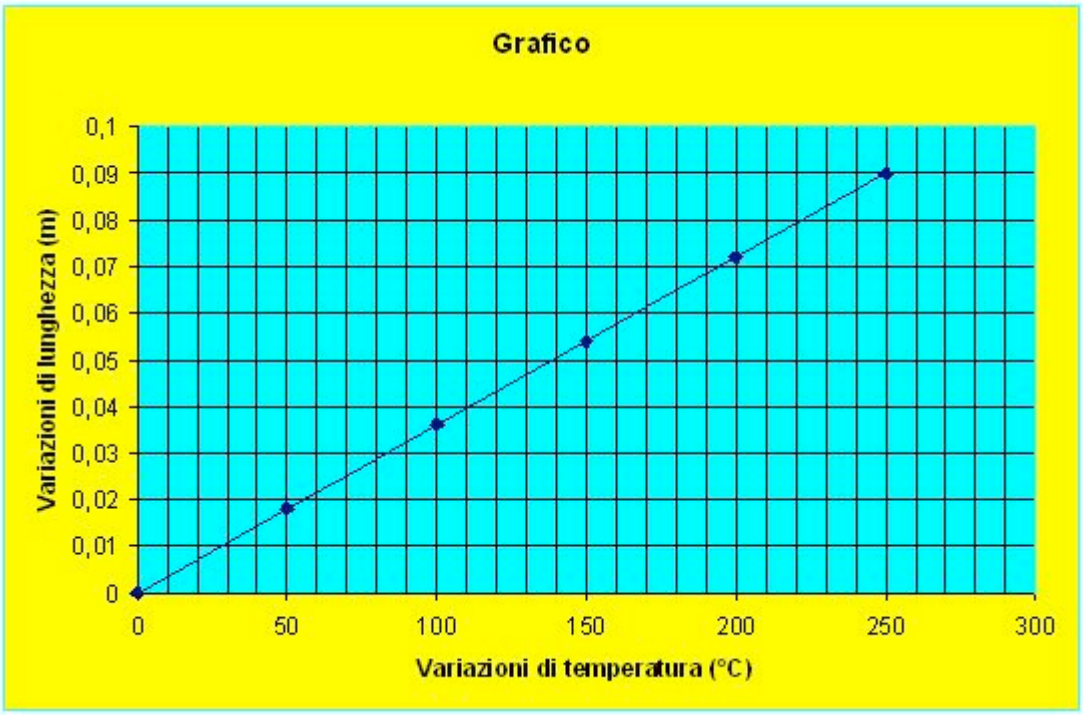
SOLUZIONE

1) Per completare la tabella dobbiamo utilizzare la seguente legge della dilatazione lineare:

$$\Delta L = \lambda \cdot L_0 \cdot \Delta t$$

Δt (°C)	50	100	150	200	250
ΔL (m)	0,018	0,036	0,054	0,072	0,090

2) Noti i valori di Δt (°C) e di ΔL (m), possiamo costruire il grafico:



3) Poiché il grafico è una retta possiamo concludere che la variazione di lunghezza ΔL e la variazione di temperatura Δt sono direttamente proporzionali e la legge fisica che le mette in relazione è di tipo lineare, ossia rappresentata da un'equazione di 1° grado.

PROBLEMA

Due sbarre, una di ferro ($\lambda_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}) ed una di rame ($\lambda_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}) sono saldate insieme ad una estremità. La lunghezza totale alla temperatura $t_1 = 10$ °C vale $L_1 = 80{,}0111$ cm, mentre alla temperatura $t_2 = 100$ °C vale $L_2 = 80{,}111$ cm.

- Calcolare la lunghezza delle due sbarre alla temperatura t = 0 °C

SOLUZIONE

Dette rispettivamente L_{01} e L_{02} le lunghezze delle due sbarre alla temperatura t = 0 °C, applicando le leggi della dilatazione lineare si ha:

$$\begin{cases} L_1 = L_{01} \cdot (1 + \lambda_1 t_1) + L_{02} \cdot (1 + \lambda_2 t_1) \\ L_2 = L_{01} \cdot (1 + \lambda_1 t_2) + L_{02} \cdot (1 + \lambda_2 t_2) \end{cases}$$

Quello ottenuto è un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto ci dà i valori delle lunghezze L_{01} e L_{02} alla temperatura t = 0 °C. Per comodità di calcolo indichiamo con x e y le due incognite e risolviamo il sistema con il metodo di Cramer:

$$\begin{cases} 1{,}00012x + 1{,}00017y = 80{,}0111 \\ 1{,}0012x + 1{,}0017y = 80{,}111 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 80{,}0111 & 1{,}00017 \\ 80{,}111 & 1{,}0017 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1{,}00012 & 1{,}00017 \\ 1{,}0012 & 1{,}0017 \end{vmatrix}} = 50 \text{ cm} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}00012 & 80{,}0111 \\ 1{,}0012 & 80{,}111 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1{,}00012 & 1{,}00017 \\ 1{,}0012 & 1{,}0017 \end{vmatrix}} = 30 \text{ cm}$$

In definitiva: $L_{01} = 50$ cm $L_{02} = 30$ cm

PROBLEMA

Un trapezio isoscele ha i lati obliqui e la base maggiore costituite da tre sbarre di ferro ($\lambda_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}) che alla temperatura $t_0 = 0$ °C hanno tutte la stessa lunghezza $L_{10} = 100$ cm. La base minore è costituita da una sbarra di rame ($\lambda_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}) che alla temperatura t_0 ha una lunghezza $L_{20} = 99{,}85$ cm.

- A quale temperatura il trapezio diviene un quadrato?

SOLUZIONE

Un trapezio isoscele diviene un quadrato quando la base maggiore L_1 e la base minore L_2 hanno la stessa lunghezza, per cui la temperatura t richiesta, affinché ciò avvenga, sarà quella per cui:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow L_{10} \cdot (1 + \lambda_1 t) = L_{20} \cdot (1 + \lambda_2 t)$$

Esplicitando rispetto a t si ottiene:

$$L_{10} + L_{10}\lambda_1 t = L_{20} + L_{20}\lambda_2 t \Rightarrow (L_{10}\lambda_1 - L_{20}\lambda_2)t = L_{20} - L_{10} \Rightarrow$$

$$t = \frac{L_{20} - L_{10}}{L_{10}\lambda_1 - L_{20}\lambda_2} = \frac{99{,}85 - 100}{100 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} - 99{,}85 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5}} = 300°C$$

PROBLEMA

Qual' è la differenza tra i periodi di un pendolo semplice calcolati alle temperature $t_1 = 30$ °C e $t_2 = 60$ °C se il pendolo batte il secondo $T_0 = 1$ s alla temperatura $t_0 = 0$ °C ed il coefficiente di dilatazione lineare della sostanza di cui è fatto il filo è $\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}?

SOLUZIONE

Detti rispettivamente T_0, T_1 e T_2 i periodi del pendolo alle temperature t_0, t_1e t_2 si ha:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0 \cdot (1 + \lambda t_1)}{g}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0 \cdot (1 + \lambda t_2)}{g}}$$

Ricavando L_0 dalla prima legge: $L_0 = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2}$

e sostituendolo nelle altre due si ha:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{T_0^2 g}{4\pi^2}\cdot(1+\lambda t_1)}{g}} = T_0\cdot\sqrt{1+\lambda t_1} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{T_0^2 g}{4\pi^2}\cdot(1+\lambda t_2)}{g}} = T_0\cdot\sqrt{1+\lambda t_2}$$

La differenza tra T_2 e T_1 ci darà la differenza tra i periodi del pendolo semplice calcolati alle temperature t_2 e t_1:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_0\cdot\sqrt{1+\lambda t_2} - T_0\cdot\sqrt{1+\lambda t_1} = T_0\cdot\left(\sqrt{1+\lambda t_2} - \sqrt{1+\lambda t_1}\right) =$$
$$1\cdot\left(\sqrt{1+2{,}4\cdot10^{-5}\cdot60} - \sqrt{1+2{,}4\cdot10^{-5}\cdot30}\right) = 3{,}7\cdot10^{-4}\,s$$

PROBLEMA

Un cilindro di ottone di sezione S = 20 cm^2 contiene una massa di 252 g di glicerina all'interno di un volume V_0 = 200 cm^3 di glicerina, compresso da un pistone di massa trascurabile che è schiacciato da una forza F = 600 N. Trascurando la dilatazione dell'ottone e supponendo di riscaldare il recipiente da t_1 = 60 °C a t_2 = 160 °C, calcolare:

1) Il lavoro meccanico compiuto dalla glicerina contro la forza F

2) La quantità di calore assorbita dalla glicerina ($\gamma = 5{,}3\cdot10^{-4}\ °C^{-1}$; c = 0,58 cal/g ·°C)

SOLUZIONE

1) Dato che la forza F agisce lungo la direzione h dello spostamento del pistone, il lavoro meccanico compiuto dall'espansione della glicerina è dato da:

$$L = F\cdot h$$

L'aumento di volume della glicerina lo calcoliamo come:

$$\Delta V = V_0\gamma\Delta t = 200\cdot5{,}3\cdot10^{-4}\cdot100 = 10{,}6cm^3$$

per cui il pistone si alza della quantità:

$$\Delta V = S\cdot h \Rightarrow h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{10{,}6}{20} = 0{,}53cm$$

In definitiva:

$$L = 600\cdot0{,}53\cdot10^{-2} = 3{,}18\ J$$

2) Applicando la legge fondamentale della calorimetria calcoliamo la quantità di calore assorbita dalla glicerina:

$$\Delta Q = mc\Delta t = 252\cdot0{,}58\cdot100 = 14{,}62\ \ kcal$$

PROBLEMA

Un calorimetro di rame (c_1=0,093 cal/g·°K) di massa m_1=108 g, contiene un olio (c_2=0,520 cal/g·°K) di massa m_2=800 g. Il liquido viene agitato con un mulinello che compie un lavoro L=8854,8 J e la temperatura del sistema si innalza di ΔT=5 °K.

- Calcolare l'equivalente meccanico del calore

SOLUZIONE

La quantità di calore assorbita dal calorimetro di rame è data da:

$$\Delta Q_1 = m_1 c_1 \Delta T = 108 \cdot 0{,}093 \cdot 5 = 50{,}22 cal$$

La quantità di calore assorbita dall'olio è data da:

$$\Delta Q_2 = m_2 c_2 \Delta T = 800 \cdot 0{,}520 \cdot 5 = 2080 cal$$

La quantità totale di calore assorbita dal sistema rame olio è:

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 50{,}22 + 2080 = 2130{,}22 cal$$

Pertanto, l'equivalente meccanico del calore,per definizione, è:

$$j = \frac{L}{\Delta Q} = \frac{8854{,}8}{2130{,}22} = 4{,}16 J / cal$$

PROBLEMA

Un soggetto con la febbre beve 0,200 litri di acqua alla temperatura di 10,0 °C. Sapendo che per raggiungere l'equilibrio termico con il corpo l'acqua ingerita assorbe una quantità di calore pari a 5,70 kcal, calcolare la temperatura dell'ammalato.

SOLUZIONE

La temperatura dell'ammalato la calcoliamo come formula inversa della legge fondamentale della termologia:

$$Q = mc\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{5{,}70 \cdot 10^3}{200 \cdot 1 \cdot} = 28{,}5°C \Rightarrow t = 10{,}0 + \Delta t = 10{,}0 + 28{,}5 = 38{,}5 \ °C$$

dove: c = 1,000 cal/g·°C 0,200 litri = 200 g

PROBLEMA

Una massa d'acqua alla temperatura di 17 °C cade da un'altezza di 900 m e tutta l'energia potenziale si converte alla fine in calore che riscalda l'acqua.

1. A quale temperatura (in °C) si troverà l'acqua dopo la caduta?
2. La temperatura finale dipende dalla massa dell'acqua che cade?
3. Sapresti dare una spiegazione in analogia alla caduta dei gravi?

SOLUZIONE

- **MODELLO FISICO**

Nell'ipotesi che non ci sia dispersione di calore all'esterno, ossia considerare il sistema massa d'acqua come un sistema isolato, l'energia potenziale posseduta dalla massa d'acqua dopo la caduta si trasforma in calore, che causa un aumento della sua temperatura, data l'equivalenza tra energia e calore (esperienza di Joule)

- **LEGGI ED EQUAZIONI**

L'energia potenziale U si converte totalmente in calore Q e sussiste la seguente relazione:

$$(1)\quad \frac{U}{Q} = 4{,}186\,\text{J/cal}$$

con:

$$U = mgh \qquad Q = mc(t_{eq} - t_0)$$

e dove

t_{eq} = temperatura di equilibrio t_0 = temperatura iniziale c = calore specifico dell'acqua

- **SOLUZIONE ALGEBRICA**

Sostituiamo nella (1) le espressioni corrispondenti:

$$\frac{mgh}{mc(t_{eq} - t_0)} = 4{,}186 \Rightarrow gh = 4{,}186 \cdot c(t_{eq} - t_0)$$

da cui si ricava la temperatura finale:

$$(2)\quad t_{eq} = \frac{gh + 4{,}186 \cdot ct_0}{4{,}186 \cdot c}$$

OSSERVAZIONE - Nei problemi di conservazione dell'energia meccanica l'energia potenziale di un corpo di massa m si trasforma integralmente in energia cinetica e la velocità finale non dipende dalla massa ($v = \sqrt{2gh}$).

Analogamente succede per i problemi in cui l'energia meccanica si trasforma in calore: la temperatura di equilibrio non dipende dalla massa del corpo coinvolto, come si evince dalla relazione (2).

- **SOLUZIONE NUMERICA**

Sostituendo nella (2) i valori dati si ottiene il valore della temperatura finale:

$$t_{eq} = \frac{9{,}8 \cdot 900 + 4{,}186 \cdot 10^3 \cdot 17}{4{,}186 \cdot 10^3} = 19{,}1\ °C$$

dove: $c = 10^3$ cal/kg·°C

PROBLEMA

Calcolare la temperatura di equilibrio di una massa d'acqua m_1=500 g che, inizialmente a 300 K, riesce a fondere completamente una massa m_2=100 g di ghiaccio

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che la quantità di calore ceduta dall'acqua più calda sia interamente assorbita dal ghiaccio per fondere e successivamente dall'acqua derivante dal ghiaccio fuso (acqua calda + ghiaccio + ghiaccio fuso = sistema isolato), si deve avere

$$Q_{ceduto} = Q_{assorbito}$$

Sostituiamo alle quantità di calore scambiate le loro espressioni matematiche (le variazioni di temperatura Δt vanno prese positive) e dall'equazione ottenuta ricaviamo la temperatura di equilibrio:

$$m_1 c_1 (T_{1i} - T_{eq}) = m_2 L_f + m_2 c_2 (T_{eq} - T_{2i})$$

$$627900 - 2093 T_{eq} = 33520 + 418{,}6 T_f - 114278$$

$$2512 T_{eq} = 708658 \Rightarrow T_f = \frac{708658}{2512} = 282\,K$$

PROBLEMA

In un recipiente termicamente isolato vengono mescolati 0,2 litri di acqua alla temperatura di 70 °C con 100 g di acqua alla temperatura di 40 °C.

- Determinare la temperatura finale di equilibrio, supponendo che la quantità di calore ceduta dall'acqua più calda sia interamente assorbita dall'acqua più fredda

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che la quantità di calore ceduta dall'acqua più calda sia interamente assorbita dall'acqua più fredda (acqua calda + acqua fredda = sistema isolato), la somma algebrica dei calori scambiati deve essere nulla:

$$\sum Q_i = 0 \Rightarrow -Q_1 + Q_2 = 0$$

dove Q_1 è negativo in quanto è calore ceduto e Q_2 è positivo in quanto è calore assorbito.

Sostituiamo alle quantità di calore scambiate le loro espressioni matematiche (le variazioni di temperatura Δt vanno prese positive) e dall'equazione ottenuta ricaviamo la temperatura finale di equilibrio:

$$-m_1 c (t_{1i} - t_{eq}) + m_2 c (t_{eq} - t_{2i}) = 0$$

$$-m_1 t_{1i} + m_1 t_{eq} + m_2 t_{eq} - m_2 t_{2i} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) t_{eq} = m_1 t_{1i} + m_2 t_{2i} \Rightarrow$$

$$t_{eq} = \frac{m_1 t_{1i} + m_2 t_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{200 \cdot 70 + 100 \cdot 40}{200 + 100} = 60\,^{\circ}C$$

PROBLEMA

In un recipiente contenente 0,920 kg di olio d'oliva (c_{olio} =1700 J/kg·°C) viene immerso un pezzo di 350 g di acciaio (c_{acc}=502 J/kg·°C). La temperatura iniziale dell'olio è di 15 °C, mentre quella di equilibrio raggiunta alla fine equivale a 21 °C.

- Calcolare la temperatura iniziale dell'acciaio

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che la quantità di calore ceduta dall'olio più caldo sia interamente assorbita dall'acciaio più freddo (acqua calda + acciaio freddo = sistema isolato), si deve avere

$$Q_{ceduto} = Q_{assorbito}$$

Sostituiamo alle quantità di calore scambiate le loro espressioni matematiche (le variazioni di temperatura Δt vanno prese positive) e dall'equazione ottenuta ricaviamo la temperatura iniziale dell'acciaio:

$$m_1 c_{acc}(t_{1i} - t_{eq}) = m_2 c_{olio}(t_{eq} - t_{2i}) \qquad (1)$$
$$m_1 c_{acc} t_{1i} - m_1 c_{acc} t_{eq} = m_2 c_{olio} t_{eq} - m_2 c_{olio} t_{2i}$$
$$m_1 c_{acc} t_{1i} = m_1 c_{acc} t_{eq} + m_2 c_{olio} t_{eq} - m_2 c_{olio} t_{2i}$$

$$t_{1i} = \frac{m_1 c_{acc} t_{eq} + m_2 c_{olio} t_{eq} - m_2 c_{olio} t_{2i}}{m_1 c_{acc}} = \frac{0{,}350 \cdot 502 \cdot 21 + 0{,}920 \cdot 1700 \cdot 21 - 0{,}920 \cdot 1700 \cdot 15}{0{,}350 \cdot 502} = 74{,}4°C$$

OSSERVAZIONE

Se si trovano difficoltà ad operare come sopra, si può trasformare la (1) in una semplice equazione numerica la cui soluzione dà la temperatura iniziale dell'acciaio:

$$m_1 c_{acc}(t_{1i} - t_{eq}) = m_2 c_{olio}(t_{eq} - t_{2i})$$

$$0{,}350 \cdot 502 \cdot (x - 21) = 0{,}920 \cdot 1700 \cdot (21 - 15)$$

$$176x - 3696 = 9384$$

$$176x = 13080 \Rightarrow x = \frac{13080}{176} = 74{,}4°C$$

PROBLEMA

Si consideri un corpo di capacità termica non costante, ma che dipenda dalla temperatura secondo una crescita lineare del tipo:

$$C(T) = aT + b \qquad \text{con} \quad a = 2{,}1\ J/K^2 \qquad b = 167{,}4\ J/K$$

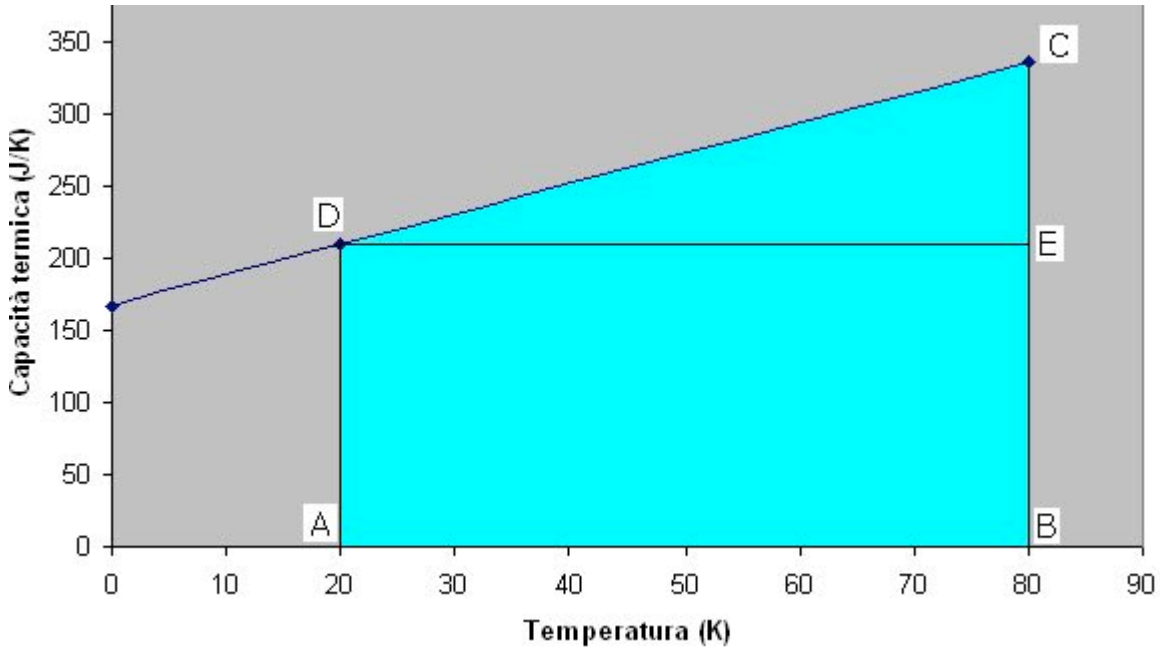
1. Disegnare sul piano cartesiano il grafico C(T);
2. Calcolare l'effettiva quantità di calore assorbita dal corpo quando la sua temperatura varia da T_1=20 °C a T_2=80 °C

SOLUZIONE

1. L'equazione da riportare sul grafico è la seguente:

$$C(T) = 2,1T + 167,4$$

che rappresenta, ovviamente, una retta:



2. La quantità di calore assorbita dal corpo quando la sua temperatura passa da T_1 = 20 °C a T_2 = 80 °C è data dall'area del trapezio ABCD:

$$Q = \text{Area} = \frac{BC + AD}{2} \cdot DE = \frac{909 + 783}{2} \cdot 60 = 50760\,J$$

dove:

$$BC = C(T_2) = 2,1 \cdot 353 + 167,4 = 909\,J/K \qquad AD = C(T_1) = 2,1 \cdot 293 + 167,4 = 783\,J/K$$

$$DE = T_2 - T_1 = 353 - 293 = 60\,K$$

Attenzione: per come le costanti "a" e "b" sono espresse, le temperatura vanno indicate in kelvin (K).

PROBLEMA

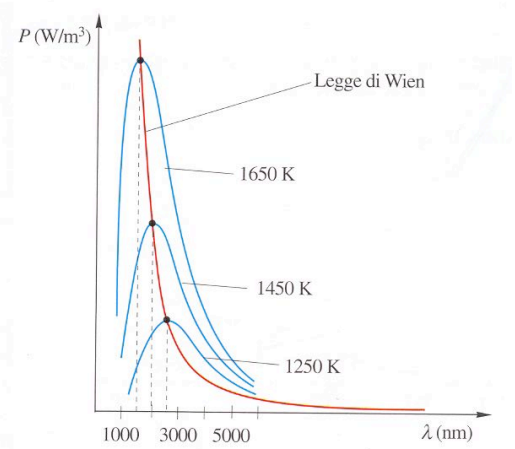
Determina la temperatura superficiale del Sole, nell'ipotesi di corpo nero, considerando che si registra un massimo di intensità di emissione di radiazioni alla lunghezza d'onda di 500 nm.

SOLUZIONE

- **MODELLO FISICO**

Nelle ipotesi di corpo nero, per ogni temperatura il massimo della curva di distribuzione spettrale si ha in corrispondenza di una particolare lunghezza d'onda, che risulta inversamente proporzionale alla temperatura stessa.

❑ **LEGGI ED EQUAZIONI**



Il massimo della curva è dato dalla legge di Wien:

$$\lambda T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}$$

❑ **SOLUZIONE NUMERICA**

La temperatura superficiale del Sole è:

$$T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}}{\lambda}$$

e quindi, sostituendo il valore di λ in corrispondenza del quale si ha un massimo di emissione si ottiene:

$$T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}} = 5796\ \text{K}$$

PROBLEMA

La temperatura di Rigel, una stella nella costellazione di Orione, è di 11800 K. Determinare qual è il colore più intenso che la stella emette.

SOLUZIONE

Considerando valide le ipotesi dell'esercizio precedente, dalla legge di Wien si ricava la lunghezza d'onda corrispondente alla massima emissione:

$$\lambda T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\text{mK} \Rightarrow \lambda = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}}{11800} = 245{,}6\ \text{nm}$$

La radiazione non cade nello spettro del visibile ma nell'ultravioletto (1 ÷ 400 nm)

❑ **CONSIDERAZIONI FINALI**

A seconda dell'intensità dello spettro luminoso le stelle si possono suddividere in tipi spettrali. Per esempio il Sole appartiene alla classe spettrale G, stelle con temperature superficiali comprese tra 4000 K e 6000 K, caratterizzate da righe spettrali che evidenziano la presenza di metalli e calcio. Rigel fa parte della classe spettrale A, con temperature tra 8000 K e 12000 K, che presentano le righe caratteristiche dell'idrogeno. Altre stelle di classe A sono Altari, Sirio e Vega. La Stella Polare è invece di classe F, stelle con temperature comprese tra 6000 K e 8000 K.

PROBLEMA

In una casa una parete di mattoni ($\lambda_{mattoni}$ = 0,81 W/m·K) di spessore 10 cm, ha una superficie di 20 m^2 e in una giornata invernale la differenza fra le temperature delle due facce è di 20 °C.

❑ Calcolare la rapidità con cui il calore attraversa la parete

SOLUZIONE

Il meccanismo di propagazione del calore attraverso la parete è la conduzione, per cui la legge della conduzione termica è:

$$\frac{Q}{\Delta\tau} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\Delta t}{L} \qquad (1)$$

Sostituendo nella (1) i dati del problema, ricaviamo la rapidità con cui il calore attraversa la parete:

$$\frac{Q}{\Delta\tau} = 0{,}81 \cdot 20 \cdot \frac{20}{0{,}1} = 3240 J/s$$

PROBLEMA

La parete esterna esposta al Sole di una stanza di 4m di larghezza per 3m di altezza, si trova alla temperatura uniforme di 50 °C. Il suo spessore è di 30 cm ed è costituita da mattoni ($\lambda_{mattoni}$ = 0,81 W/m·K).

- Determina la quantità di calore che un condizionatore deve asportare ogni secondo per mantenere all'interno della stanza una temperatura di 22 °C.

SOLUZIONE

Il meccanismo di propagazione del calore attraverso la parete è la conduzione, per cui la legge della conduzione termica è:

$$\frac{Q}{\Delta\tau} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\Delta t}{L} \qquad \text{da cui:} \qquad Q = \lambda \cdot S \cdot \frac{\Delta t}{L} \cdot \Delta\tau \qquad (1)$$

Sostituendo nella (1) ì dati del problema, calcoliamo la quantità di calore che il condizionatore deve asportare, ogni secondo, per mantenere costante la temperatura a 22 °C all'interno della stanza:

$$Q = 0{,}81 \cdot 12 \cdot \frac{(22 - 50)}{0{,}3} \cdot 1 = -907{,}2 J \qquad \text{dove: } S = 4 \cdot 3 = 12\ m^2$$

PROBLEMA

Una stanza ha una parete in pietra calcare ($\lambda_{calcare}$ = 2,20 W/m·K) dello spessore di 40 cm con una larghezza di 5,00 m e un'altezza di 3,50 m.
Se la temperatura della faccia interna è di 16 °C e vengono forniti alla stanza ogni ora $2{,}5 \cdot 10^6$J in termini di calore, quanto vale la temperatura esterna?

SOLUZIONE

Il meccanismo di propagazione del calore attraverso la parete è la conduzione, per cui la legge della conduzione termica è:

$$\frac{Q}{\Delta\tau} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\Delta t}{L} \qquad (1)$$

Ricaviamo dalla (1) la differenza di temperatura:

$$\Delta t = \frac{Q \cdot L}{\lambda \cdot S \cdot \Delta\tau} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}4}{2{,}20 \cdot 17{,}5 \cdot 3600} = 7{,}2°C$$

dove: $S = 5{,}00 \cdot 3{,}50 = 17{,}5\ m^2$ $\Delta\tau = 1$ ora $= 3600$ s

Dalla conoscenza della differenza di temperatura possiamo risalire al valore della temperatura esterna:

$$\Delta t = t_{interna} - t_{esterna} \Rightarrow t_{esterna} = t_{interna} - \Delta t = 16 - 7{,}2 = 8{,}8°C$$

PROBLEMA

Per una gita, alcuni ragazzi portano 2 bottiglie da 1,5 l di bibite fresche (calore specifico C_b = 3,98 kJ/(kg. K), densità ρ = 1,2 kg/l); essendo estate, la temperatura esterna è abbastanza alta (T_{est} = 38°C) e i ragazzi decidono preventivamente di mettere le bottiglie all'interno di una borsa termica, che presenta una superficie complessiva S = 1500 cm^2, uno spessore delle pareti d = 95 mm e una conducibilità k = $11{,}7 \cdot 10^{-2}$ W/(m. K). Se i ragazzi desiderano bere le bibite dopo 3 ore, almeno alla temperatura di 15 °C, quale temperatura ci deve essere inizialmente all'interno della borsa termica?

SOLUZIONE

La quantità di calore ceduta dalle bibite alla borsa termica è data da:

$$Q = m_b c_b (T_b - T_{int})$$

La quantità di calore ceduta per conduzione dalla borsa termica è data da:

$$Q = k \frac{S(T_{est} - T_{int})}{d} \tau$$

Dall'uguaglianza di queste due relazioni otteniamo un'equazione nell'incognita T_{int} (temperatura iniziale all'interno della borsa termica):

$$m_b c_b (T_b - T_{int}) = k \frac{S(T_{est} - T_{int})}{d} \tau$$

$$3{,}6 \cdot 3980 \cdot (15 - T_{int}) = \frac{0{,}117 \cdot 0{,}15 \cdot (38 - T_{int}) \cdot 10800}{0{,}095}$$

$$214920 - 14328 T_{int} = 75816 - 1995 T_{int}$$

$$12333 T_{int} = 139104 \Rightarrow T_{int} = \frac{139104}{12333} = 11{,}3°C$$

dove: $m_b = \rho V = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6 kg$

Attenzione: usare le unità di misura del SI.

PROBLEMA

Una piastra di acciaio, con conducibilità termica k = 46 W/(m · K), separa una sorgente di calore a 200 °C da una massa d'acqua m_a a 100 °C. Quanti litri d'acqua evaporano dopo un'ora, se la superficie di contatto tra la piastra e l'acqua è di 50 cm², con uno spessore di 0,25 mm?

■ MODELLO FISICO

La sorgente termica produce calore che attraversa la lastra di acciaio, per conduzione, e che viene scambiato con l'acqua la quale, essendo già a 100 °C, evapora immediatamente. La conducibilità termica misura quanto calore riesce a passare al secondo attraverso una superficie unitaria del materiale conduttore.

■ LEGGI ED EQUAZIONI

La legge che regola la conduzione del calore Q_s attraverso una superficie S di un lastra conduttrice di spessore d in un tempo Δt, quando tra le due facce opposte del conduttore si stabilisce una differenza di temperatura ΔT, è data dalla formula di Fourier:

$$Q_s = k\frac{S\,\Delta T\,\Delta t}{d}$$

Il calore condotto dalla lastra di acciaio è assorbito dalla massa m_a di acqua:

$$Q_a = m_a L_v$$

dove L_v è il calore latente di evaporazione.

■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Uguagliando la quantità di calore ceduta e quella assorbita si ottiene:

$$k\frac{S\,\Delta T\,\Delta t}{d} = m_a L_v$$

da cui si ricava la massa d'acqua m_a:

$$m_a = k\frac{S\,\Delta T\,\Delta t}{d\,L_v}$$

■ SOLUZIONE NUMERICA

Trasformando i dati forniti dal problema nelle unità di misura del S.I. si ha:

$$m_a = 46\ \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}\cdot\frac{5\cdot10^{-3}\ \text{m}^2\cdot(473{,}16-373{,}16)\ \text{K}\cdot 3600\ \text{s}}{2{,}5\cdot10^{-4}\ \text{m}\cdot 2{,}26\cdot10^{6}\ \text{J/kg}}\cong$$

$$\cong 146\ \text{kg}$$

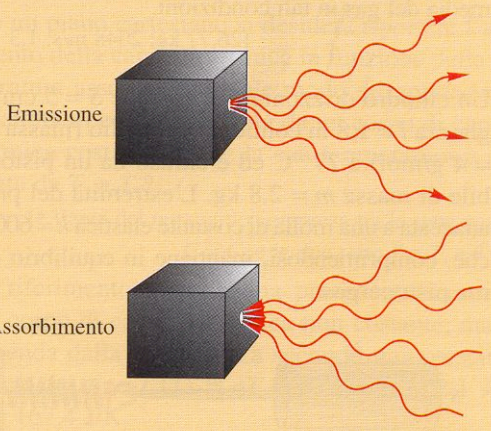
Poiché la massa di acqua contenuta in 1 litro equivale a 1 kg, evaporano 146 litri di acqua.

PROBLEMA

Un forno elettrico isolante può essere portato sino alla temperatura di 1800 °C. Praticando in esso un piccolo forellino di 1,2 cm², quanto calore si disperde dopo 4 minuti, nell'ipotesi che il forno si comporti come un corpo nero?

■ MODELLO FISICO

All'interno del forno, nell'ipotesi di corpo nero, si produce un'energia termica che si trasmette verso l'esterno non per conduzione o convezione ma per irraggiamento, ossia sotto forma di radiazione. Lo stesso meccanismo può avvenire in senso inverso, come assorbimento della radiazione termica da parte di un corpo.



■ LEGGI ED EQUAZIONI

L'energia emessa (o assorbita) da un oggetto è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, secondo la legge di Stefan-Boltzmann:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \varepsilon\,\sigma\,S\,T^4$$

dove I è la potenza emessa sotto forma di radiazione termica, Q è la quantità di calore (espressa in joule) emessa o assorbita, Δt l'intervallo di tempo durante il quale avviene l'irraggiamento, ε il coefficiente di emissione pari alla frazione dell'energia irradiata ($0 < \varepsilon < 1$, con $\varepsilon = 1$ nell'ipotesi di corpo nero), $\sigma = 5{,}6703\cdot10^{-8}\ \text{W/(m}^2\cdot\text{K}^4)$ è la costante di Stefan ed S è la superficie interessata alla radiazione.

■ SOLUZIONE

Ricaviamo la quantità di calore Q dalla legge di Stefan-Boltzmann, ricordando che la temperatura T è espressa in kelvin:

$$Q = \varepsilon\,\sigma\,S\,T^4\Delta t = 5{,}67\cdot10^{-8}\ \text{W/(m}^2\cdot\text{K}^4)\cdot 1{,}2\cdot10^{-4}\text{m}^2\cdot(2073\ \text{K})^4\cdot 240\ \text{s}\cong 30156\ \text{J}$$