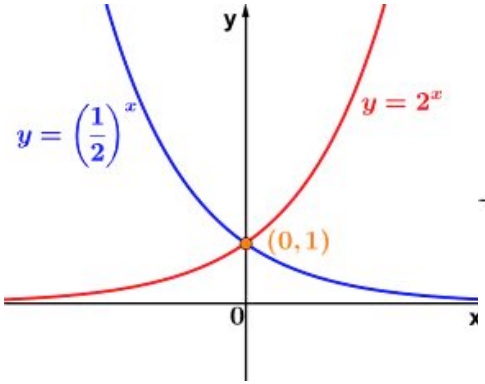
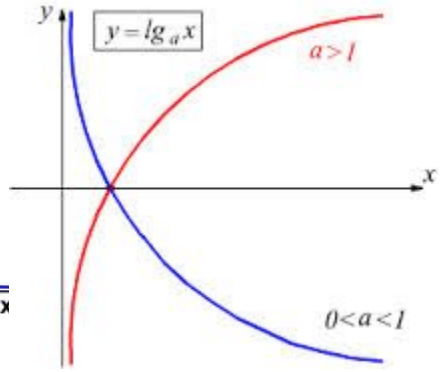
Matematica

ESPONENZIALI e LOGARITMI

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica





ESPONENZIALI

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

Le potenze con esponente intero		
a^x se…	…è definita per…	Esempio
$x > 0$	$\forall\, a$	$(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}; 0^3 = 0.$
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1; 0^0$ non si definisce.
$x < 0$	$a \neq 0$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

Le potenze con esponente razionale		
a^x se…	…è definita per…	Esempio
$x > 0$	$a \geq 0$	$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}; 0^{\frac{1}{2}} = 0.$
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1; 0^0$ non si definisce.
$x < 0$	$a > 0$	$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$

Quando gli esponenti sono razionali, la base delle potenze non può essere negativa.

Le proprietà delle potenze	
Definizione $a, b \in \mathbb{R}^+, \quad x, y \in \mathbb{R}$	**Esempio**
I. Prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$10^{4\sqrt{3}} \cdot 10^{-\sqrt{27}} = 10^{\sqrt{3}}$
II. Quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$
III. Potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(6^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$
IV. Prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\left(\frac{2}{3}\right)^\pi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^\pi$
V. Quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$	$\left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

teorema

All'aumentare dell'esponente reale x, la potenza a^x:

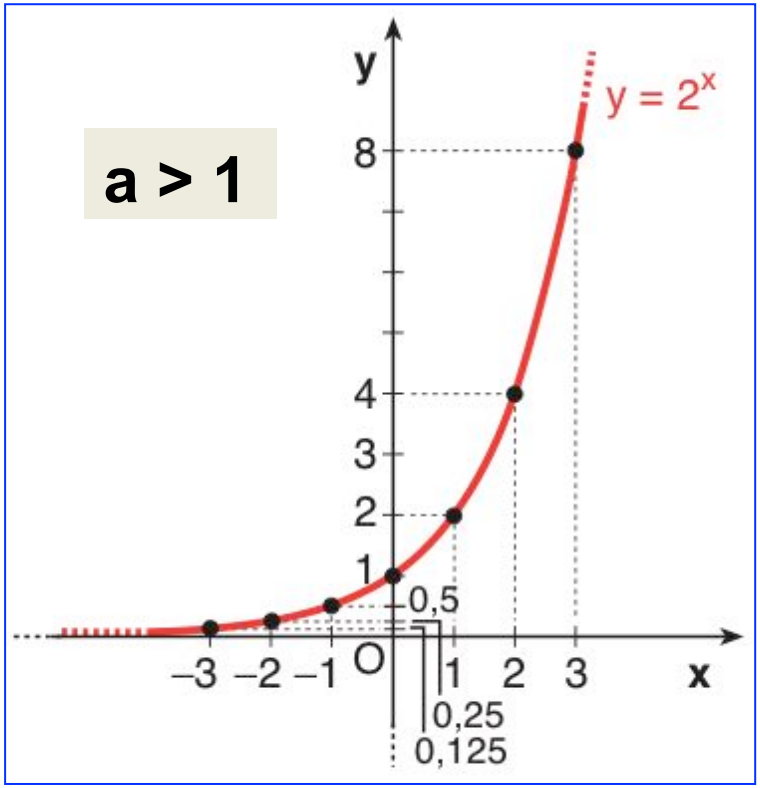
- ✓ aumenta se $a>1$
- ✓ diminuisce se $0<a<1$

definizione

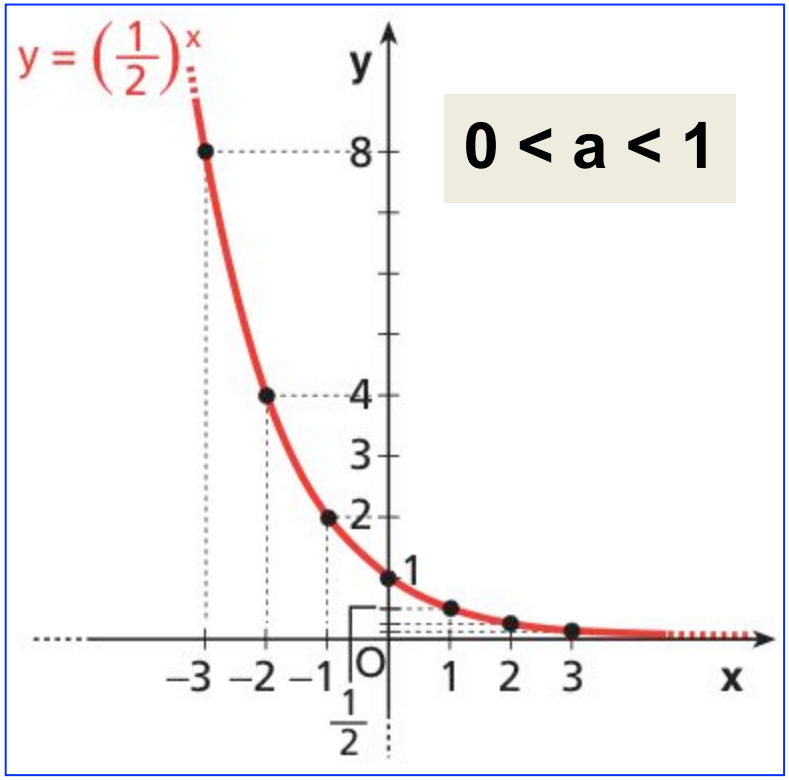
Si chiama funzione esponenziale ogni funzione del tipo:

$$y = a^x \qquad a \in \Re^+$$

Al variare di a si hanno tre possibili andamenti:

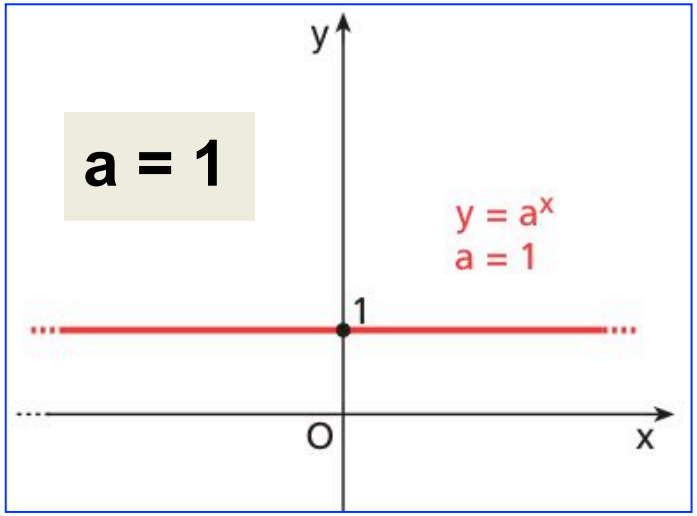


x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



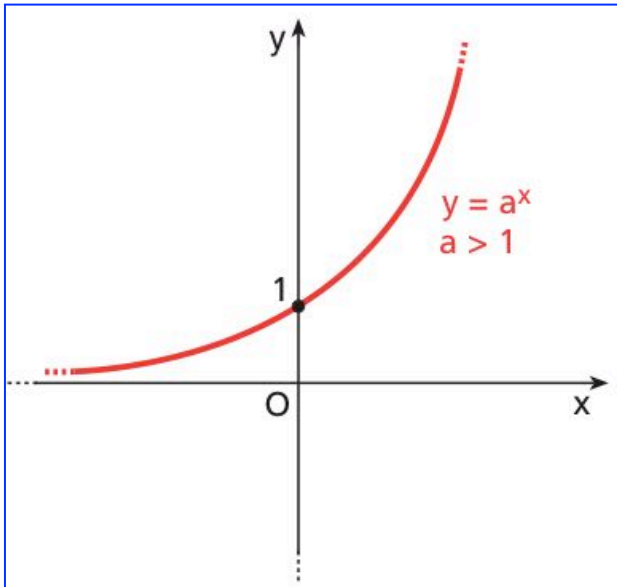
0 < a < 1

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

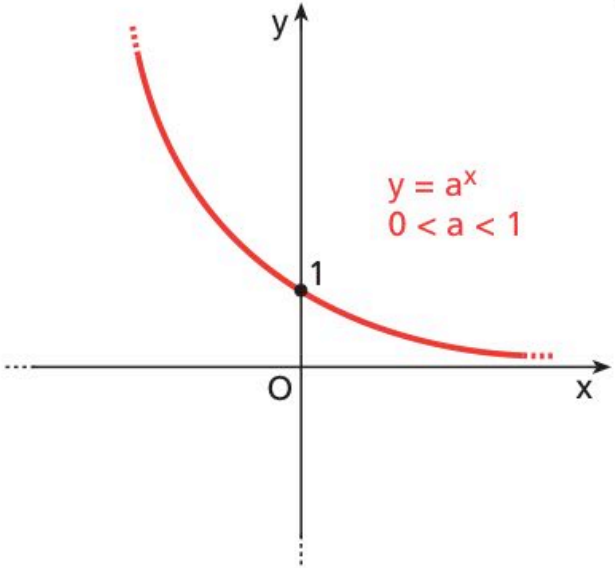


a = 1

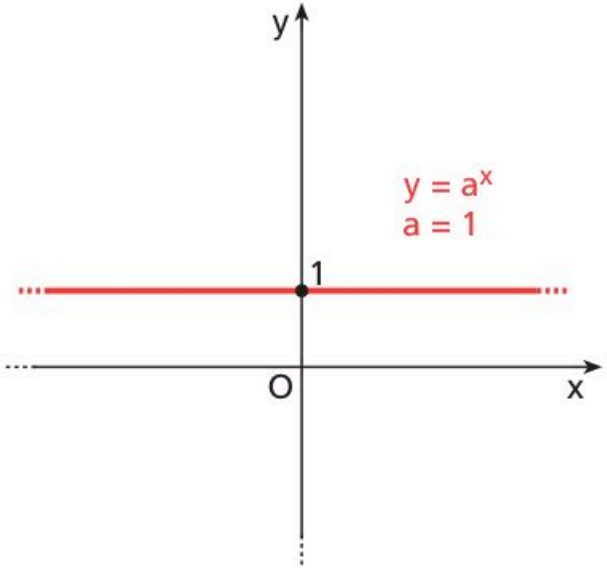
proprietà della funzione esponenziale



a. • Dominio: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\mathbb{R}^+$;
• funzione crescente in $\mathbb{R}$;
• funzione biiettiva;
• $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
• $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



b. • Dominio: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\mathbb{R}^+$;
• funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
• funzione biiettiva;
• $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
• $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.



c. • Dominio: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\{1\}$;
• funzione costante;
• funzione non iniettiva.

La definizione di potenza a esponente reale permette di estendere il concetto di funzione e forme del tipo:

$$y = \left[f(x) \right]^{g(x)} \qquad a \in \Re^{+}$$

$$dominio \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ dominio \ di \ g(x) \end{cases}$$

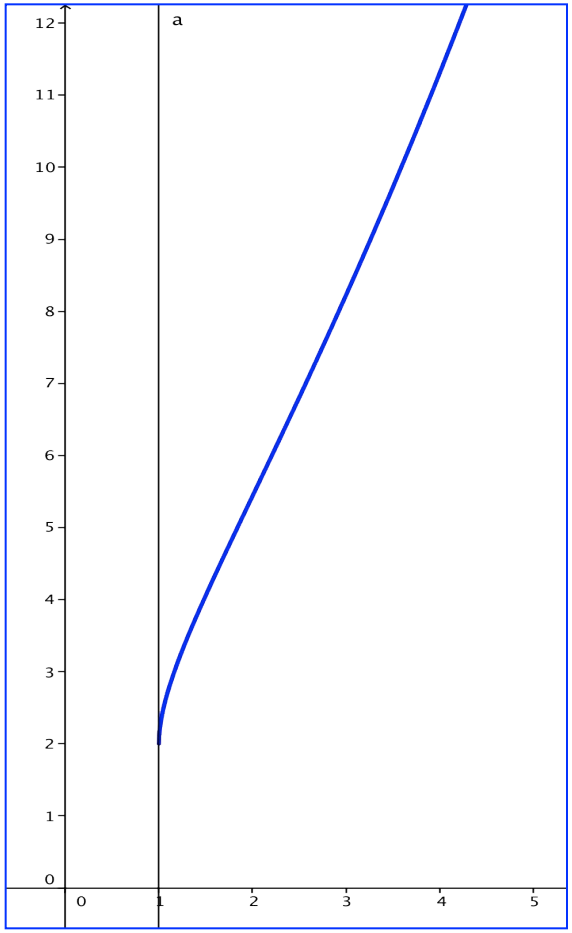
ESERCIZI

Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

$$y = 2^{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} 2 > 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \geq 1$$

dominio

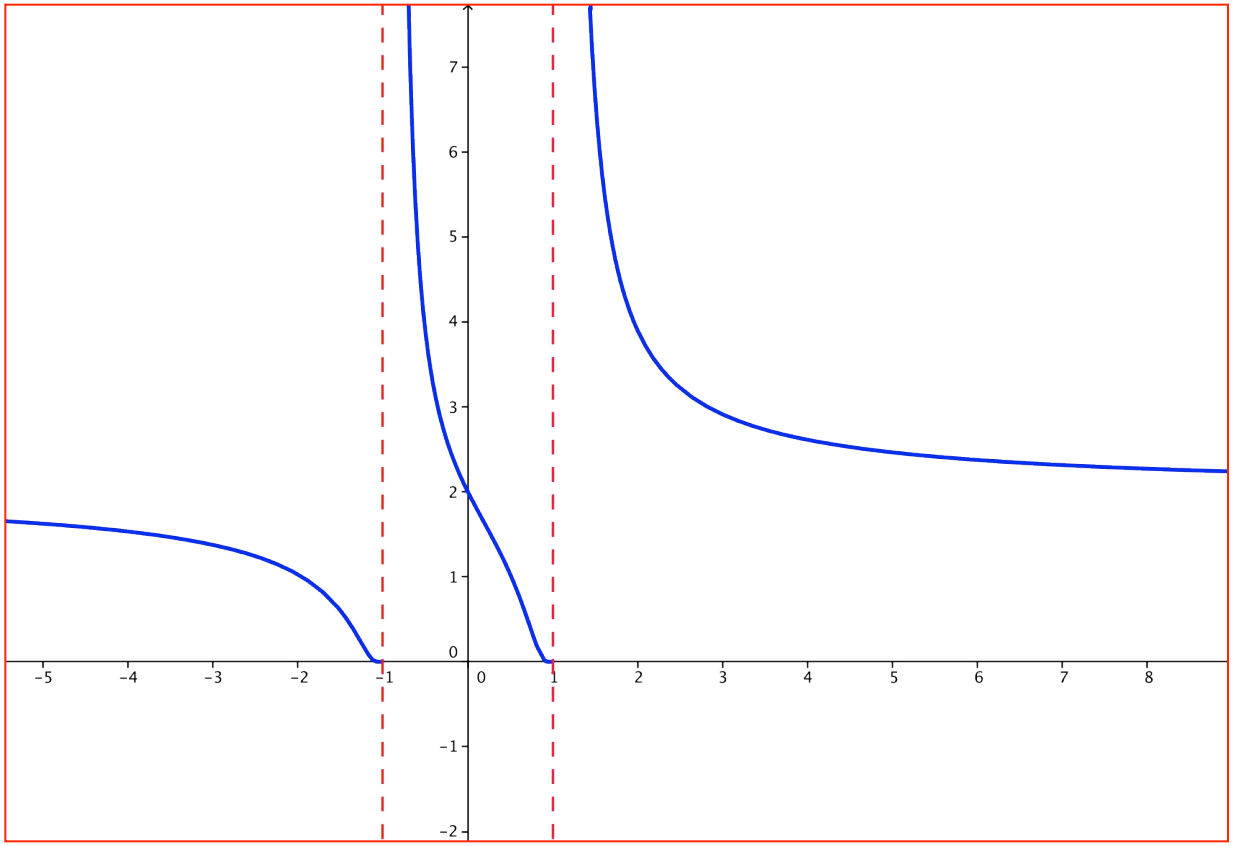
$$D = [1; +\infty[$$



$$y = 2^{\frac{x}{x^2-1}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} 2 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \neq \pm 1$$

dominio

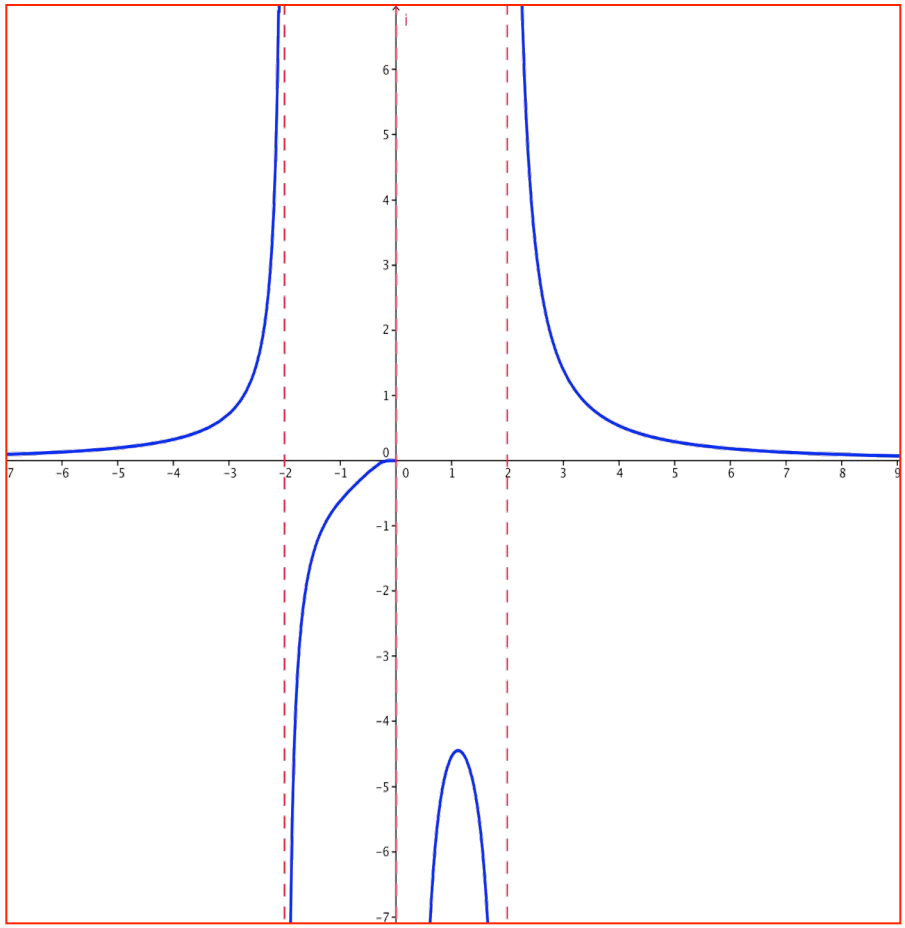
$$D = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$



$$y = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2 - 4} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \neq \pm 0 \cup x \neq \pm 2$$

dominio

$$D =]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

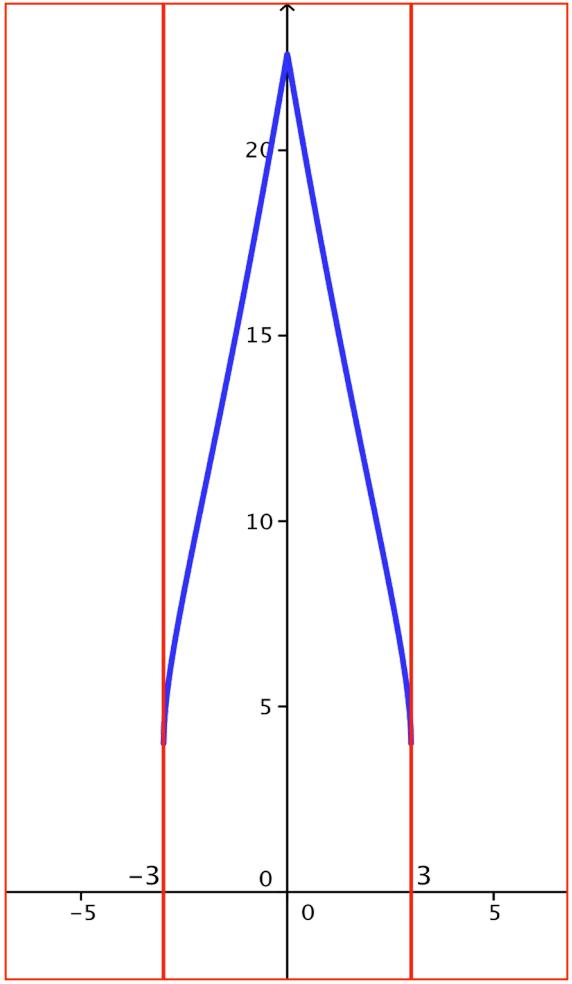


$$y = 4^{\sqrt{3-|x|}} \xrightarrow{dominio} 3-|x| \geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{valore assoluto}]{\text{definizione}} \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3+x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} -3 \leq x \leq 3$$

dominio

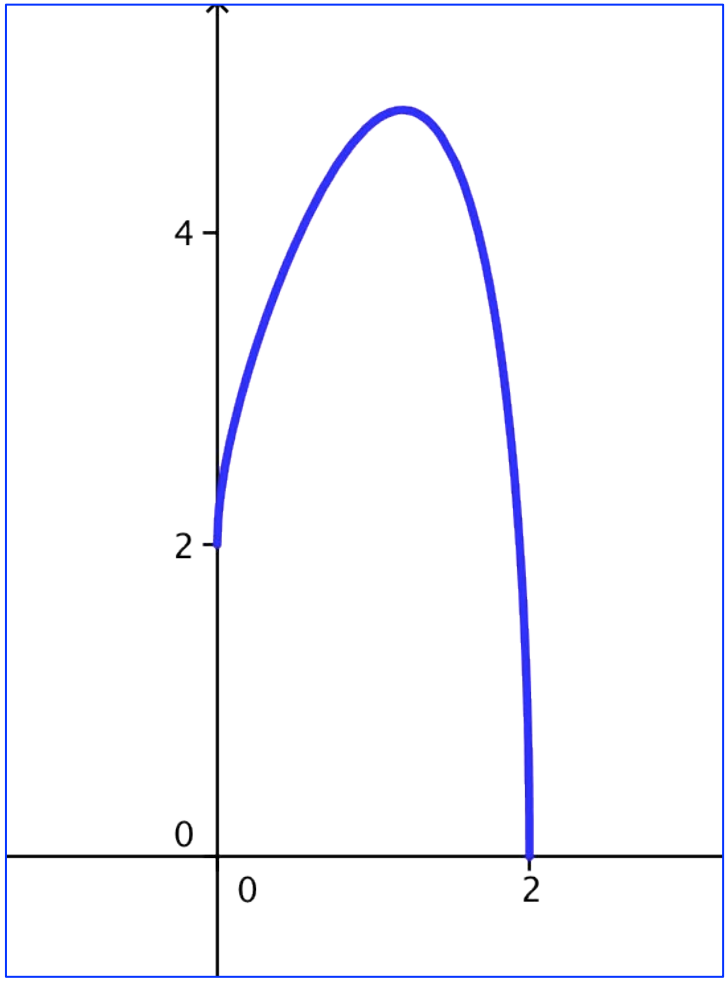
$$D = [-3;3]$$



$$y=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^{\sqrt{x}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} 0 \leq x < 2$$

dominio

$$D=[0;2[$$

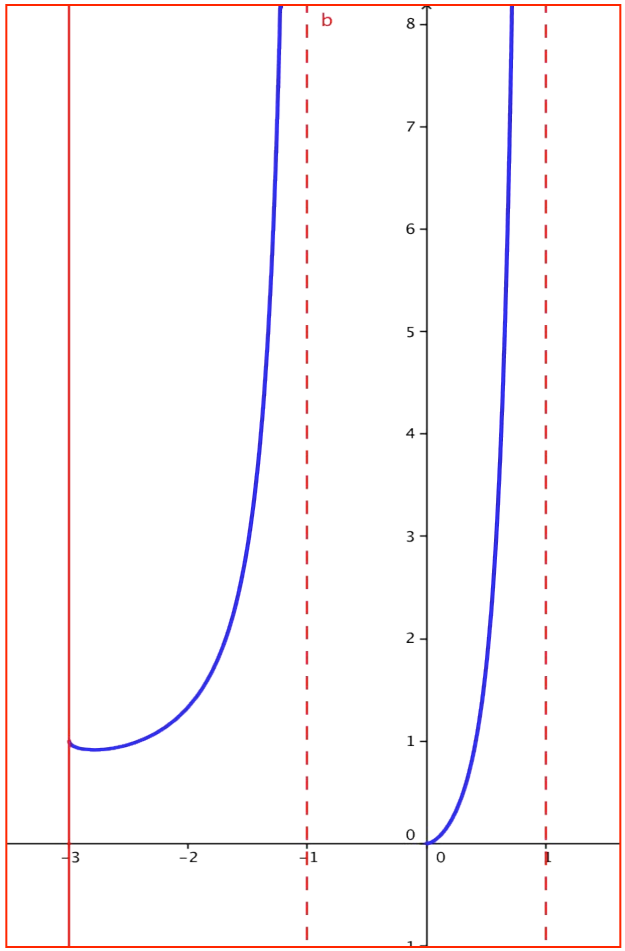


$$y=\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{\sqrt{x+3}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x^2}>0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-1 \cup 0<x<1 \\ x\geq -3 \end{cases}$$

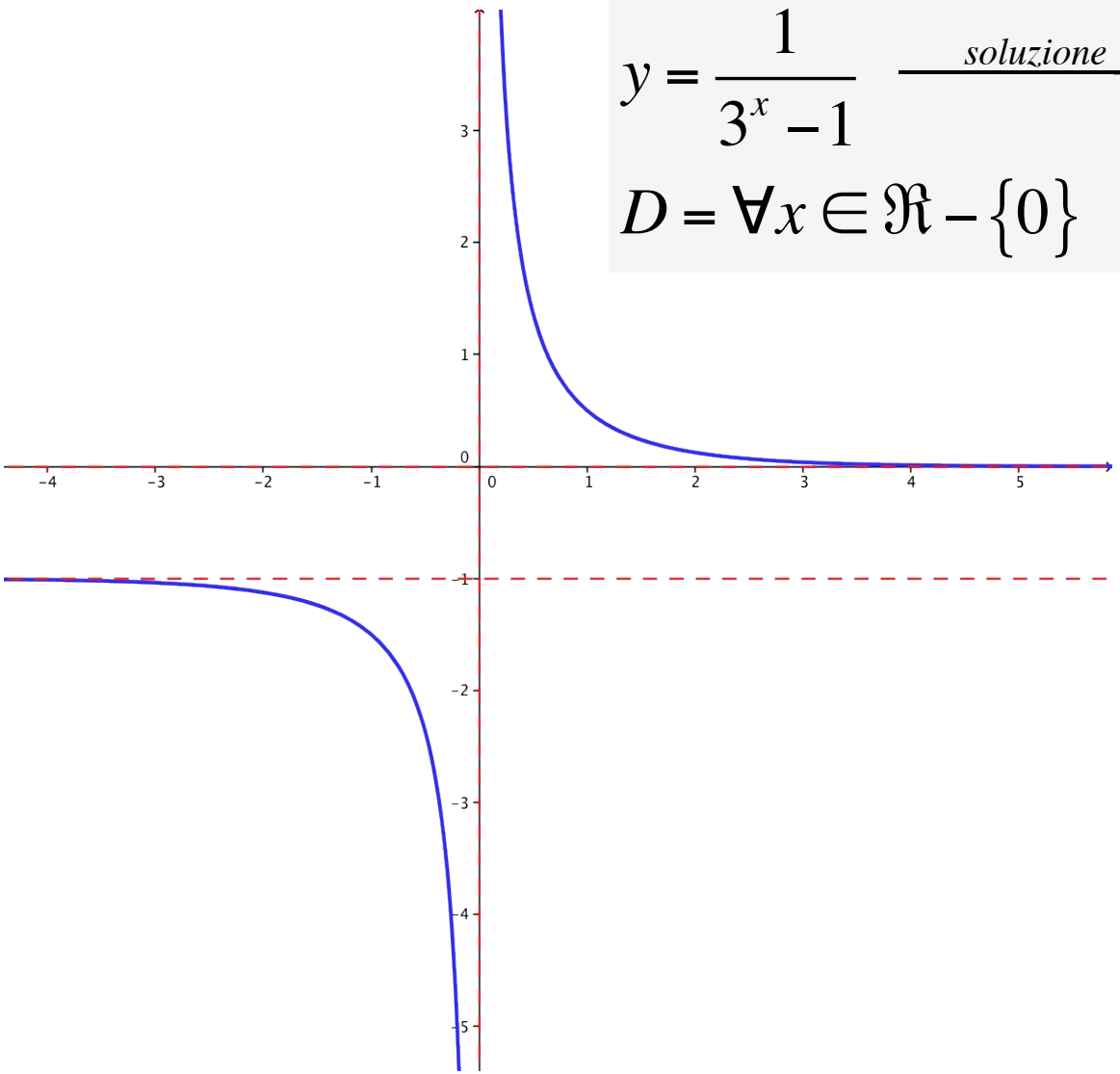
$$\xrightarrow{soluzione} -3\leq x<-1 \cup 0<x<1$$

dominio

$$D=[-3;-1[\cup]0;1[$$

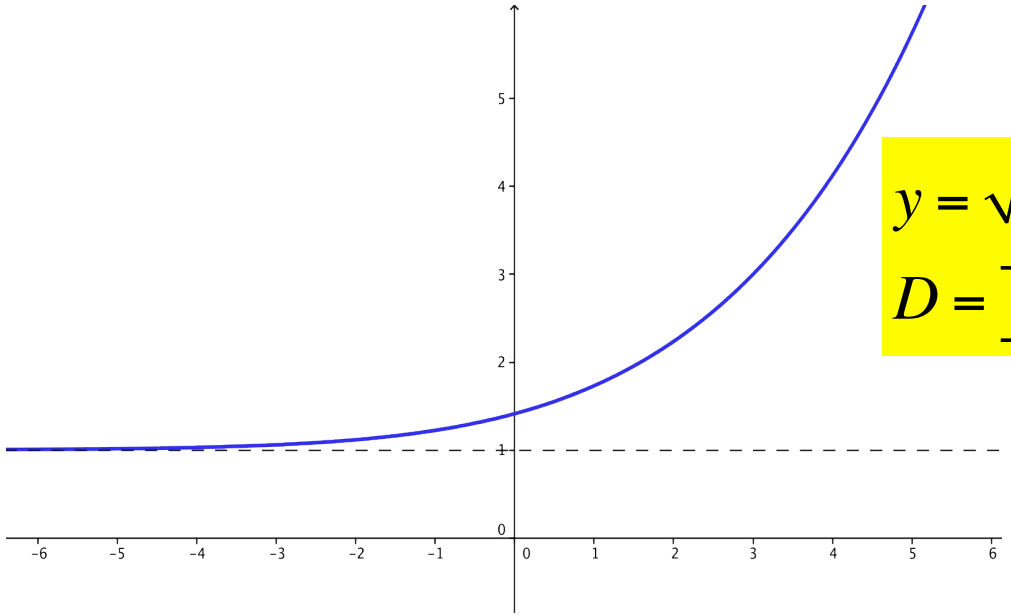


Dalla rappresentazione grafica, indicare dominio e codominio



$$y = \frac{1}{3^x - 1} \xrightarrow{soluzione} x \neq 0;\ y < 1 \vee y > 0$$

$$D = \forall x \in \Re - \{0\} \qquad C = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]0; +\infty\right[$$

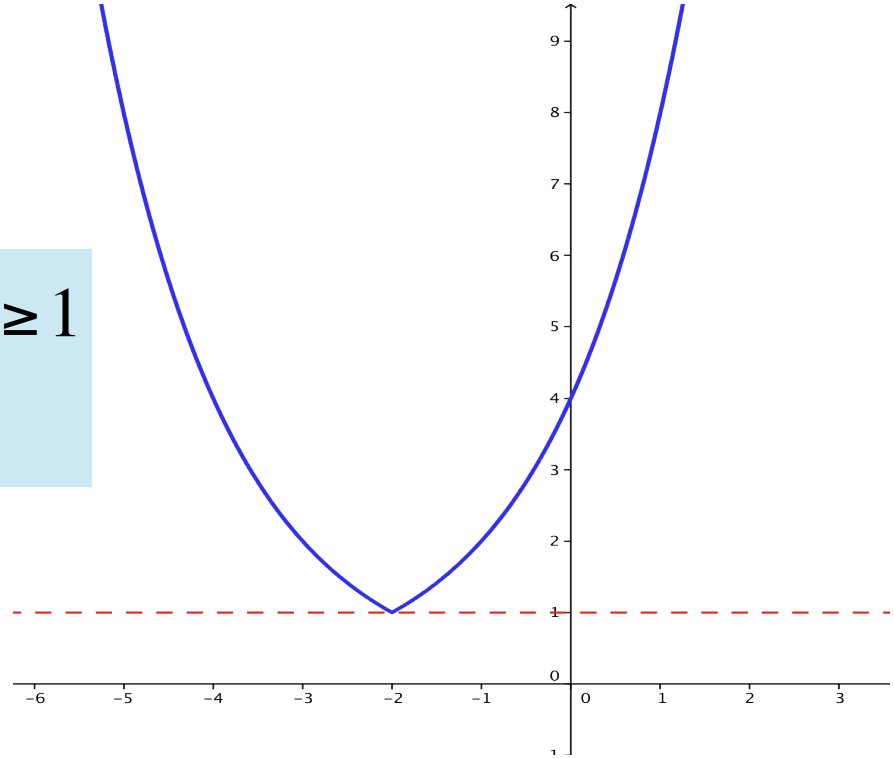


$$y = \sqrt{2^x + 1} \xrightarrow{soluzione} \forall x \in \Re;\ y > 1$$

$$D = \left]-\infty; +\infty\right[\qquad C = \left]1; +\infty\right[$$

$$y = 2^{|2+x|} \xrightarrow{soluzione} \forall x \in \Re;\ y \geq 1$$

$$D = \left]-\infty; +\infty\right[\qquad C = \left[1; +\infty\right[$$



definizione

Un'equazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente

$$a^x = b \quad con \;\; a > 0$$

Soluzioni di un'equazione esponenziale

$$a^x = b \;\; \text{determinata} \;\; se \;\; a, b > 0 \;\; e \;\; a \neq 1$$

$$a^x > 0 \quad \forall x \in \Re \xrightarrow{quindi} a^x = b \;\; impossibile \;\; se \;\; b \leq 0$$

$$a^x = b \;\; \text{indeterminata} \;\; se \;\; a = 1 \;\; e \;\; b = 1$$

ESERCIZI

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali riducendo i due membri dell'equazione a potenze di uguale base.

$$5^x = 125 \xrightarrow[\text{stessa base}]{\text{ridurre alla}} 5^x = 5^3 \xrightarrow{\text{proprietà potenze}} x = 3$$

$$5^x = \frac{1}{125} \xrightarrow[\text{stessa base}]{\text{ridurre alla}} 5^x = \frac{1}{5^3} \rightarrow 5^x = 5^{-3} \xrightarrow{\text{proprietà potenze}} x = -3$$

$$27 \cdot 3^x = 9^{2x} \rightarrow 3^3 \cdot 3^x = 3^{2 \cdot 2x} \xrightarrow[\text{proprietà potenze}]{\text{riduzione alla stessa base}} 3^{3+x} = 3^{4x}$$

$$\xrightarrow{\text{proprietà potenze}} 3 + x = 4x \xrightarrow{\text{soluzione}} x = 1$$

$$2^x + 9 \cdot 2^x = 40 \xrightarrow[\text{termini simili}]{\text{somma}} 10 \cdot 2^x = 40 \rightarrow 2^x = 4 \xrightarrow[\text{potenze}]{\text{proprietà}} x = 2$$

$$8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}} \xrightarrow[\text{in potenza}]{\text{ridurre alla stessa base trasformare radice}} 2^{3(x-1)} = 2^{\frac{x-3}{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{proprietà potenze}} 3(x-1) = \frac{x-3}{3} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}} \xrightarrow[\text{stessa base}]{\text{ridurre alla}} \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{x-1}{x}} \xrightarrow[\text{potenze}]{\text{proprietà}} x-1 = -\frac{x-1}{x} \quad con\ x \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{calcoli}} x^2 = 1 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm 1\ accettabile$$

$$2^x + 2^{x+1} = -2^{x-1} + 7 \xrightarrow[\text{potenze}]{\text{proprietà}} 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 7 \xrightarrow{\text{calcoli}} \left(1 + 2 + \frac{1}{2}\right)2^x = 7 \rightarrow \frac{7}{2} \cdot 2^x = 7$$

$$\rightarrow \frac{2^x}{2} = 1 \rightarrow 2^{-1} \cdot 2^x = 1 \xrightarrow[\text{potenze}]{\text{proprietà}} 2^{x-1} = 2^0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$8^{x-\frac{2}{3}} = \sqrt{2^{x+1}} \xrightarrow[\text{stessa base}]{\text{ridurre alla}} 2^{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} = 2^{\frac{x+1}{2}} \xrightarrow[\text{potenze}]{\text{proprietà}} 3\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{x+1}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = 1$$

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

$$6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15$$

Applichiamo la proprietà delle potenze: $6 \cdot 3^x - \frac{3^2}{3^x} = 15$

Introduciamo l'incognita ausiliaria z ponendo $z=3^x$ nell'equazione:

$$6z - \frac{9}{z} = 15 \xrightarrow{calcoli} 2z^2 - 5z - 3 = 0 \xrightarrow{soluzione} z_1 = -\frac{1}{2} \quad z_2 = 3$$

In definitiva:

$$3^x = -\frac{1}{2} \quad impossibile$$

$$3^x = 3 \xrightarrow{soluzione} x = 1$$

Perché una funzione esponenziale è sempre positiva

$$4^x = 2^x - 2 \rightarrow 2^{2x} - 2^x + 2 = 0 \xrightarrow{z=2^x} z^2 - z + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{risolviamo} S = \varnothing \ non \ ammette \ soluzione$$

$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320 \xrightarrow[potenze]{proprietà} 2^3 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^{2x} - 320 = 0 \xrightarrow{z=2^x} 4z^2 + 8z - 320 = 0$$

$$\xrightarrow{risolviamo} z_1 = -10 \quad z_2 = 8 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} 2^x = -10 \rightarrow impossibile \\ 2^x = 8 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$10^x - 2^x - 5^x + 1 = 0 \xrightarrow[potenze]{proprietà} 2^x \cdot 5^x - 2^x - 5^x + 1 = 0 \xrightarrow{soluzione} x = 0$$

perché $a^0=1$, per cui, l'equazione è soddisfatta per x=0.

$$\frac{9^x + 9}{3^x} = 10 \rightarrow \frac{3^{2x}}{3^x} + \frac{9}{3^x} = 10 \xrightarrow[potenze]{proprietà} 3^x + \frac{9}{3^x} - 10 = 0 \xrightarrow{z=3^x} z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{risolviamo} z_1 = 9 \quad z_2 = 1 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} 3^x = 9 \rightarrow x = 2 \\ 3^x = 1 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\left|8^x-2\right|=\sqrt{2^{3x}} \xrightarrow[\text{valore assoluto}]{\text{definizione}} \begin{cases} 8^x-2=\sqrt{2^{3x}} \quad se \;\; 8^x-2\geq 0 \rightarrow 2^{3x}\geq 2 \rightarrow 3x\geq 2 \rightarrow x\geq \dfrac{2}{3} \\ -(8^x-2)=\sqrt{2^{3x}} \quad se \;\; 8^x-2<0 \rightarrow x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$2^{3x}-2=\sqrt{2^{3x}} \xrightarrow{z=2^{3x}} z-2=\sqrt{z} \xrightarrow{risolviamo} (z-2)^2=z \rightarrow z_1=4 \quad z_2=1$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} 2^{3x}=4 \rightarrow 3x=2 \rightarrow x=\dfrac{2}{3} \; accettabile \\ 2^{3x}=1 \rightarrow x=0 \; non \; accettabile \end{cases}$$

$$-(2^{3x}-2)=\sqrt{2^{3x}} \xrightarrow{z=2^{3x}} -z+2=\sqrt{z} \xrightarrow{risolviamo} (-z+2)^2=z \rightarrow z_1=4 \quad z_2=1$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} 2^{3x}=4 \rightarrow 3x=2 \rightarrow x=\dfrac{2}{3} \; non \; accettabile \\ 2^{3x}=1 \rightarrow x=0 \; accettabile \end{cases}$$

L'equazione ammette come soluzione:

$$x=\frac{2}{3} \vee x=0$$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni esponenziali.

$$\begin{cases} 2^x + y = 0 \\ 4^x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2^x \\ y = 2 - 4^x \end{cases} \xrightarrow{metodo\ \ confronto} -2^x = 2 - 4^x$$

$$\xrightarrow{z=2^x} z^2 - z - 2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1 \\ z_2 = -1 \rightarrow 2^x = -1 \rightarrow impossibile \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[sistema]{soluzione} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2^{x-y} = 64 \end{cases} \xrightarrow[\text{sostituzione}]{\text{metodo}} \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2^{x-3+2x} = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{calcoli}} \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2^{3x-3} = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ \dfrac{2^{3x}}{2^3} = 64 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2^{3x} = 512 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2^{3x} = 2^9 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = 3$$

$$\xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} \begin{cases} y = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

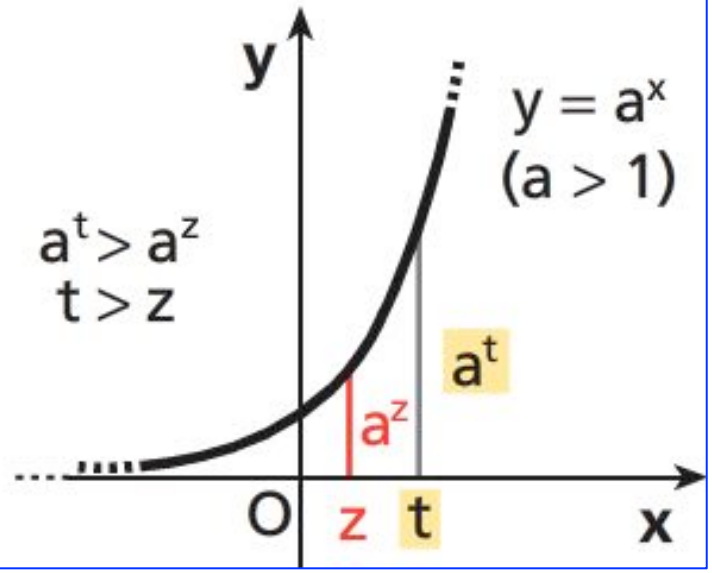
definizione

Una disequazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente

$$a^x > b \qquad a^x < b$$

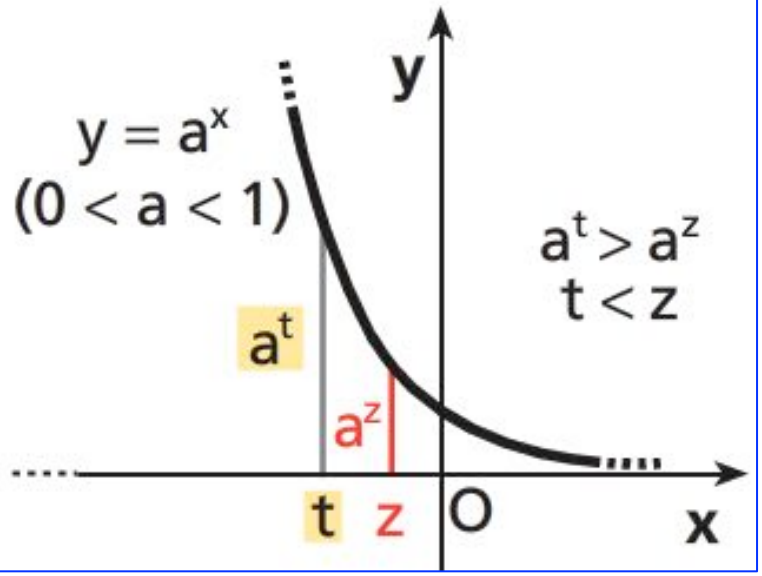
Se $a > 1$, allora

$$\boxed{a^t > a^z \quad \Leftrightarrow \quad t > z.}$$



Se $0 < a < 1$, allora

$$\boxed{a^t > a^z \quad \Leftrightarrow \quad t < z.}$$



ESERCIZI

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali, riducendo i due membri a potenze della stessa base

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8} \xrightarrow[\text{alla stessa base}]{\text{riduzione}} \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^3 \xrightarrow[a>1]{\text{soluzione}} x < 3$$

$$3^{2x+2} < \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{stessa base}]{\text{riduzione}} 3^{2x+2} < 3^{-1} \xrightarrow[a>1]{\text{proprietà potenze}} 2x+2 < -1 \xrightarrow{\text{soluzione}} x < -\frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64 \xrightarrow[a>1]{\text{riduzione stessa base}} (4)^{-(x-1)} < 4^3 \xrightarrow{\text{proprietà potenze}} -(x-1) < -3 \rightarrow x-1 > 3 \xrightarrow{\text{soluzione}} x > -2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2} \xrightarrow{\text{riduzione stessa base}} \left(\frac{5}{2}\right)^{-(x+3)} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2} \xrightarrow[a<1]{\text{proprietà potenze}} -(x+3) < x-2$$

$$x+3 > -x+2 \xrightarrow{\text{soluzione}} x > -\frac{1}{2}$$

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali attraverso l'introduzione di un'incognita ausiliaria.

$$3^x - 2\cdot 3^{2-x} < 7 \xrightarrow[\text{potenze}]{\text{proprietà}} 3^x - 2\cdot\frac{3^2}{3^x} - 7 < 0 \xrightarrow{z=3^x} z - \frac{18}{z} - 7 < 0$$

$$z^2 - 7z - 18 < 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} -2 < z < 9 \xrightarrow[\text{disequazione esponenziale}]{\text{soluzione}} -2 < 3^x < 9$$

$$\xrightarrow[\text{al sistema}]{\text{equivalente}} \begin{cases} 3^x > -2 \\ 3^x < 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} \forall x \in \Re \\ x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} x < 2$$

$$\frac{1}{3^x - 9} - \frac{1}{3^x + 1} > 0 \xrightarrow{z=3^x} \frac{1}{z-9} - \frac{1}{z+1} > 0 \xrightarrow{\text{calcoli}} \frac{10}{(z-9)(z+1)} > 0$$

$$\xrightarrow[\text{diseq. fratta}]{\text{soluzione}} z < -1 \vee z > 9 \xrightarrow[\text{disequazione esponenziale}]{\text{soluzione}} \left[\begin{array}{l} 3^x < -1 \rightarrow \textit{impossibile} \\ 3^x > 9 \rightarrow x > 2 \end{array}\right. \Rightarrow x > 2$$

$$9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \le 0 \xrightarrow{z=\left(\frac{2}{3}\right)^x} 9z + 2 + \frac{4}{z} < 0$$

$$9z^2 + 2z + 4 < 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} \textit{nessuna soluzione}: S = \varnothing$$

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni esponenziali.

$$\begin{cases} 3^{2x-1} > 3 \\ 5^{x^2-4} \le 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{singole disequazioni}]{\text{risolvere le}} \begin{cases} 2x-1>1 \\ x^2-4 \le 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione sistema}} 1 < x \le 2$$

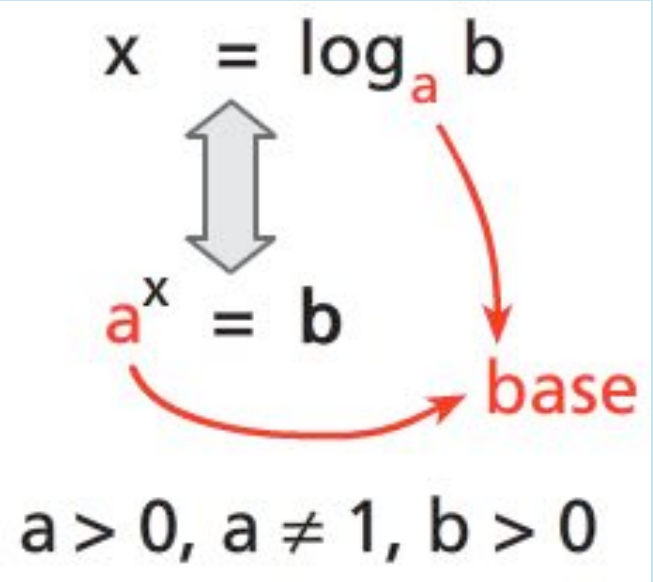
$$\begin{cases} 5^{2x-1} - 25 > 0 \\ \dfrac{3^x+1}{3^x-1} \ge 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{singole disequazioni}]{\text{risolvere le}} \begin{cases} 5^{2x-1} > 25 \\ \dfrac{z+1}{z-1} \ge 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-1>2 \\ z \ge 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ 3^x \ge 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione sistema}} x > \frac{3}{2}$$

LOGARITMI

definizione

Dati due numeri reali e positivi (a,b con a≠1), si chiama logaritmo in base a di b l'esponente x da assegnare alla base per ottenere il numero b (argomento del logaritmo).



esempio

$$5^x = 25 \xrightarrow{equivalente} x = \log_5 25 = 2$$

$$2^x = 7 \xrightarrow{equivalente} x = \log_2 7$$

2. PROPRIETA' DEI LOGARITMI

proprietà

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi (b,c) è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

proprietà

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi (b,c) è uguale alla differenza dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

proprietà

Il logaritmo della potenza di un numero b>0 elevato a un esponente reale n è uguale al prodotto di n per il logaritmo di b:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

esempio

$$\log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$$

$$\log_3\left(\frac{729}{9}\right) = \log_3 729 - \log_3 9 = 6 - 2 = 4$$

$$\log_3 9^4 = 4 \cdot \log_3 9 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\log_{10}\sqrt{6} = \log_{10} 6^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 6$$

La formula del cambiamento di base

Quando a e b possono essere scritti come potenze della stessa base, allora il logaritmo è un numero intero o razionale:

$$\log_5 125 = 3 \xrightarrow{perchè} 5^3 = 125 \qquad \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \xrightarrow{perchè} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

Non sempre, però, è possibile esplicitare il logaritmo:

$$\log_3 8 = ? \xrightarrow{perchè} 3^? = 8$$

Le calcolatrici possono calcolare i logaritmi in *base 10* e in *base e* (e=2,718… numero irrazionale chiamato numero di Nepero):

$$\log x \rightarrow \log aritmo\ decimale$$

$$\ln x \rightarrow \log aritmo\ naturale\ o\ neperiano$$

E, allora, come possiamo esprimere questo logaritmo attraverso un numero?

proprietà

Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

esempio

Calcolare il seguente logaritmo:

$$x = \log_3 14 = ?$$

Il logaritmo non è decimale e né neperiano, per cui utilizziamo il cambiamento di base (per esempio trasformiamolo in base 10) per poterlo calcolare con la calcolatrice:

$$x = \log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3} = \frac{1{,}146128}{0{,}477121} \cong 2{,}402$$

ESERCIZI

Riscrivere le seguenti uguaglianze, usando i logaritmi.

$$2^5 = 32 \xrightarrow{equivalente} \log_2 32 = 5 \qquad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \xrightarrow{equivalente} \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

$$7^x = 2 \xrightarrow{equivalente} \log_7 2 = x \qquad 10^0 = 1 \xrightarrow{equivalente} \log_{10} 1 = 0$$

$$e^x = 5 \xrightarrow{equivalente} x = \ln 5 = 1,61$$

$$e^{x-3} = \frac{3}{2} \xrightarrow{equivalente} x - 3 = \ln\frac{3}{2} \rightarrow x = 3 + 0,41 = 3,41$$

Riscrivere le seguenti uguaglianze, usando le potenze.

$$\log_7 49 = 2 \xrightarrow{equivalente} 7^2 = 49 \qquad \log_{10} 10000 = 4 \xrightarrow{equivalente} 10^4 = 10000$$

$$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \xrightarrow{equivalente} 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \qquad \log_5 3 = x \xrightarrow{equivalente} 5^x = 3$$

Calcolare i seguenti logaritmi applicando la definizione.

$$\log_3 243 = 5 \qquad \log 1000 = 3 \qquad \log_2 \frac{1}{16} = -4 \qquad \log_7 \left(7\sqrt{7}\right) = \log_7 \sqrt{7^3} = \frac{3}{2}$$

$$\log_5 \sqrt[5]{5} = \frac{1}{5} \qquad \log_{\sqrt{2}} 256 = 16 \qquad \log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8} = -\frac{3}{2} \qquad \log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27} = 3$$

Calcolare l'argomento del logaritmo applicando la definizione.

$$\log_3 b = 3 \xrightarrow{definizione} 3^3 = b \rightarrow b = 27 \qquad \log_3 b = -1 \xrightarrow{definizione} 3^{-1} = b \rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\log_3 b = 0 \xrightarrow{definizione} 3^0 = b \rightarrow b = 1 \qquad \log_{\frac{2}{3}} b = -\frac{1}{2} \xrightarrow{definizione} \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = b \rightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Calcolare la base del logaritmo applicando la definizione.

$$\log_a 9 = 2 \xrightarrow{definizione} a^2 = 3^2 \rightarrow a = 3 \qquad \log_a \frac{1}{4} = 2 \xrightarrow{definizione} a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\log_a 5 = 1 \xrightarrow{definizione} a^1 = 5 \rightarrow a = 5 \qquad \log_a \sqrt{2} = 2 \xrightarrow{definizione} a^2 = \sqrt{2} \rightarrow a = \sqrt[4]{2}$$

Sviluppare le seguenti espressioni, applicando le proprietà dei logaritmi.

$$\log\frac{3}{5a} = \log 3 - \log 5a = \log 3 - \log 5 - \log a$$

$$\log_5(3ab^2) = \log_5 3 + \log_5 a + 2\log_5 b$$

$$\log\frac{a^3(a^2+1)}{b^2} = \log\left[a^3(a^2+1)\right] - \log b^2 = 3\log a + \log(a^2+1) - 2\log b$$

Applicando le proprietà dei logaritmi, scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo.

$$\log 3 + \log 7 - \log 6 = \log(3\cdot 7) - \log 6 = \log\frac{21}{6} = \log\frac{7}{2}$$

$$\log_2 x - \log_2(x-1) + \log_2 5 = \log_2\frac{x}{x-1} + \log_2 5 = \log_2\frac{5x}{x-1}$$

$$\log_3(x^2+1) - \log_3(x-3) = \log_3\frac{x^2+1}{x-3}$$

Calcolare i seguenti logaritmi con la formula del cambiamento di base. Affinché si possa usare la calcolatrice, i logaritmi dati vanno trasformati in logaritmi decimali o neperiani.

$$\log_4 61 = \frac{\log 61}{\log 4} \cong \frac{1,785}{0,602} \cong 2,97 \qquad \log_{0,11} 7 = \frac{\log 7}{\log 0,11} \cong \frac{0,845}{-0,959} \cong -0,881$$

$$\log_5 0,23 = \frac{\ln 0,23}{\ln 5} \cong \frac{-1,47}{1,61} = -0,91 \qquad \log_4 61 = \frac{\ln 61}{\ln 4} \cong \frac{4,111}{1,386} \cong 2,97$$

Senza usare la calcolatrice, valutare la seguente espressione.

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36} = \frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\frac{\log_2 36}{\log_2 3}} = \frac{1}{\log_2 36} + \frac{\log_2 3}{\log_2 36} = \frac{1+\log_2 3}{\log_2 36} =$$

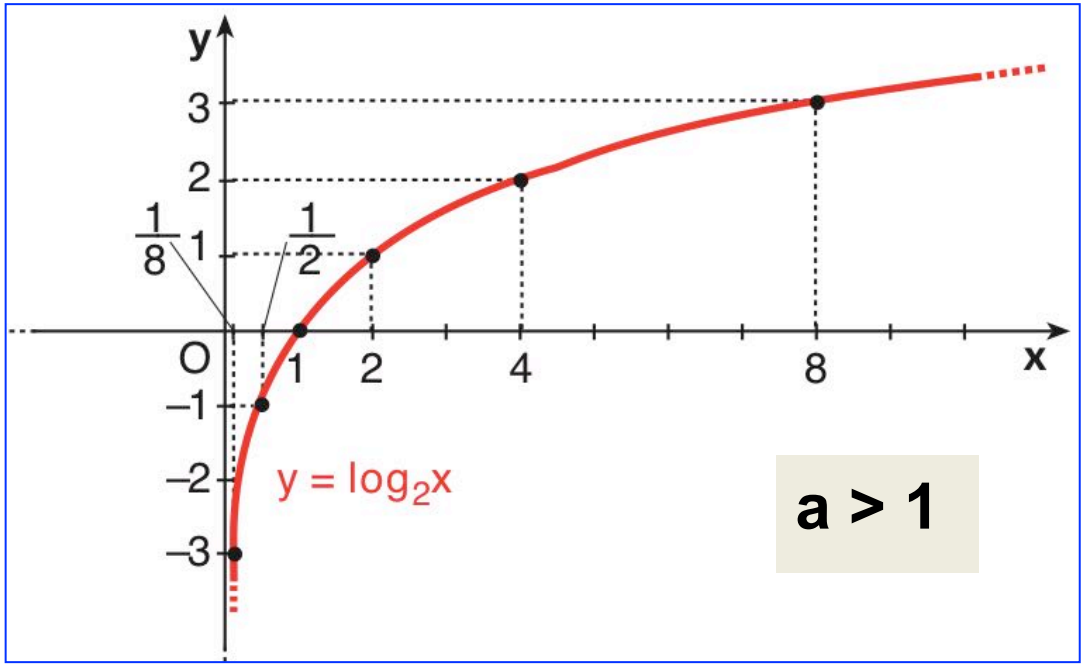
$$\frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 36} = \frac{\log_2 6}{\log_2 36} = \frac{\log_2 6}{\log_2 6^2} = \frac{\log_2 6}{2\log_2 6} = \frac{1}{2}$$

definizione

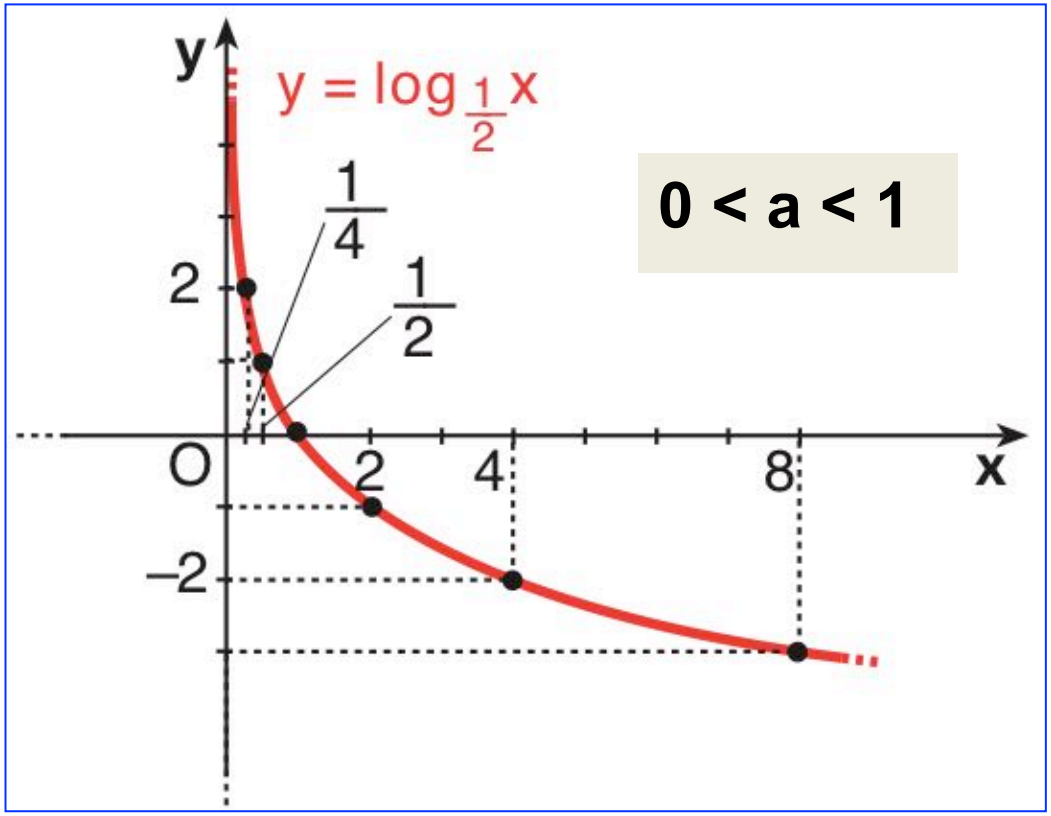
Si chiama funzione logaritmica ogni funzione del tipo:

$$y = \log_a x \qquad con\ \ a > 0\ \ e\ \ a \neq 1$$

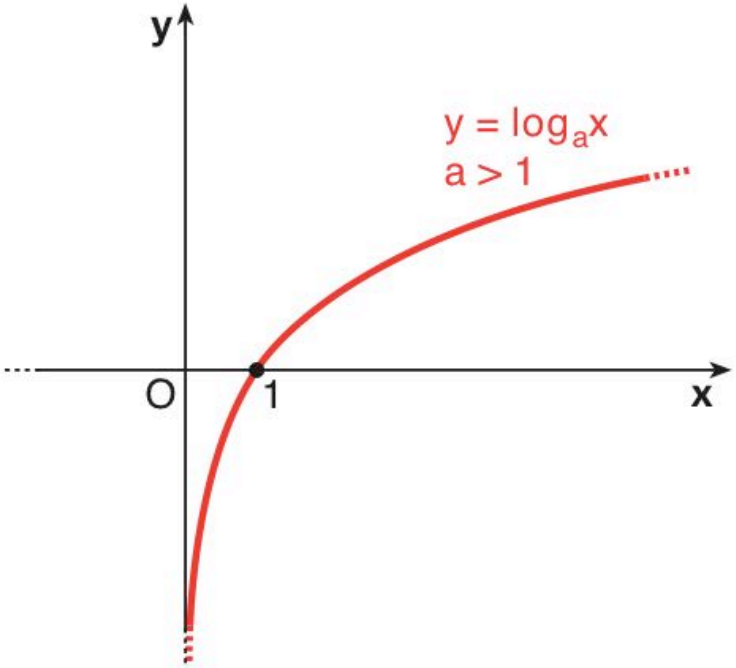
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3



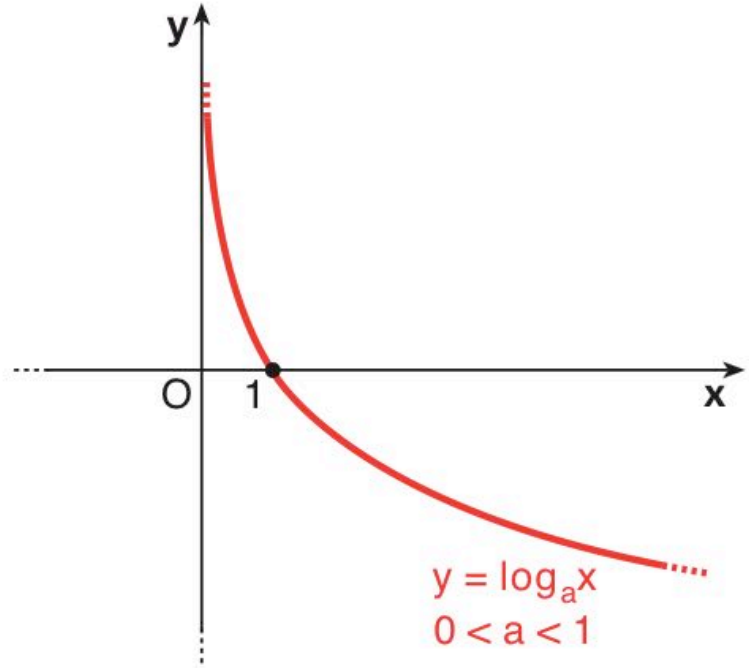
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



proprietà della funzione logaritmica



a.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



b.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

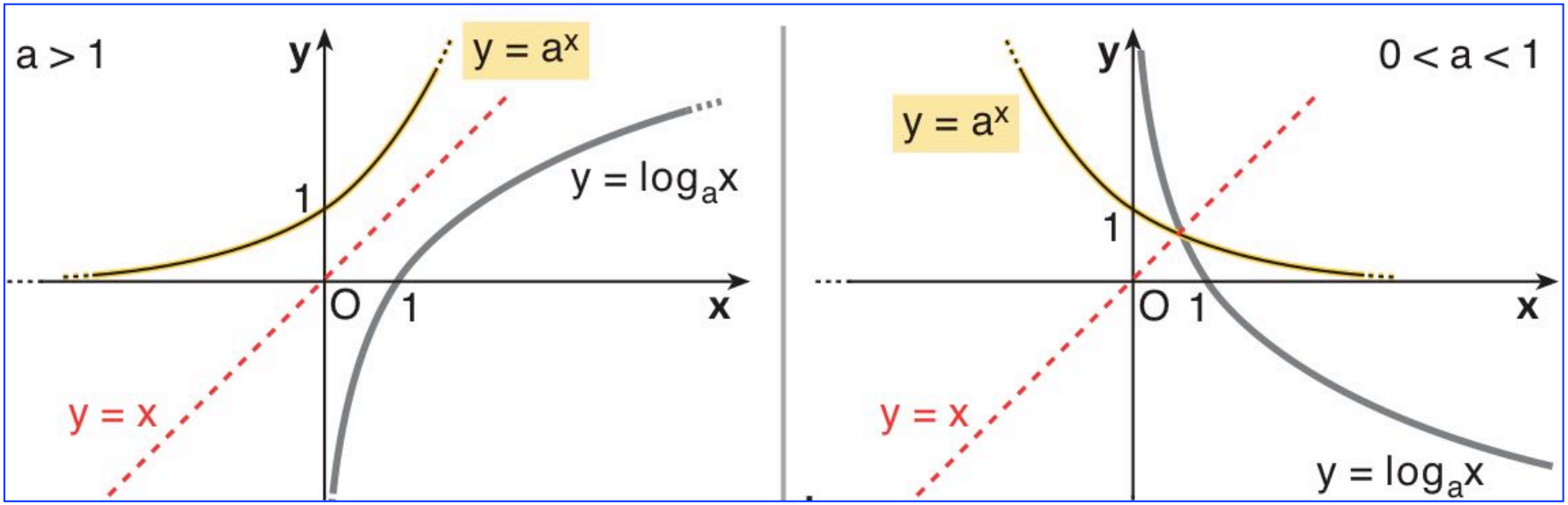
$$D = R^+ =]0;+\infty[\qquad C = R =]-\infty;+\infty[$$

$$f : R^+ \longrightarrow R$$

La funzione $y=a^x$ è biiettiva da R a R^+, quindi è invertibile. Invertendola si ottiene:

$$\boxed{y = \log_a x}$$

Pertanto, la funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale e i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

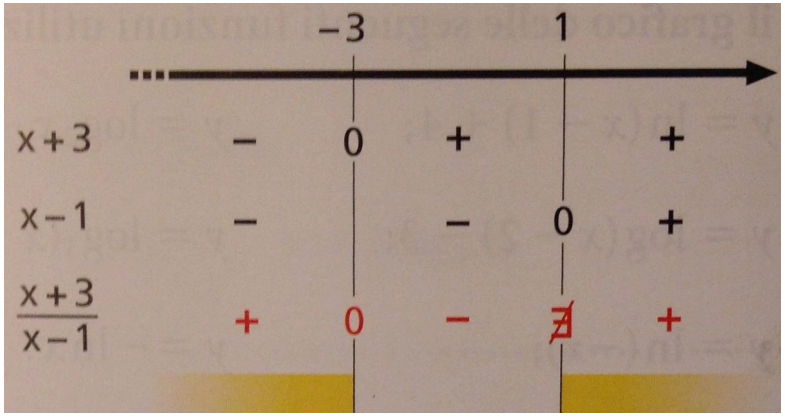


ESERCIZI

Determinare il dominio delle seguenti funzioni logaritmiche.

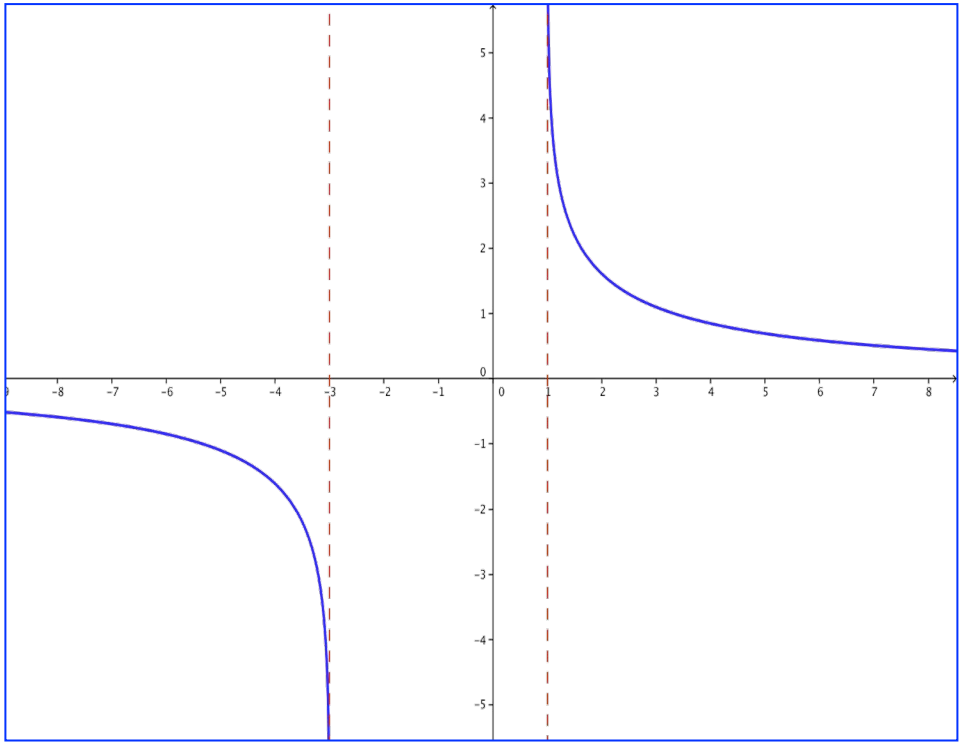
$$y = \log \frac{x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{DOMINIO}} \frac{x+3}{x-1} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{disequazione fratta}} \begin{cases} N > 0 \rightarrow x+3 > 0 \rightarrow x > -3 \\ D > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \end{cases}$$



		-3		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$$x < -3 \ \vee \ x > 1$$



dominio

$$D = \left]-\infty; -3\right[\ \cup \ \left]1; +\infty\right[$$

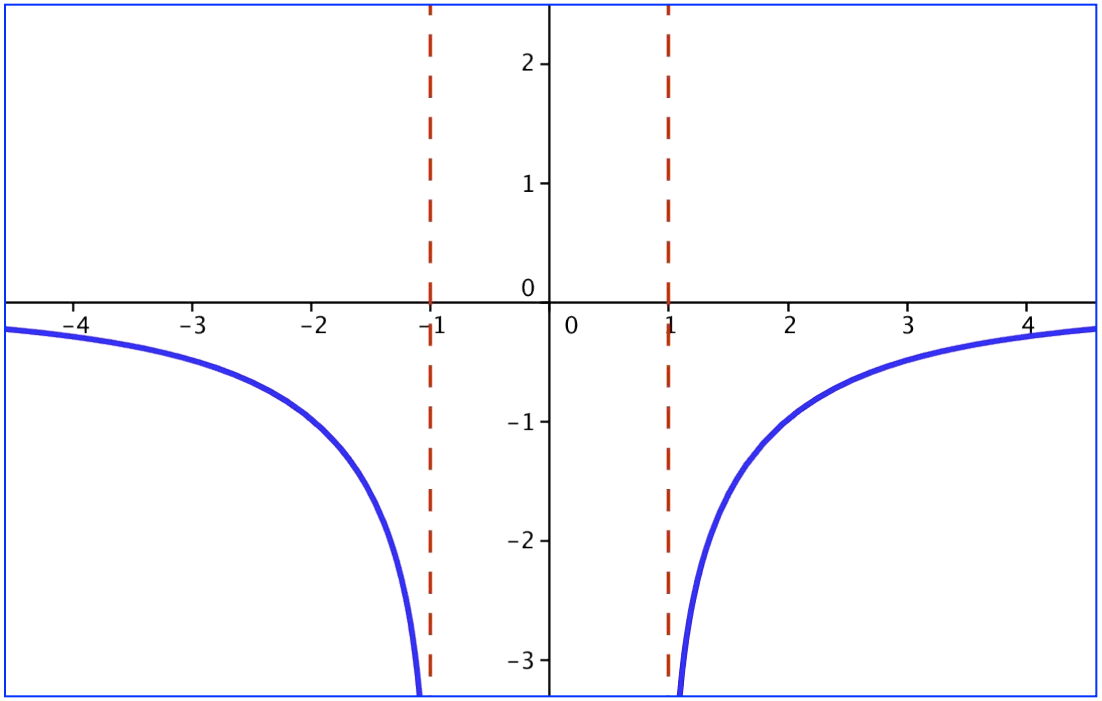
$$y = \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} \xrightarrow{DOMINIO} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} > 0$$

$$\xrightarrow[\text{disequazione fratta}]{\text{soluzione}} \begin{cases} N > 0 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1 \\ D > 0 \rightarrow x^2 + 4 > 0 \rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

$$\xrightarrow{soluzione} x < -1 \vee x > 1$$

dominio

$$D = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$

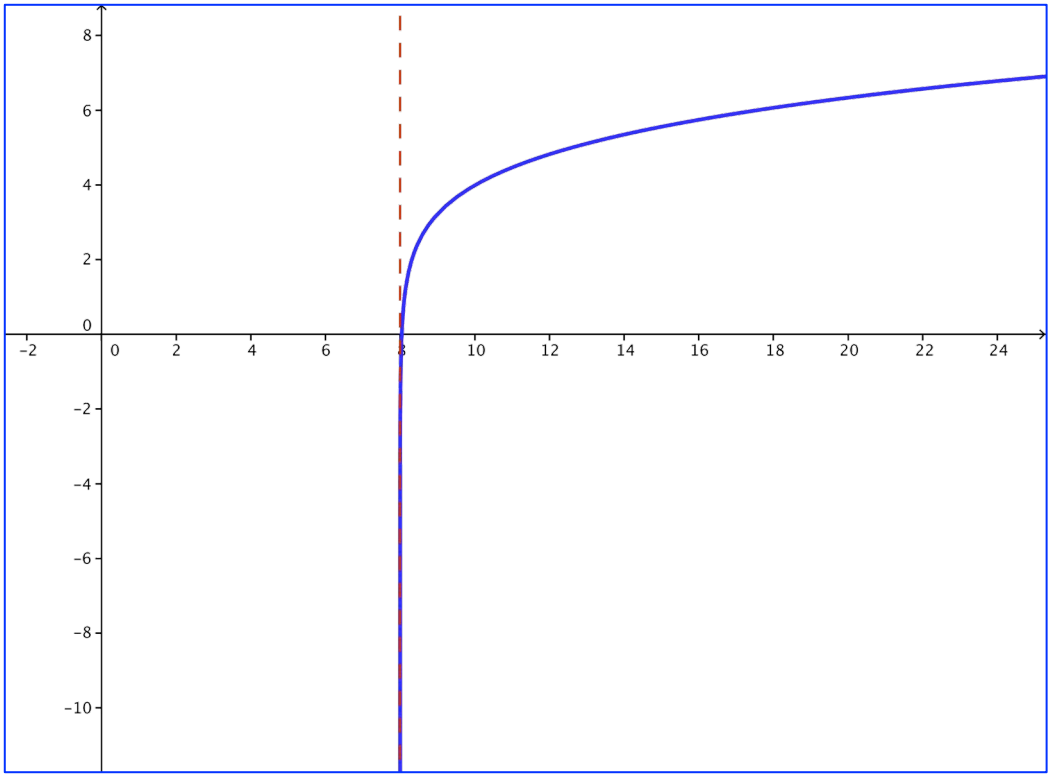


$$y = \log(x-8) + \log(2x+7) \xrightarrow{\text{DOMINIO}} \begin{cases} x-8>0 \\ 2x+7>0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} \begin{cases} x>8 \\ x>-\dfrac{7}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} x>8$$

dominio

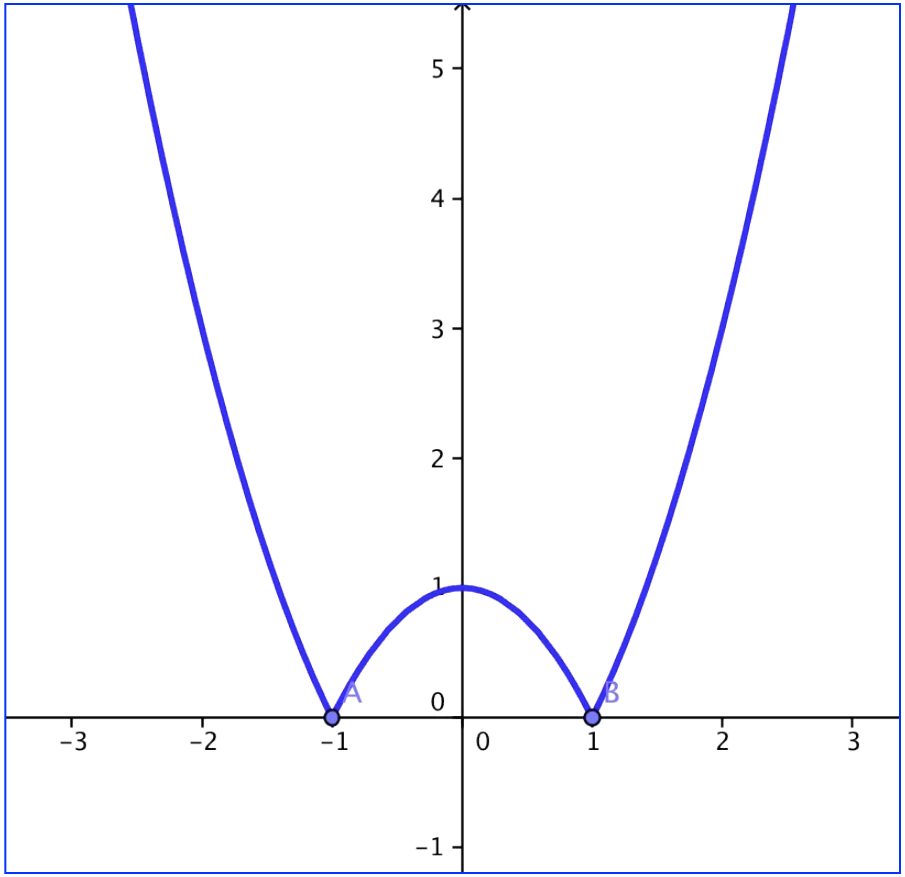
$$D =]8;+\infty[$$



$$y = \ln\left|x^2 - 1\right| \xrightarrow{DOMINIO} \left|x^2 - 1\right| > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \neq \pm 1$$

dominio

$$D = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$

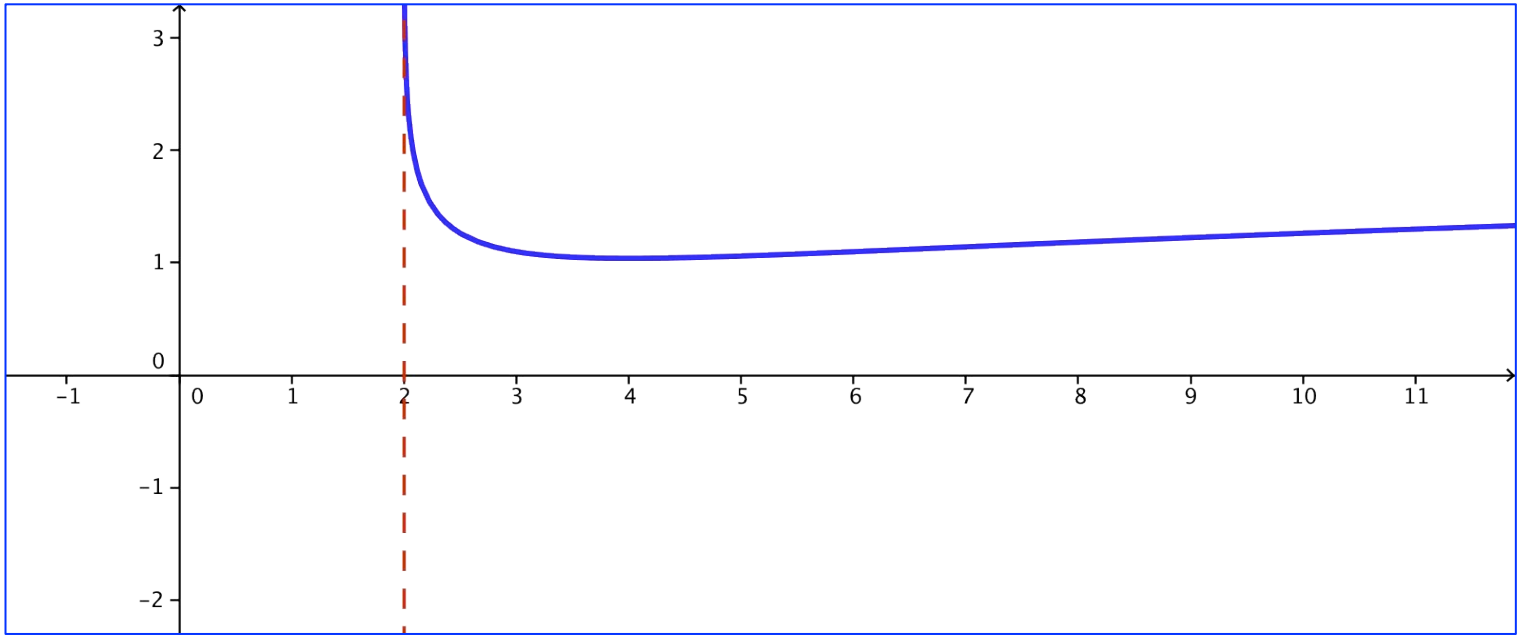


$$y = \log \frac{x}{\sqrt{x-2}} \xrightarrow{DOMINIO} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x-2}} > 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{equivalente} \frac{x}{\sqrt{x-2}} > 0$$

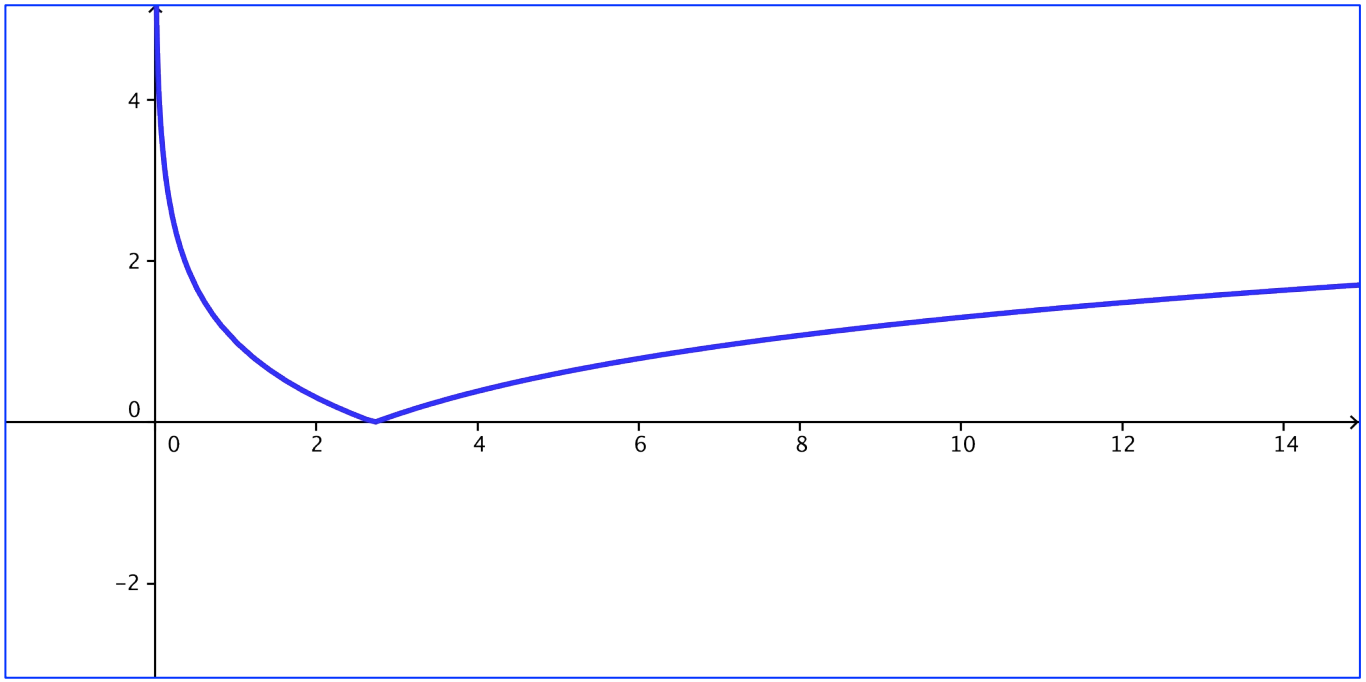
$$\xrightarrow{soluzione} \begin{bmatrix} N > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow x > 0 \\ D > 0 \rightarrow \sqrt{x-2} > 0 \rightarrow x > 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{soluzione} x > 2 \Rightarrow D =]2;+\infty[$$

dominio

$$D =]2;+\infty[$$

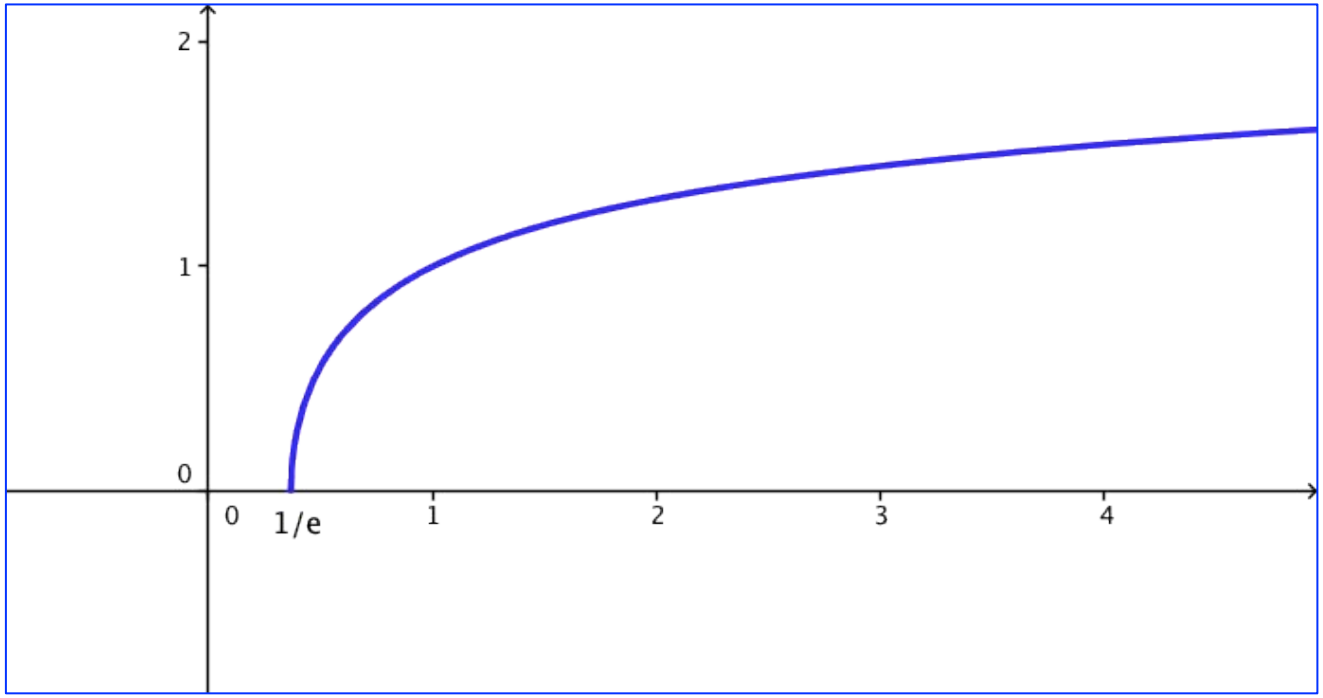


Dal grafico delle seguenti funzioni, ricavare il dominio e codominio.



$$y = |1 - \ln x| \xrightarrow{soluzione} x > 0;\ y \geq 0$$

$$D =]0;+\infty[\qquad C = [0;+\infty[$$



$$y = \sqrt{\ln x + 1} \xrightarrow{\text{soluzione}} x \geq \frac{1}{e};\ y \geq 0$$

$$D = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[\qquad C = [0; +\infty[$$

definizione

Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

Come si risolve l'equazione logaritmica:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

1. Imporre la condizione di esistenza dei logaritmi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

2. Risolvere l'equazione: $A(x) = B(x)$

3. Controllare se le soluzioni dell'equazione soddisfano la condizione di esistenza.

ESERCIZI

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche.

$$\log x + \log(x+3) = \log 2 + \log(2x+3)$$

Condizione di esistenza: $\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{condizione di esistenza}]{\text{soluzione}} x > 0$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi di un prodotto:

$$\log x(x+3) = \log 2(2x+3)$$

Risolviamo l'equazione:

$$x(x+3) = 2(2x+3) \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

Il valore x=-2 non soddisfa la condizione di esistenza.

La soluzione dell'equazione logaritmica è x=3.

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-\log_2 8$$

Condizione di esistenza: $\begin{cases} x-2>0 \\ 8-x>0 \\ x>0 \end{cases} \xrightarrow[\text{condizione di esistenza}]{\text{soluzione}} 2<x<8$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi di un rapporto:

$$\log_2\left(\frac{x-2}{8-x}\right)=\log_2\frac{x}{8}$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x-2}{8-x}=\frac{x}{8} \rightarrow x^2-16=0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x=\pm 4$$

Il valore x=-4 non soddisfa la condizione di esistenza.

La soluzione dell'equazione logaritmica è x=4.

$$\log_4(3x-20)=3$$

Condizione di esistenza:

$$3x-20>0 \xrightarrow[\text{condizione di esistenza}]{\text{soluzione}} x>\frac{20}{3}$$

Risolviamo l'equazione:

$$\log_4(3x-20)=3 \xrightarrow[\text{definizione logaritmo}]{\text{applichiamo}} 3x-20=4^3 \xrightarrow{\text{soluzione}} x=28$$

Il valore x=28 soddisfa la condizione di esistenza, per cui è la soluzione dell'equazione logaritmica.

$$\ln(x-2)=1$$

Condizione di esistenza:

$$x-2>0 \xrightarrow[\text{condizione di esistenza}]{\text{soluzione}} x>2$$

Risolviamo l'equazione:

$$\ln(x-2)=1 \xrightarrow[\text{definizione logaritmo}]{\text{applichiamo}} x-2=e \xrightarrow{\text{soluzione}} x=x=2+e$$

Il valore x=2+e soddisfa la condizione di esistenza, per cui è la soluzione dell'equazione logaritmica.

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche, utilizzando un'incognita ausiliaria.

$$\left(\log_3 x\right)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$$

Condizione di esistenza: $x > 0$

Introduciamo l'incognita ausiliaria: $(1)\ \log_3 x = t$

L'equazione diventa:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \xrightarrow{soluzione} t_1 = -1 \quad t_2 = 3$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\log_3 x = -1 \xrightarrow{soluzione} x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad \log_3 x = 3 \xrightarrow{soluzione} x = 3^3 = 27$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

$$2\ln^2 x + 5\ln x - 3 = 0$$

Condizione di esistenza: $x > 0$

Introduciamo l'incognita ausiliaria: $(1)\ \ \ln x = t$

L'equazione diventa:

$$2t^2 + 5t - 3 = 0 \xrightarrow{soluzione} t_1 = -3 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\ln x = -3 \xrightarrow{soluzione} x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \qquad \ln x = \frac{1}{2} \xrightarrow{soluzione} x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

$$3\log^2 x - 2\log x = 0$$

Condizione di esistenza: $x > 0$

Introduciamo l'incognita ausiliaria: $(1)\ \log x = t$

L'equazione diventa:

$$3t^2 - 2t = 0 \xrightarrow{soluzione} t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{2}{3}$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\log x = 0 \xrightarrow{soluzione} x = 10^0 = 1 \qquad \log x = \frac{2}{3} \xrightarrow{soluzione} x = 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

Determinare il dominio delle seguenti funzioni logaritmiche.

$$y = \frac{\ln x}{1 - \ln^2 x} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} x > 0 \rightarrow C.E.\ del\ logaritmo \\ 1 - \ln^2 x \neq 0 \rightarrow C.E.\ frazione \end{cases}$$

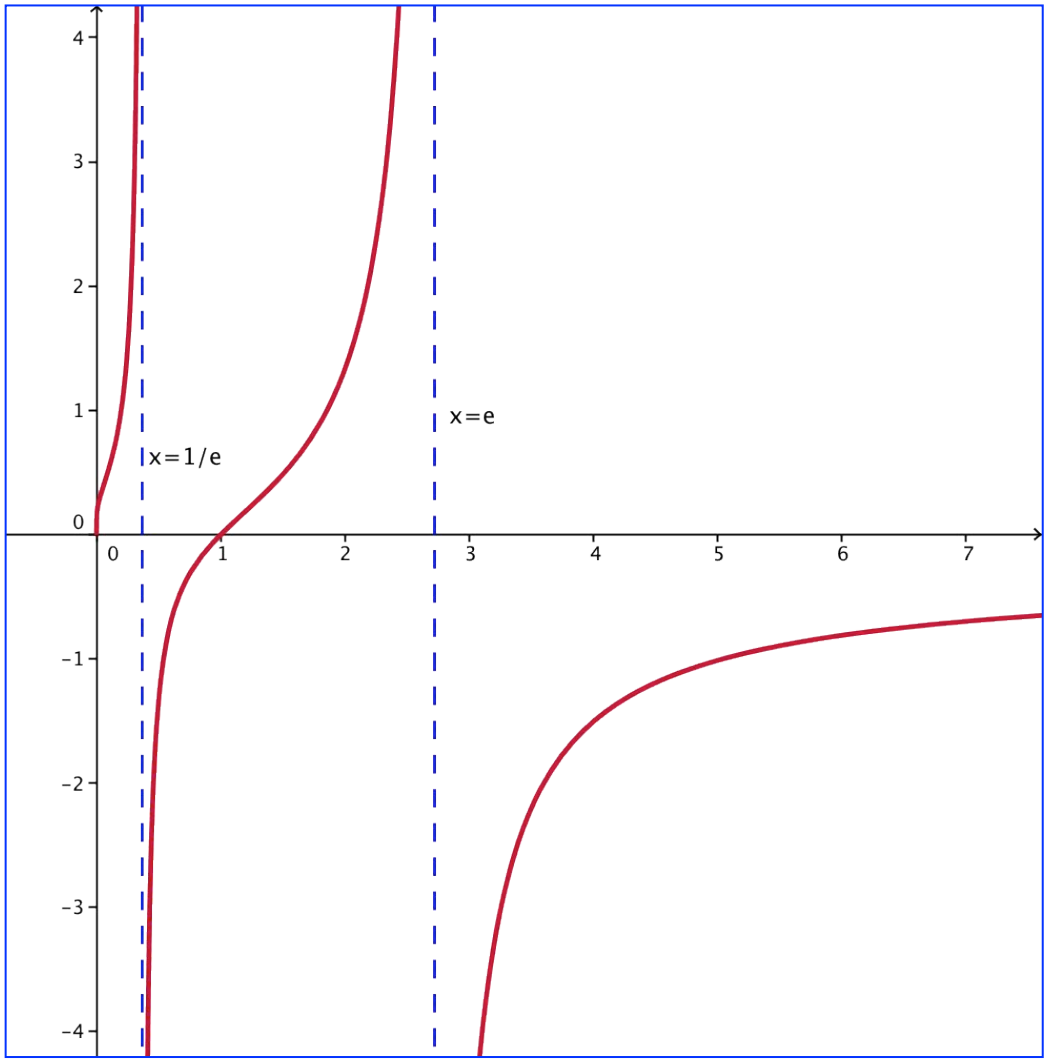
$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \vee x \neq e \end{cases} \Rightarrow D = R_0^+ - \left\{ e^{-1}; e \right\}$$

$$\xrightarrow[equazione\ logaritmica]{soluzione} 1 - \ln^2 x = 0 \xrightarrow{z = \ln x} -z^2 + 1 = 0 \xrightarrow{soluzione} z = \pm 1$$

$$\ln x = -1 \xrightarrow[logaritmo]{definizione} x = e^{-1} \qquad \ln x = 1 \xrightarrow[logaritmo]{definizione} x = e$$

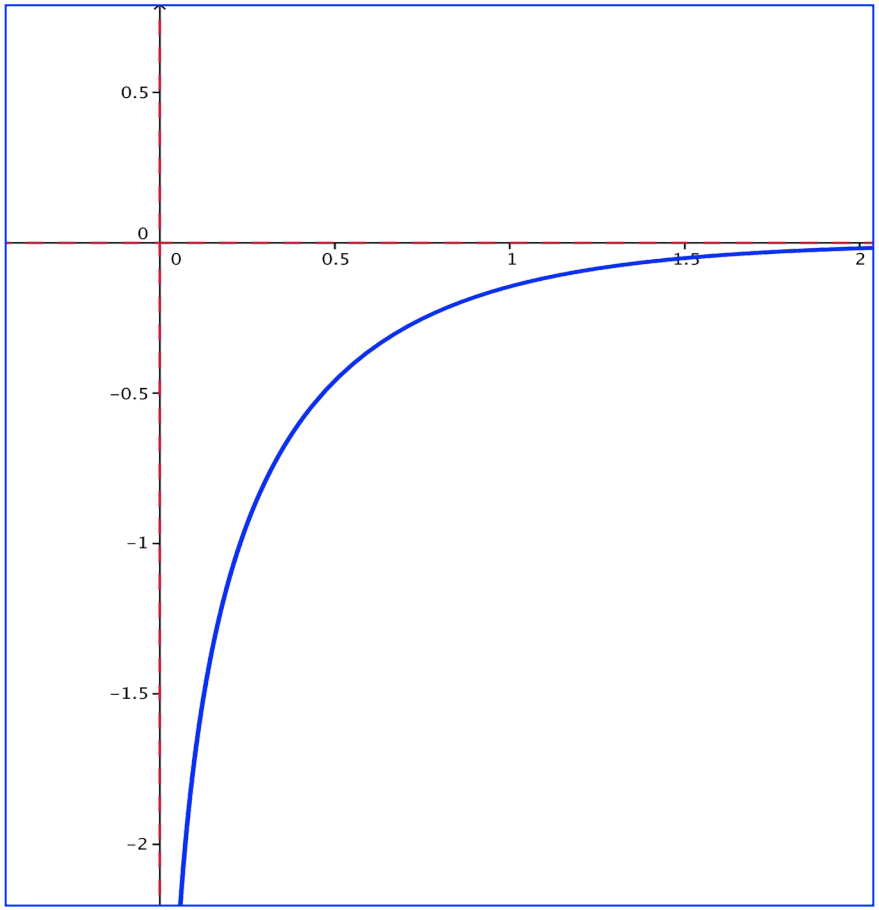
dominio

$$D = R_0^+ - \left\{ e^{-1}; e \right\}$$



$$y = \ln(1 - e^{-2x}) \xrightarrow{dominio} 1 - e^{-2x} > 0 \Rightarrow C.E.\ logaritmo$$

$$\xrightarrow[disequazione\ \ esponenziale]{soluzione} e^{-2x} < 1 \rightarrow e^{-2x} < e^{0} \xrightarrow{soluzione} -2x < 0 \rightarrow x > 0$$



dominio

$$D = R_0^+ =]0; +\infty[$$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni logaritmiche.

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{di esistenza}]{\text{campo}} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} \begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{y} = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{logaritmo}]{\text{definixione}} \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2^2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{sostituzione}]{\text{metodo}} \begin{cases} x = 4y \\ 4y - 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione (2;1/2) è accettabile perché soddisfa la condizione di esistenza.

$$\begin{cases} \log_3 (x - y) = 1 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2\log_3 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{di esistenza}]{\text{campo}} \begin{cases} x - y > 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

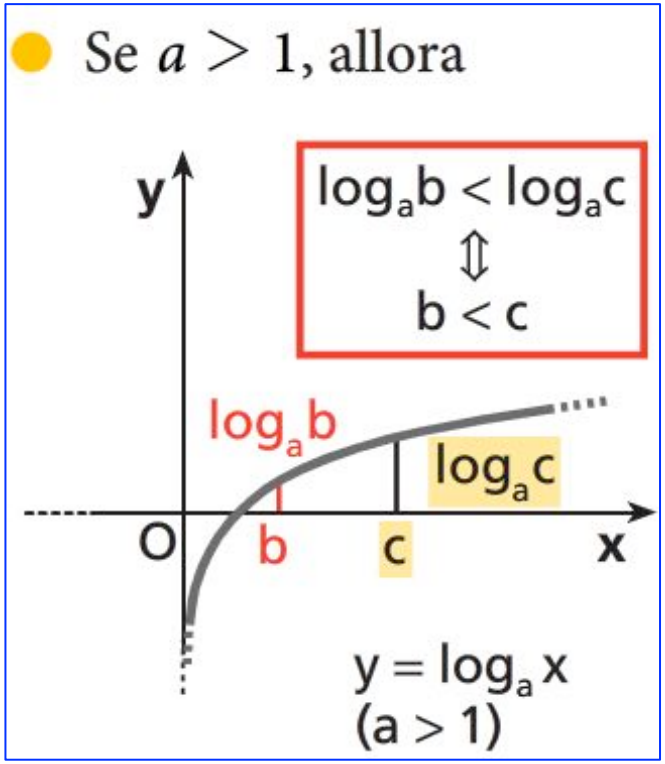
$$\xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà e definizione}} \begin{cases} x - y = 3 \\ \log_3 xy = \log_3 2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{sostituzione}]{\text{metodo}} \begin{cases} x = 3 + y \\ y(3 + y) = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

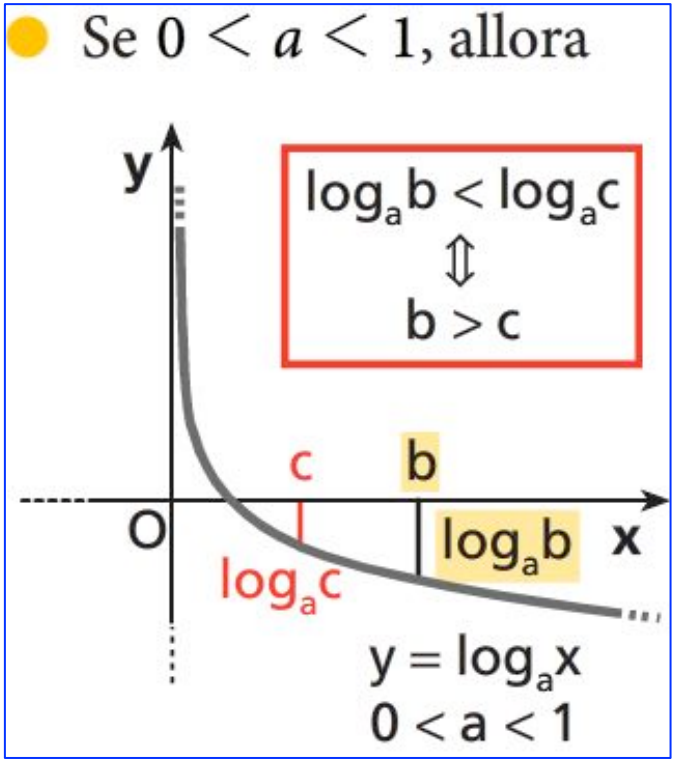
La soluzione (-1;-4) non è accettabile perché non soddisfa la condizione di esistenza. La soluzione del sistema è solo (4;1).

definizione

Una disequazione si dice logaritmica quando è del tipo:

$$\log_a A(x) > \log_a B(x) \quad \textit{oppure} \quad \log_a A(x) < \log_a B(x)$$





Soluzione disequazione logaritmica

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \\ \textit{oppure} \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

ESERCIZI

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

$$\log_5(x-1) < 2 \xrightarrow{\text{equivalente a}} \log_5(x-1) < \log_5 25$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} x-1>0 \rightarrow \textit{campo di esistenza} \\ x-1<25 \rightarrow \textit{si conserva il segno di disuguaglianza perchè } a>1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} 1 < x < 26$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-4) > \log_{\frac{1}{3}} 5x$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} x-4>0 \rightarrow \textit{campo di esistenza } 1^\circ \log\textit{aritmo} \\ 5x>0 \rightarrow \textit{campo di esistenza } 2^\circ \log\textit{aritmo} \\ x-4<5x \rightarrow \textit{segno di disuguaglianza contrario perchè } 0<a<1 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} x>4$$

$$\log_{11}(2-x) > \log_{11}(x+2)$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} 2-x>0 \rightarrow \textit{campo di esistenza } 1^\circ \log\textit{aritmo} \\ x+2>0 \rightarrow \textit{campo di esistenza } 2^\circ \log\textit{aritmo} \\ 2-x>x+2 \rightarrow \textit{segno di disuguaglianza si conserva perchè } a>1 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} -2<x<0$$

$$\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \rightarrow \textit{campo di esistenza } 1^\circ \log\textit{aritmo} \\ \dfrac{x}{x+1} > 0 \rightarrow \textit{campo di esistenza } 2^\circ \log\textit{aritmo} \\ \dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x}{x+1} \rightarrow \textit{segno di disuguaglianza contario perchè } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x < -1 \vee x > 0 \\ x < -1 \vee -\dfrac{1}{3} < x < 1 \end{cases} \xrightarrow[sistema]{soluzione} x < -1$$

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche, usando le proprietà dei logaritmi.

$$\frac{1}{2}\log(-x^2+2x)<\log x \xrightarrow{equivalente\ a} \log(-x^2+2x)^{\frac{1}{2}}<\log x \xrightarrow{equivalente\ a} \log\sqrt{-x^2+2x}<\log x$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} \sqrt{-x^2+2x}>0 \rightarrow campo\ di\ esistenza\ 1^\circ\ \log aritmo \\ x>0 \rightarrow campo\ di\ esistenza\ 2^\circ\ \log aritmo \\ \sqrt{-x^2+2x}<x \rightarrow si\ conserva\ il\ segno\ di\ disuguaglianza\ perchè\ a>1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} 0<x<2 \\ x>0 \\ x<0 \vee x>1 \end{cases} \xrightarrow[sistema]{soluzione} 1<x<2$$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(25-x)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)<0 \xrightarrow{equivalente} \log_{\frac{1}{3}}(25-x)^{\frac{1}{2}}<\log_{\frac{1}{3}}(x-5) \xrightarrow{equivalente} \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{25-x}<\log_{\frac{1}{3}}(x-5)$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} 25-x>0 \rightarrow campo\ di\ esistenza\ 1^\circ\ \log aritmo \\ x-5>0 \rightarrow campo\ di\ esistenza\ 2^\circ\ \log aritmo \\ \sqrt{25-x}>x-5 \rightarrow il\ segno\ di\ disuguaglianza\ cambia\ perchè\ 0<a<1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x<25 \\ x>5 \\ 0<x<9 \end{cases} \xrightarrow[sistema]{soluzione} 5<x<9$$

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche usando l'incognita ausiliaria

$$\log^2 x - 7\log x + 12 < 0 \xrightarrow[z=\log x]{poniamo} z^2 - 7t + 12 < 0 \xrightarrow{soluzione} 3 < z < 4$$

$$\xrightarrow[disequazione\ logaritmica]{soluzione} 3 < \log x < 4 \xrightarrow{equivalente} \begin{cases} \log x > 3 \\ \log x < 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 10^3 \\ x < 10^4 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} 10^3 < x < 10^4$$

$$\left[\log_2(x+5)\right]^2 - \log_2(x+5) - 6 > 0 \xrightarrow[z=\log_2(x+5)]{poniamo} z^2 - t - 6 > 0 \xrightarrow{soluzione} z < -2 \vee z > 3$$

$$\xrightarrow[disequazione\ logaritmica]{soluzione} \log_2(x+5) < -2 \vee \log_2(x+5) > 3$$

$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x+5 > 0 \\ x+5 < 2^{-2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+5 > 0 \\ x+5 > 2^3 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} -5 < x < -\frac{19}{4} \cup x > 3$$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni logaritmiche.

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{x-1} < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \dfrac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{di esistenza}]{\text{campo}} \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{campo esistenza}]{\text{soluzione}} \begin{cases} x < 0 \ \vee \ x > 1 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow x > 1$$

$$\xrightarrow[\text{sistema}]{\text{soluzione}} \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} < 2^2 \\ x-1 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3x+4}{x-1} < 0 \\ x-1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \ \vee \ x > \dfrac{4}{3} \\ x > 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \textit{accettabile}$$

Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi.

$$5^x = 9 \xrightarrow[\text{entrambi i membri}]{\text{logaritmo}} \log 5^x = \log 9 \xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} x \log 5 = \log 9$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\log 9}{\log 5} \cong 1{,}37$$

$$4 \cdot 5^x = 3 \cdot 7^x \xrightarrow[\text{entrambi i membri}]{\text{logaritmo}} \log 4 \cdot 5^x = \log 3 \cdot 7^x \xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} \log 4 + x \log 5 = \log 3 + x \log 7$$

$$\xrightarrow{\text{calcoli}} x \log 5 - x \log 7 = \log 3 - \log 4 \rightarrow x(\log 5 - \log 7) = \log 3 - \log 4$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\log 3 - \log 4}{\log 5 - \log 7} \cong 0{,}82$$

$$3^x + 3^{x+1} = 5^x \xrightarrow{\text{proprietà potenze}} 3^x + 3 \cdot 3^x = 5^x \rightarrow 4 \cdot 3^x = 5^x \xrightarrow[\text{entrambi i membri}]{\text{logaritmo}} \log 4 \cdot 3^x = \log 5^x$$

$$\xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} \log 4 + x \log 3 = x \log 5 \xrightarrow{\text{calcoli}} x \log 5 - x \log 3 = \log 4 \rightarrow x(\log 5 - \log 3) = \log 4$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\log 4}{\log 5 - \log 3} \cong 2{,}7$$

Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi.

$$\frac{7^{3+x}}{5} > 4\cdot 3^{5x} \xrightarrow[\text{per non cambaire verso}]{\substack{\text{logaritmo}\\ \text{entrambi i membri}\\ \text{base}10}} \log\frac{7^{3+x}}{5} > \log\left(4\cdot 3^{5x}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} (3+x)\log 7 - \log 5 > \log 4 + 5x\log 3 \xrightarrow{\text{algebra}} x(\log 7 - 5\log 3) > 2\log 2 + \log 5 - 3\log 7$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} -1{,}54x > -1{,}2 \rightarrow x < 0{,}78$$

$$3^{x+1} \geq 2^{1-x} \xrightarrow[\text{per non cambaire verso}]{\substack{\text{logaritmo}\\ \text{entrambi i membri}\\ \text{base}10}} \log 3^{x+1} > \log 2^{1-x}$$

$$\xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} (x+1)\log 3 > (1-x)\log 2 \xrightarrow{\text{algebra}} x(\log 3 + \log 2) > \log 2 - \log 3$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} 0{,}78x > -0{,}18 \rightarrow x > -0{,}23$$

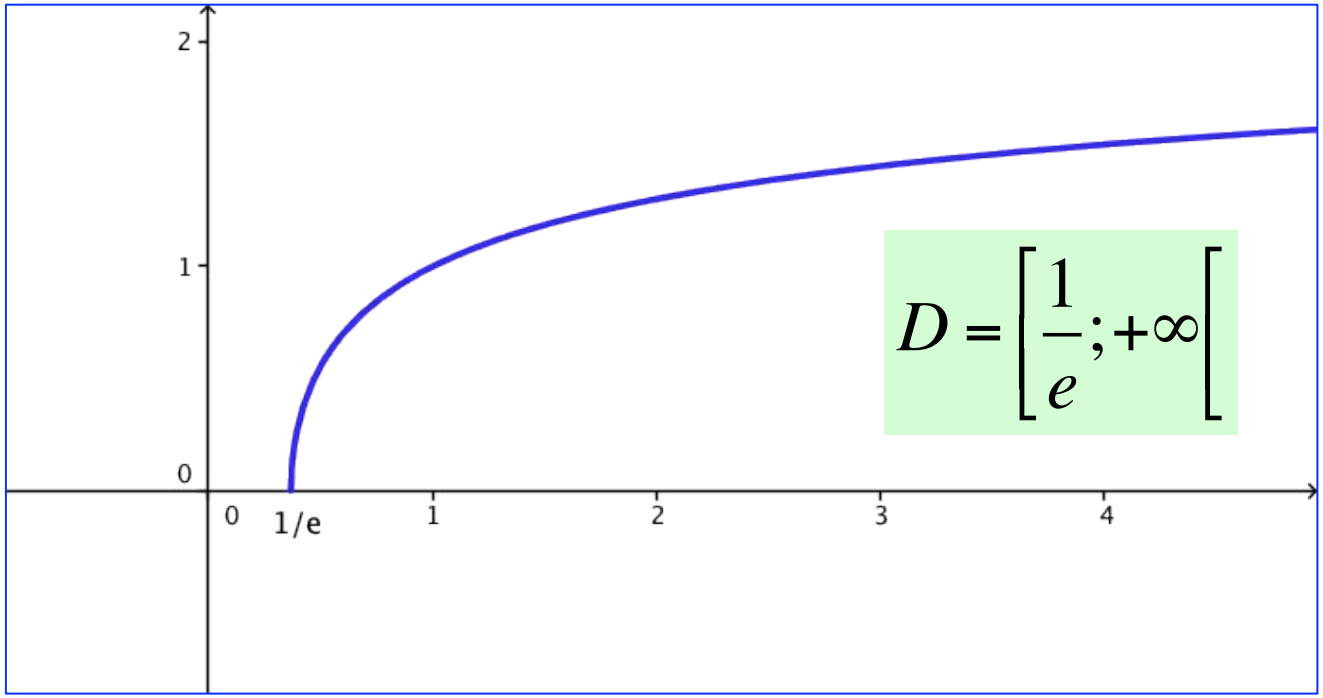
$$\sqrt{5^{x-1}} < 9\cdot 3^{2x} \xrightarrow[\text{per non cambaire verso}]{\substack{\text{logaritmo}\\ \text{entrambi i membri}\\ \text{base}10}} \log\sqrt{5^{x-1}} < \log\left(9\cdot 3^{2x}\right) \rightarrow \log\left(5^{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} < \log\left(9\cdot 3^{2x}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{proprietà}} \frac{1}{2}(x-1)\log 5 < 2\log 3 + 2x\log 3 \xrightarrow{\text{algebra}} x\left(\frac{1}{2}\log 5 - 2\log 3\right) < \frac{1}{2}\log 5 + 2\log 3$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} -1{,}2x < 2{,}6 \rightarrow x > -2{,}2$$

Determinare il dominio delle seguenti funzioni logaritmiche.

$$y=\sqrt{\ln x+1} \xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} x>0 \\ \ln x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\geq e^{-1} \end{cases} \Rightarrow x\geq \frac{1}{e}$$



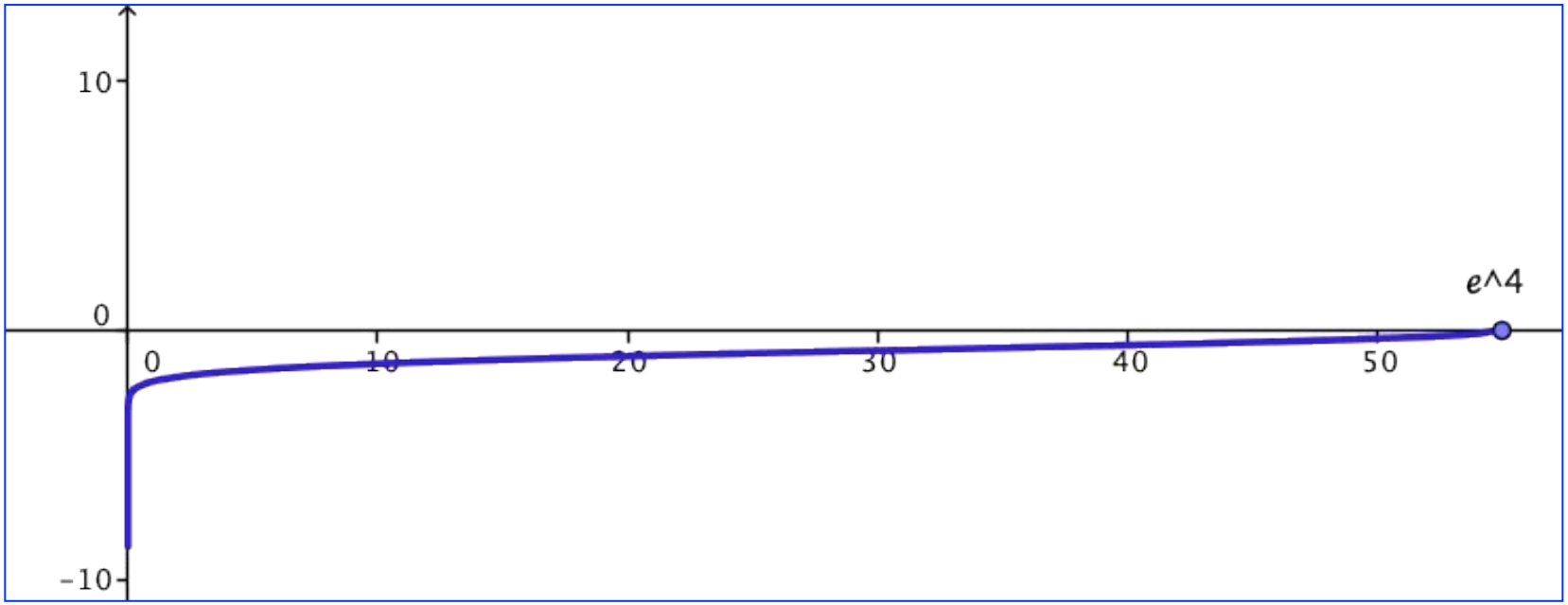
$$D=\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$$

$$y=\frac{\ln x-4}{\sqrt{4-\ln x}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} x>0 \Rightarrow C.E.\ logaritmo \\ 4-\ln x \geq 0 \Rightarrow C.E.\ radice \\ 4-\ln x \neq 0 \Rightarrow C.E.\ frazione \end{cases} \xrightarrow{equivalente} \begin{cases} x>0 \\ 4-\ln x>0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[disequazione\ logaritmica]{soluzione} \ln x<4 \xrightarrow{soluzione} x<e^4 \xrightarrow[sistema]{soluzione} \begin{cases} x>0 \\ x<e^4 \end{cases} \rightarrow 0<x<e^4$$

dominio

$$D=\left]0;e^4\right[$$

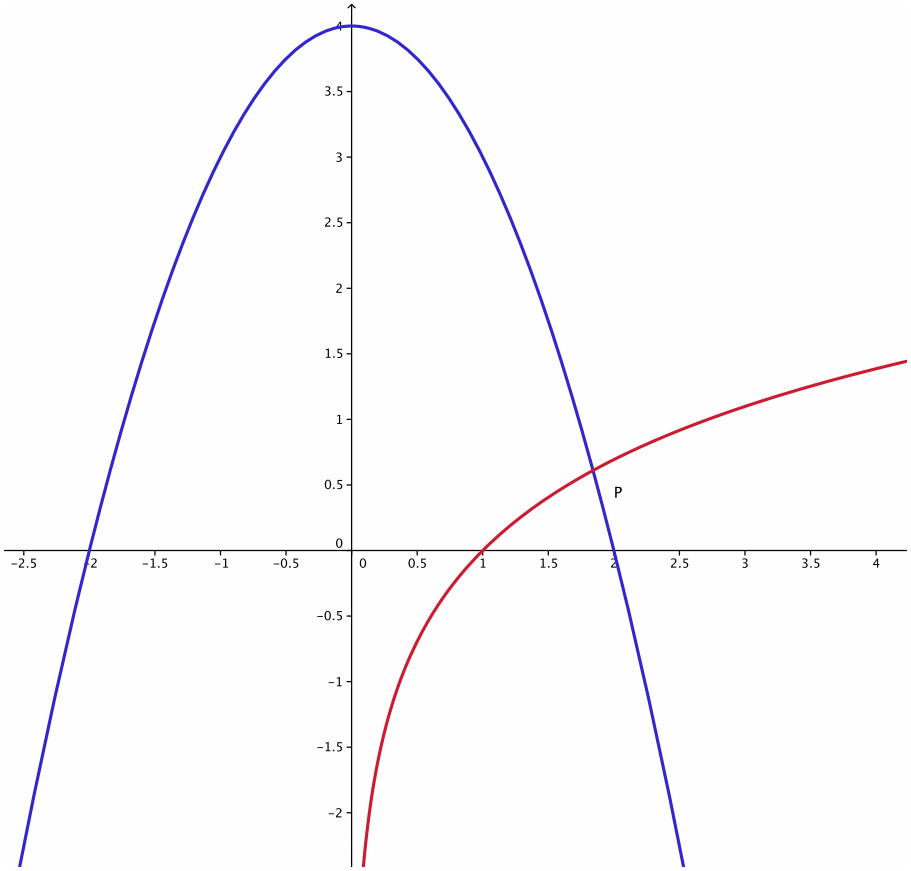


Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni

$$\ln x + x^2 = 4$$

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici delle funzioni al primo (logaritmo neperiano) e al secondo membro (parabola) dell'equazione:

$$\ln x = -x^2 + 4$$

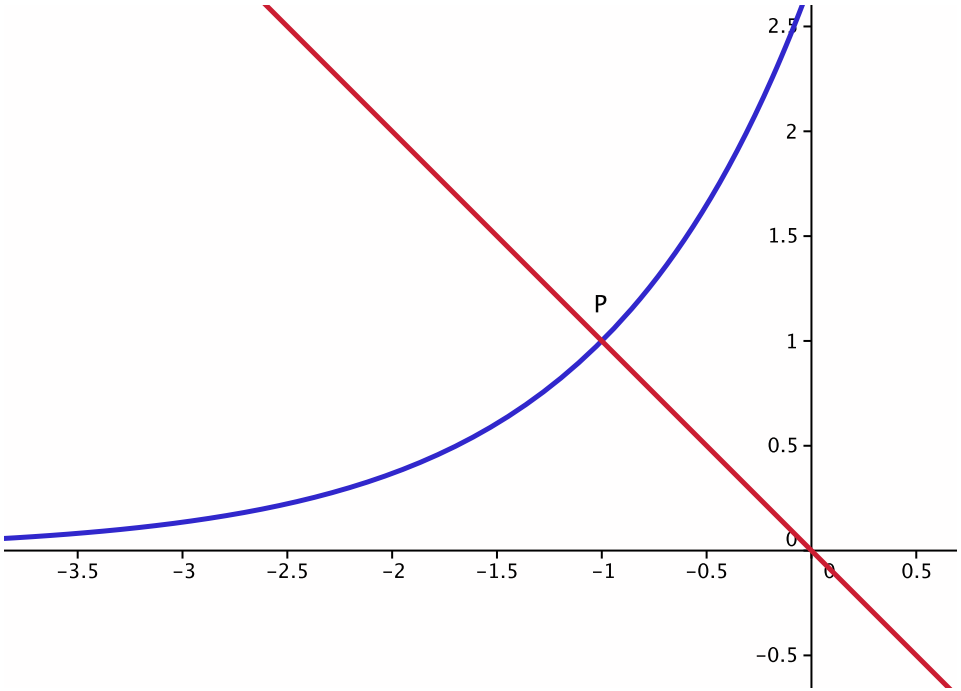


L'ascissa (soluzione dell'equazione) è:

$$1{,}5 < x < 2$$

$$e^{x+1} + x > 0$$

La disequazione ha come soluzione tutti i valori di x in corrispondenza dei quali l'ordinata della funzione esponenziale al primo membro risulti maggiore di quella al secondo membro, che è una retta:



$$e^{x+1} > -x$$

Soluzione

$$x > -1$$

Studiare le seguenti funzioni.

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}}$$

1. Dominio

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow C.E.\ \log aritmo \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow C.E.\ frazione \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{DOMINIO} D = R_0^+ - \{1\}$$

2. Simmetrie

La funzione non è pari né dispari, e lo possiamo asserire senza fare i conti perché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, ossia la funzione si trova tutta a destra dell'origine.

3. Segno della funzione

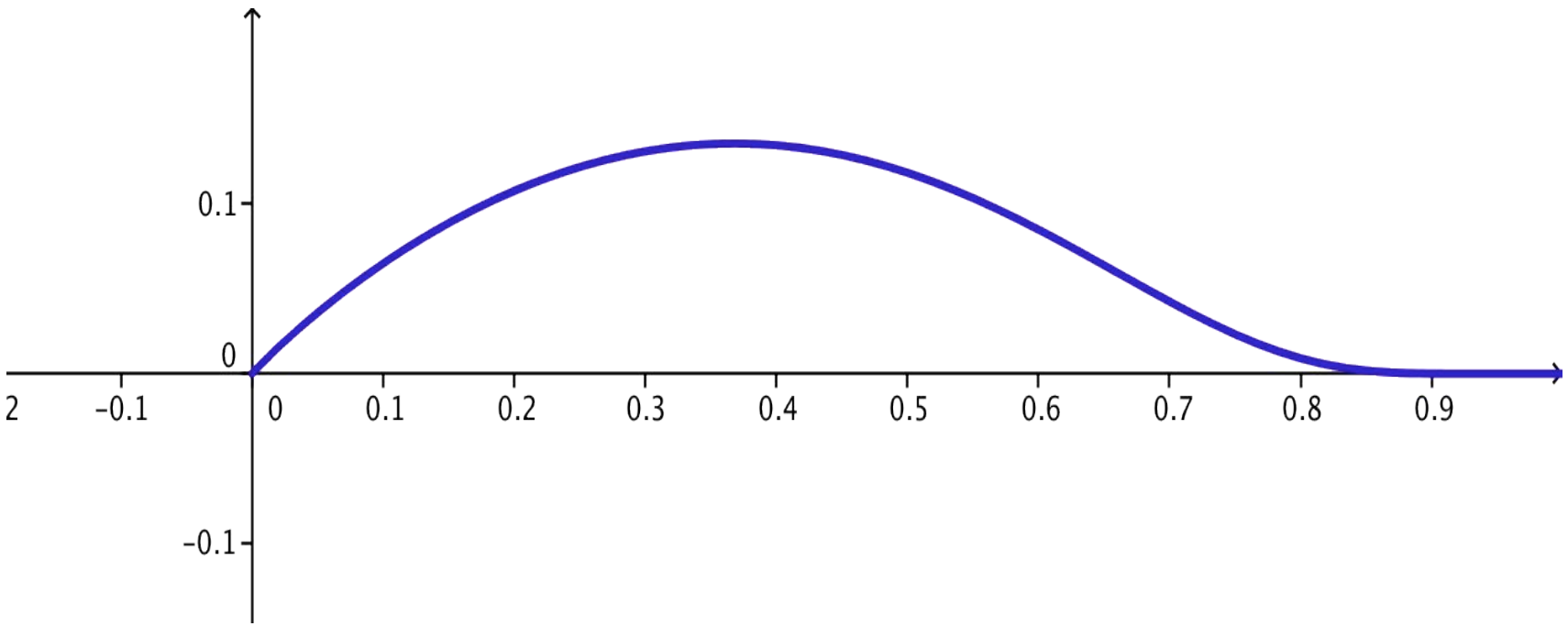
$$f(x) > 0 \Rightarrow x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ e^{\frac{1}{\ln x}} > 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in D \end{cases}$$

Nel dominio della funzione, sia x che la funzione esponenziale è positiva. La funzione risulta positiva poiché prodotto di funzioni positive.

4. Intersezione assi

Poichè la funzione esiste per x>0 ed è positiva in questo intervallo, non può avere intersezioni con gli assi cartesiani.

5. Grafico



$$f(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln x}$$

1. Dominio

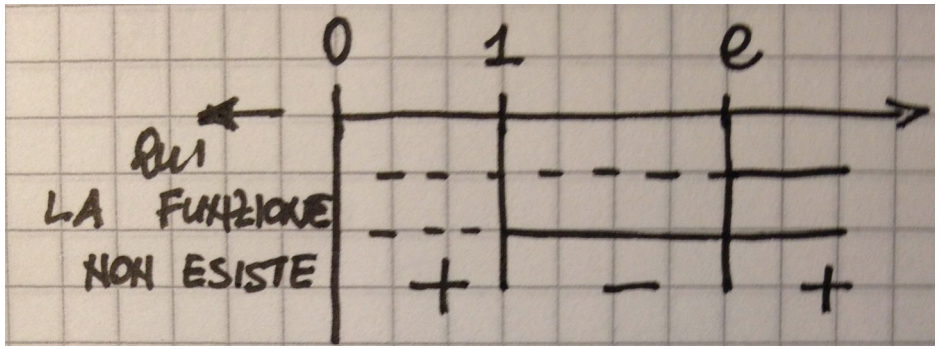
$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow C.E.\ \log aritmo \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow C.E.\ frazione \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{DOMINIO} D=R_0^+-\{1\}=]0;1[\ \cup\ ]1;+\infty[$$

2. Simmetrie

La funzione non è pari né dispari, e lo possiamo asserire senza fare i conti perché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, ossia la funzione si trova tutta a destra dell'origine.

3. Segno della funzione

$$f(x)>0 \Rightarrow \frac{\ln x-1}{\ln x}>0 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} \ln x-1>0 \\ \ln x>0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x>e \\ x>1 \end{cases}$$



$$f(x)>0 \;\; per \;\; \forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$$

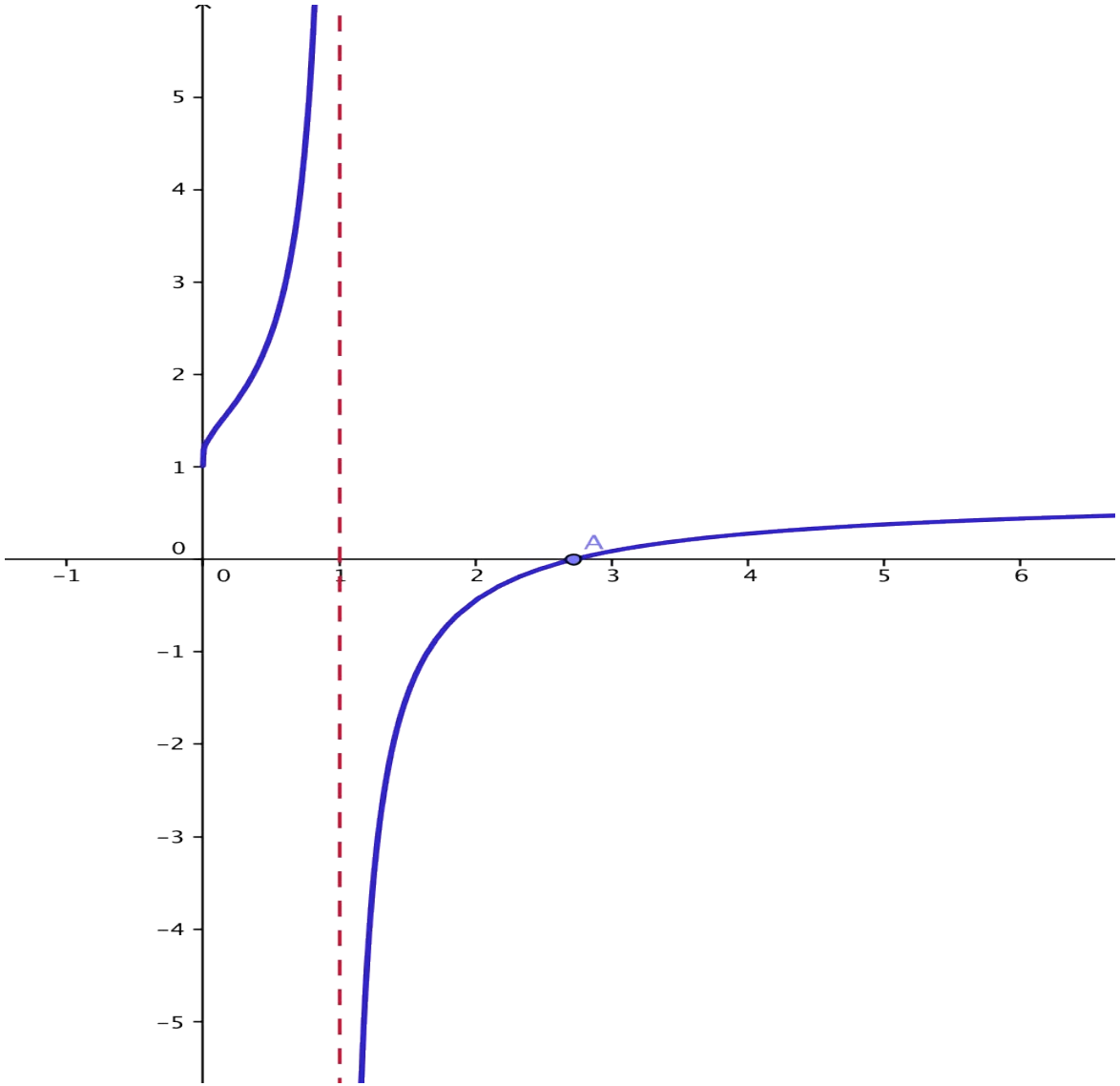
$$f(x)<0 \;\; per \;\; \forall x \in]1;e[$$

4. Intersezione assi

$$X: \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{\ln x-1}{\ln x}=0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \begin{cases} y=0 \\ x=e \end{cases} \Rightarrow A=(e;0)$$

$$Y: \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\ln 0-1}{\ln 0} \end{cases} \xrightarrow[non\ \ esiste]{\ln 0} non\ \ ci\ \ sono\ \ intersezioni\ \ con\ \ l'asse\ \ y$$

5. Grafico



$$f(x) = \left|x^2 - 1\right| \cdot e^{2x}$$

1. Dominio

La funzione data ha come dominio l'insieme R in quanto è il prodotto di due funzioni che hanno come dominio R:

$$\begin{cases} \left|x^2 - 1\right| \xrightarrow{dominio} R \\ e^{2x} \xrightarrow{dominio} R \end{cases} \xrightarrow{DOMINIO} D = R = \left]-\infty; +\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = \left|x^2 - 1\right| e^{-2x} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

3. Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \left|x^2 - 1\right| \cdot e^{2x} > 0 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} \left|x^2 - 1\right| > 0 \\ e^{2x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in R \\ \forall x \in R \end{cases}$$

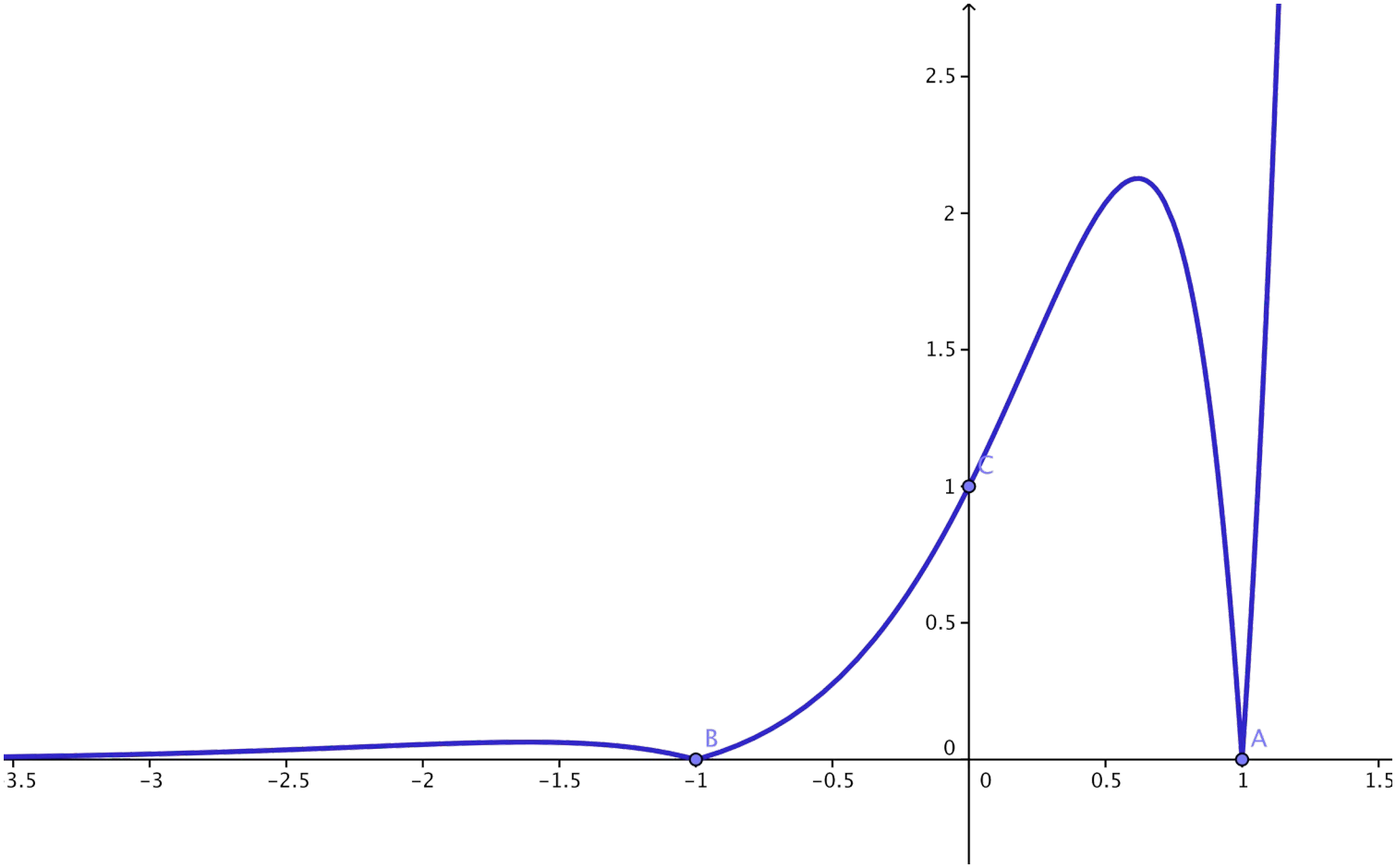
La funzione è sempre positiva nel suo dominio (tranne quando si annulla) perché data dal prodotto di due funzioni sempre positive (o al più nulle - la prima -).

4. Intersezione assi

$$X : \begin{cases} y = 0 \\ \left|x^2 - 1\right| = 0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow A = (1;0) \quad B = (-1;0)$$

$$Y : \begin{cases} x = 0 \\ y = \left|-1\right| \cdot e^0 = 1 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} C = (0;1)$$

5. Grafico



$$f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$$

1. Dominio

L'unica condizione da porre è sulla frazione, in quanto la funzione esponenziale ha come dominio R:

$$x - 1 \neq 0 \rightarrow C.E.\ frazione \xrightarrow{DOMINIO} \forall x \neq 1 \rightarrow D = \left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = e^{\frac{2}{-x-1}} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

3. Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow e^{\frac{2}{x-1}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \in D$$

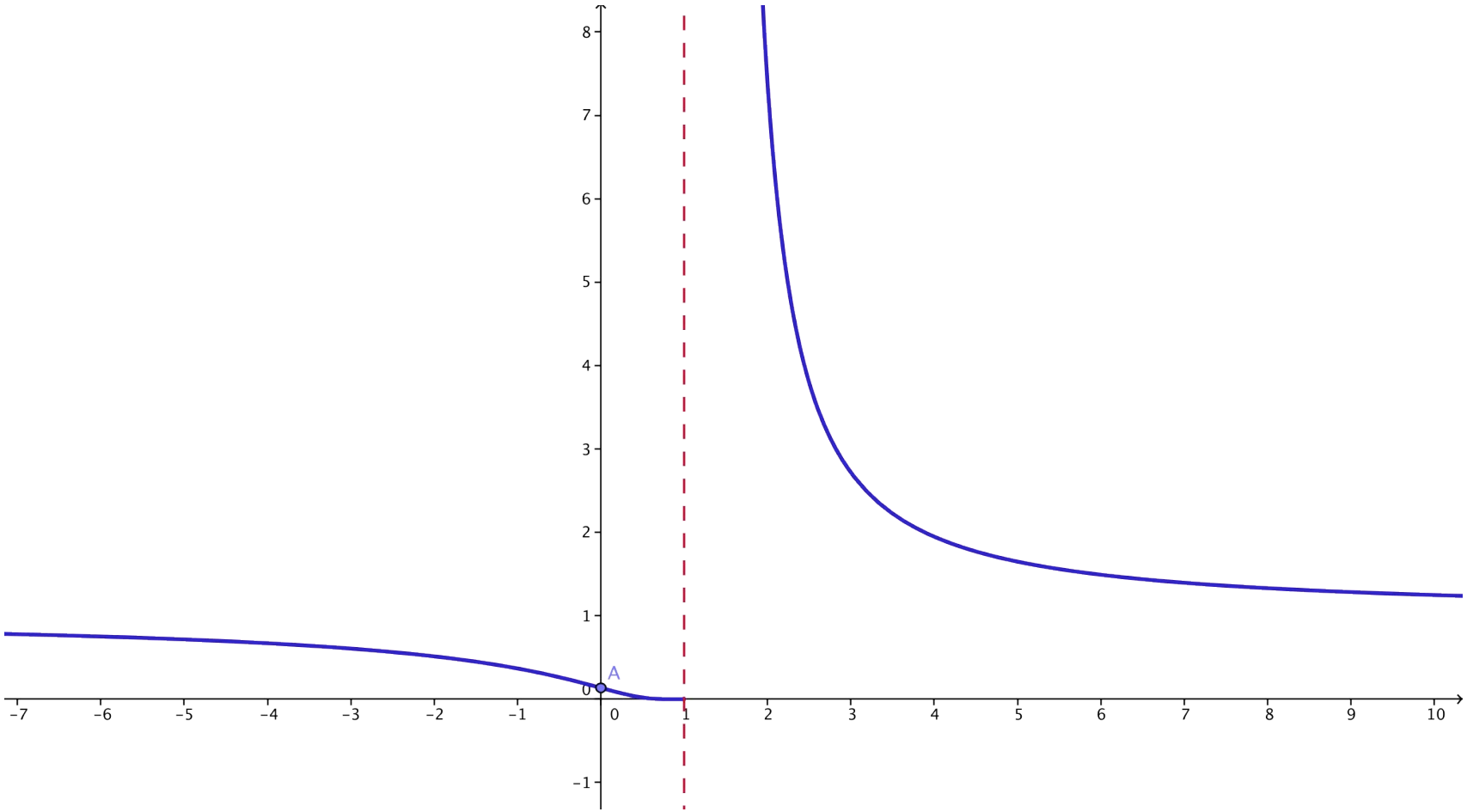
Non c'è bisogno di fare nessun calcolo in quanto la funzione in esame, essendo una funzione esponenziale, è sempre positiva nel suo dominio.

4. Intersezione assi

$$X: \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{2}{x-1}} = 0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \nexists \text{ int}ersezioni$$

$$Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{2}{0-1}} = e^{-2} \end{cases} \xrightarrow{soluzione} A = (0; e^{-2})$$

5. Grafico



$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

1. Dominio

$$\frac{x^2}{x-1} > 0 \rightarrow C.E.\ \log aritmo \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \neq 0 \ \vee \ x > -1$$

$$D = \left]-1;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

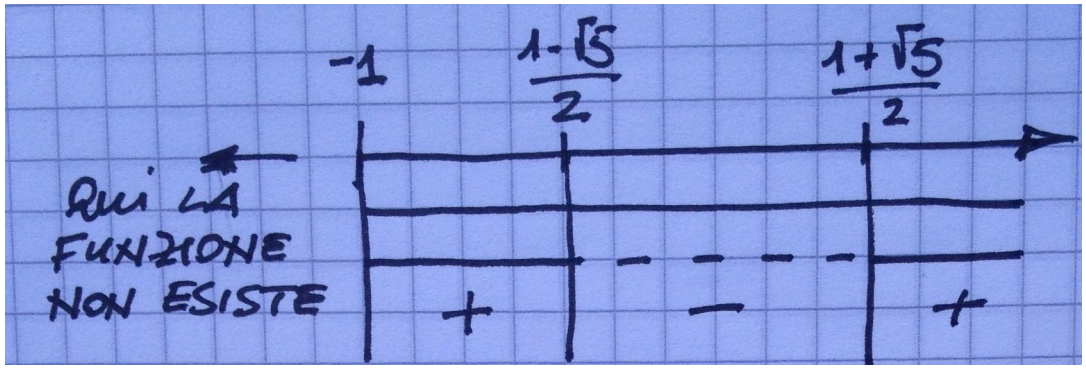
$$f(-x) = \ln\left(\frac{x^2}{-x+1}\right) \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

3. Segno della funzione

$$f(x)>0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)>0 \xrightarrow[\text{logaritmo}]{\text{definizione}} \frac{x^2}{x+1}>1 \rightarrow \frac{x^2-x-1}{x+1}>0$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} x^2-x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x>-1 \end{cases}$$



$$f(x)>0 \;\; per \;\; \forall x \in \left]-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$$

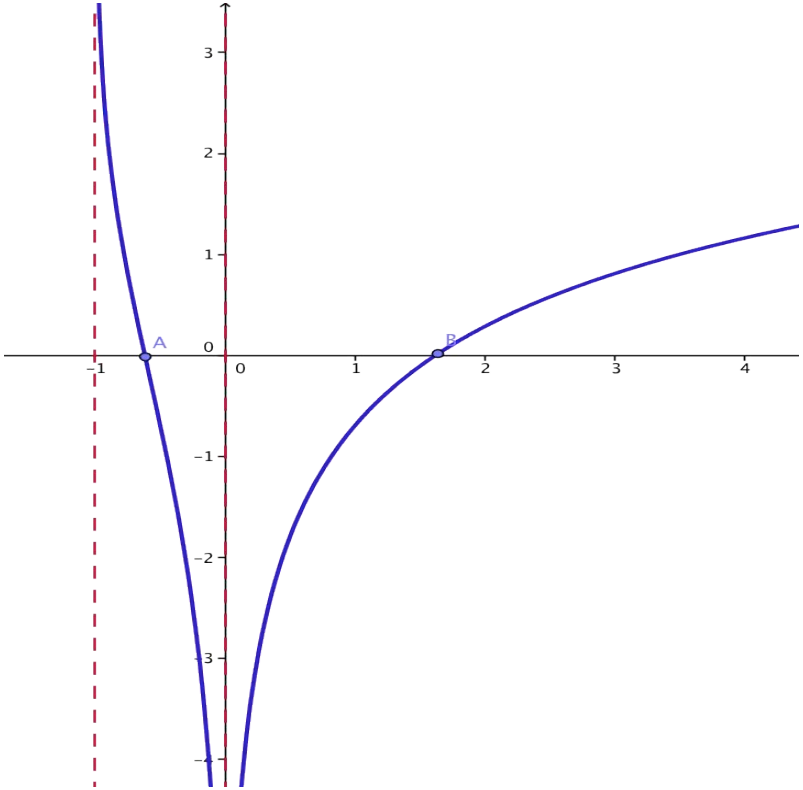
$$f(x)<0 \;\; per \;\; \forall x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

4. Intersezione assi

$$X:\begin{cases} y=0 \\ \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2-x-1}{x+1}=0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} A=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right) \quad B=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$$

$$Y:\begin{cases} x=0 \\ y=\ln\left(\dfrac{0}{0+1}\right) \end{cases} \xrightarrow[non\ \ esiste]{\ln 0} \nexists\ \text{int}\,ersezioni$$

5. Grafico



$$f(x)=(x-2)^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

1. Dominio

$$x\neq 0 \rightarrow C.E.\ frazione \xrightarrow{dominio} D=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x)=(-x-2)^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

4. Intersezione assi

$$X:\begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{sempre}\neq 0]{\text{soluzione funzione esponenziale}} \begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} A=(2;0)$$

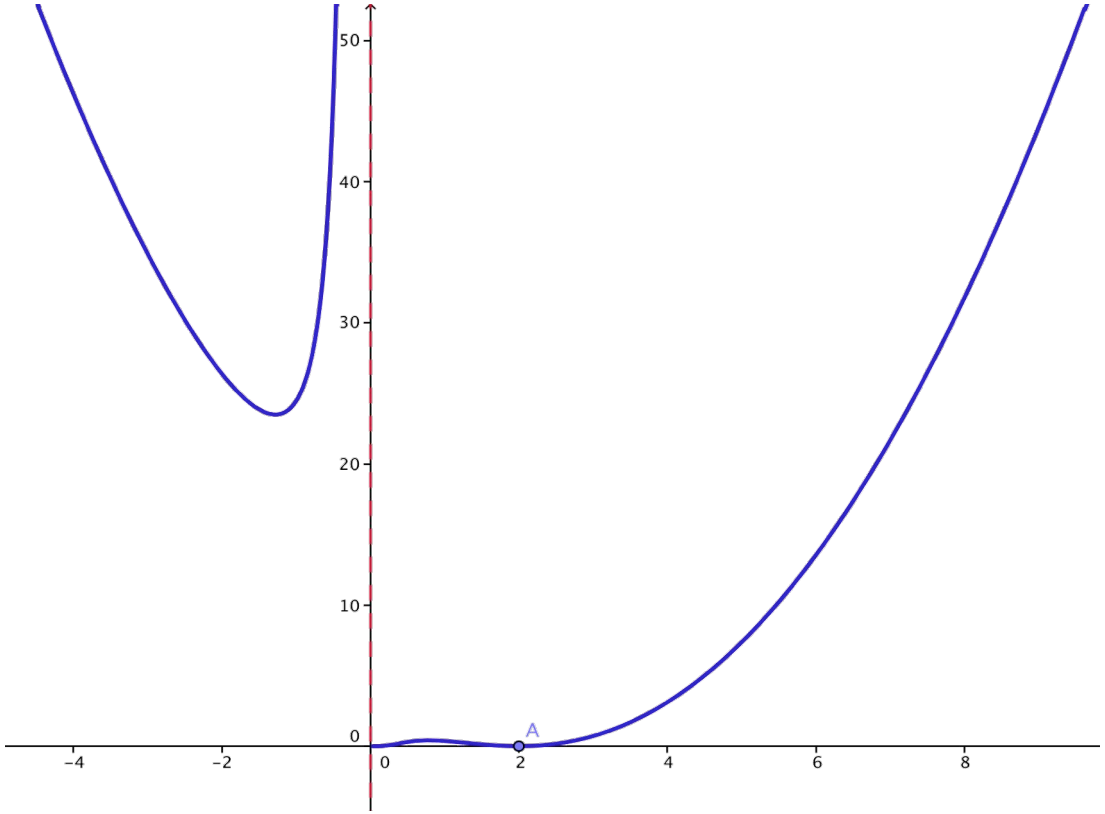
Non ci sono intersezioni con l'asse y in quanto in x=0 la funzione non esiste.

4. Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow (x-2)^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \left[\begin{array}{l} (x-2)^2 > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \in D - \{2\} \\ e^{-\frac{1}{x}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \in D \end{array} \right.$$

La funzione è sempre positiva nel suo dominio, tranne in x=2 dove si annulla.

5. Grafico



APPLICAZIONI

La popolazione di un certo Stato, che nel 1990 era di 8 milioni di persone, cresce del 3% all'anno secondo la legge:

$$N = N_0 e^{kt}$$

dove: N=popolazione, espressa in milioni di persone, presente t anni dopo il 1990; N_0=popolazione iniziale nel 1990; k=costante di crescita.

1. Calcolare k; 2. Determinare N nel 2000; 3. Indica la previsione di N nel 2020; 4. Calcolare il tempo necessario per il raddoppio della popolazione.

1. Facciamo il logaritmo di entrambi i membri e ricaviamo k:

$$N = N_0 e^{kt} \xrightarrow{isoliamo\ e^{kt}} e^{kt} = \frac{N}{N_0} \xrightarrow{\log aritmo} \ln e^{kt} = \ln \frac{N}{N_0}$$

$$\xrightarrow[\log aritmi]{proprietà} kt \ln e = \ln \frac{N}{N_0} \xrightarrow{\ln e = 1} k = \frac{\ln \frac{N}{N_0}}{t}$$

Tenendo presente che la crescita della popolazione è del 3% all'anno, allora otteniamo:

$$k = \frac{\ln \frac{N}{N_0}}{t} \xrightarrow[t=1\,anno]{N=N_0+3\%\ di\ N_0} k = \ln \frac{(8000000 + 240000)}{8000000} = \ln 1{,}03 = 0{,}03$$

2. Conoscendo la costante di crescita k, la popolazione N nel 2000 vale:

$$N = N_0 e^{kt} = 8000000 \cdot e^{0{,}03 \cdot 10} = 10.751.130 \ \ abitanti$$

3. Con la legge di crescita data, la previsione nel 2020 è:

$$N = N_0 e^{kt} = 8000000 \cdot e^{0{,}03 \cdot 30} \approx 19.674.989 \ \ abitanti$$

4. Il tempo necessario affinché raddoppi la popolazione, è:

$$kt = \ln \frac{N}{N_0} \xrightarrow{N=2N_0} t = \frac{\ln \frac{2N_0}{N_0}}{k} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \cong 23{,}45 \ \ anni$$

Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20 minuti. Si conosce il numero iniziale N_0=500.

1. Scrivere un'equazione che permetta di determinare in numero N di batteri presenti t minuti più tardi 2. calcolare il valore di N dopo 60 minuti 3. Dopo quanto tempo i batteri sono 2.350.000.

1. Assumendo una legge di tipo esponenziale: $\boxed{N = N_0 e^{kt}}$

la costante di crescita vale:

$$N = N_0 e^{kt} \xrightarrow{isoliamo\ e^{kt}} e^{kt} = \frac{N}{N_0} \xrightarrow{\log aritmo} \ln e^{kt} = \ln \frac{N}{N_0}$$

$$\xrightarrow[\log aritmi]{proprietà} kt \ln e = \ln \frac{N}{N_0} \xrightarrow[t=20 \quad N=2N_0]{\ln e=1} k = \frac{\ln 2}{20}$$

Quindi, l'equazione che descrive la crescita dei batteri ha la forma:

$$N = 500 \cdot e^{\frac{\ln 2}{20} t}$$

2. Conoscendo la legge di crescita dei batteri, il loro numero dopo 60 minuti è pari a:

$$N = 500 \cdot e^{\frac{\ln 2}{20} \cdot 60} \cong 4000 \ \ batteri$$

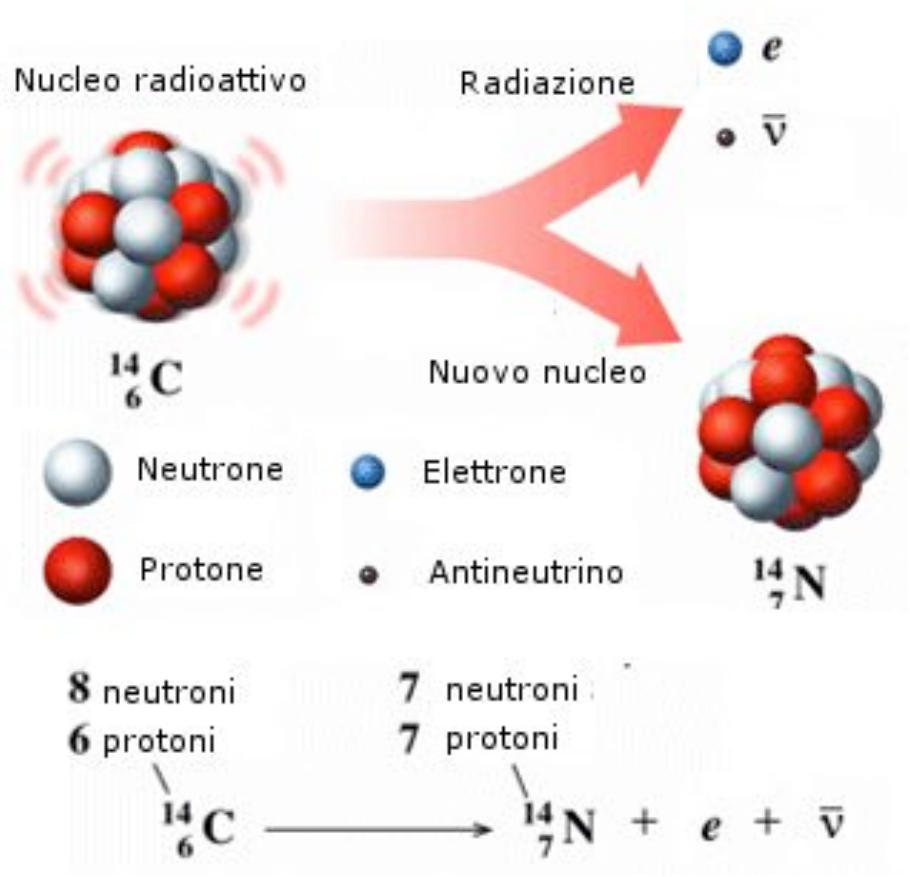
3. Dopo quanto tempo i batteri sono 2.350.000?

$$kt = \ln \frac{N}{N_0} \xrightarrow[k=\ln 2/20]{N_0=500 \quad N=2.350.000} t = \frac{\ln \frac{2.350.000}{500}}{\frac{\ln 2}{20}} \cong 244 \ \ \text{minuti}$$

Legge del decadimento radioattivo

Definizione

La radioattività o decadimento radioattivo è l'emissione di una o più particelle da parte di un atomo. L'atomo radioattivo (radionuclide) si trasforma quindi in un altro atomo, che può essere a sua volta radioattivo oppure stabile.

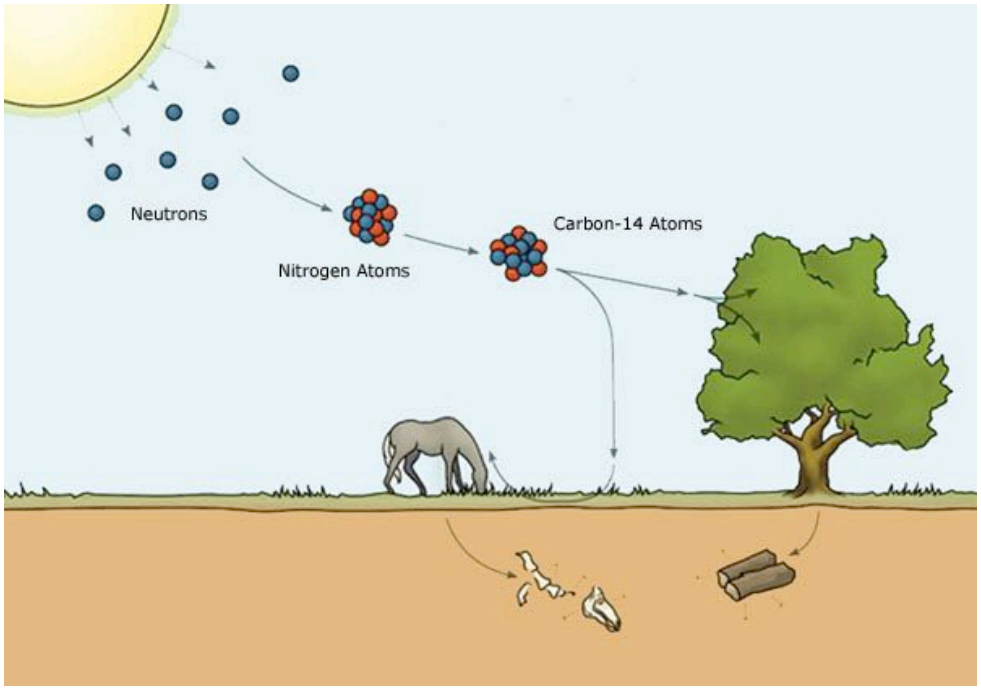


$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0=numero nuclei radioattivi al tempo t=0
N=numero nuclei radioattivi al tempo λ =costante di decadimento che dipende dal radionuclide

Metodo ^{14}C: utilizza la legge del decadimento radioattivo per datare fossili, legno, fibre, e in generale reperti archeologici di età compresa tra 100 e 50.000 anni.

Come si forma il ^{14}C? I neutroni prodotti dai raggi cosmici negli strati alti dell'atmosfera si combinano con l'azoto e producono ^{14}C. Il radiocarbonio si combina con l'ossigeno e si muove liberamente nell'atmosfera sotto forma di anidride carbonica. In questo modo viene assorbito dalle piante, dagli animali, e dall'uomo.



Dopo la morte l'organismo non assorbe più ^{14}C, così la quantità dell'isotopo ^{14}C diminuisce secondo la legge del decadimento radioattivo:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- ✓ N_0=numero di atomi di ^{14}C nell'organismo vivente, ossia a t=0
- ✓ N(t) = numero di atomi di ^{14}C al giorno d'oggi (dopo t anni dalla morte dell'organismo). N(t) si misura a partire da un campione del reperto da datare
- ✓ λ =tasso di decadimento del ^{14}C, noto sperimentalmente

Possiamo quindi determinare quanto tempo è intercorso dalla morte di un dato organismo.

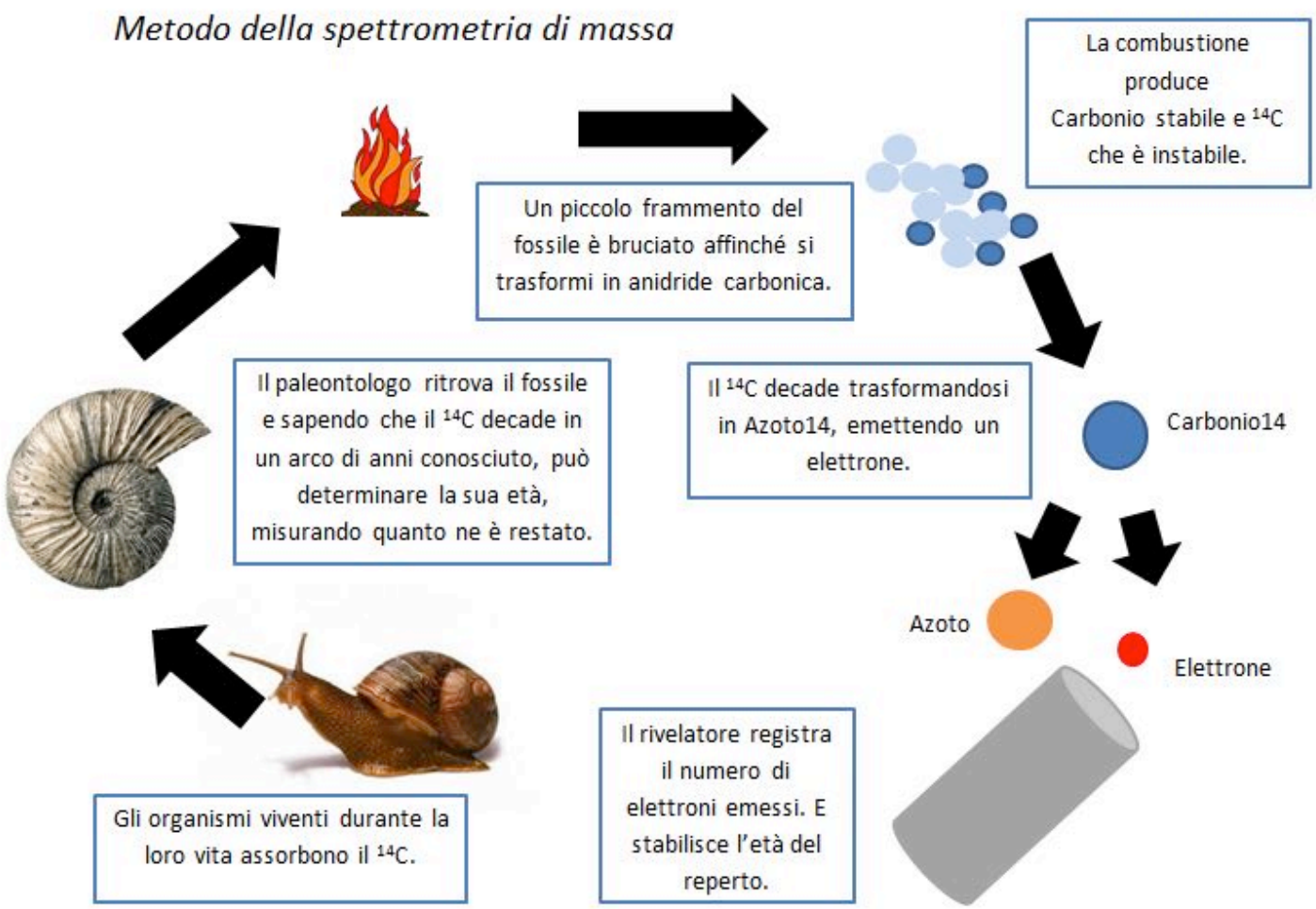
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow{isoliamo\ e^{kt}} e^{-\lambda t} = \frac{N(t)}{N_0} \xrightarrow{\log aritmo} \ln e^{-\lambda t} = \ln \frac{N(t)}{N_0}$$

$$\xrightarrow[\ln e = 1]{proprietà\ \log aritmi} -\lambda t = \ln \frac{N(t)}{N_0} \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{N(t)}{N_0}$$

Grazie a questa formula è possibile ricavare l'età di un dato resto organico misurando la quantità di ^{14}C presente nel campione.

Stimare l'età della Sindone, sapendo che la percentuale di ^{14}C si è ridotta del 10% rispetto a quella originaria.

Come avviene l'analisi del reperto:

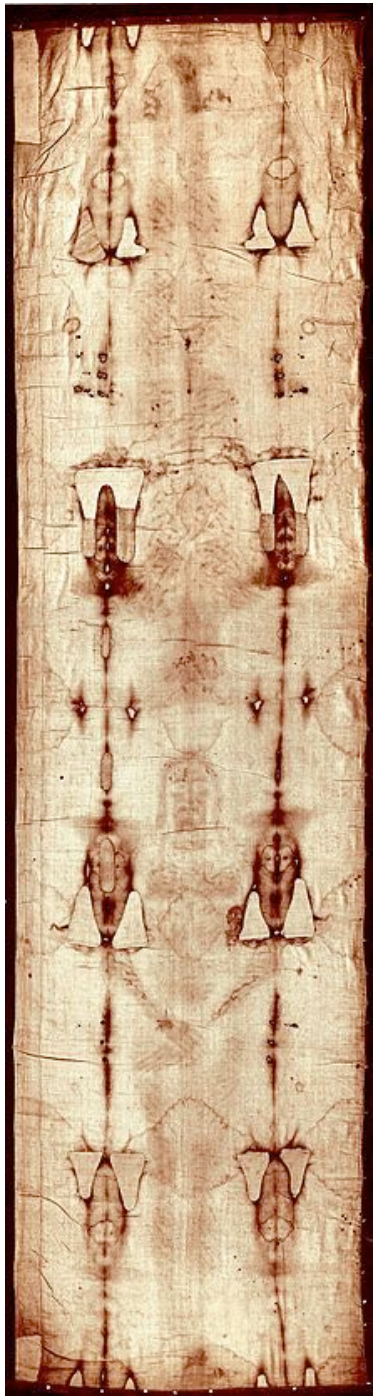


Come abbiamo dimostrato in precedenza, misurando la quantità di ^{14}C presente nel campione, l'età del resto resto organico (nel nostro caso un pezzo di stoffa tagliato dal lenzuolo) è data da:

$$\boxed{t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{N(t)}{N_0} = -\frac{1}{1,21 \cdot 10^{-4}} \cdot \ln \frac{0,9 \cancel{N_0}}{\cancel{N_0}} \cong 870 \ \ anni}$$

Dove la costante di decadimento vale:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\ln 2}{\tau} = \dfrac{\ln 2}{5730} \cong 1,21 \cdot 10^{-4} \ \ s^{-1} \\ \tau = 5730 \ \ anni \rightarrow tempo \ \ di \ \ \mathrm{dim}ezzamento \ \ o \ \ emivita \ \ del \ \ ^{14}C \end{array}}$$

Emivita: intervallo di tempo necessario affinché il numero di radionuclidi N si riduca della metà.

Secondo il risultato dell'esame, eseguito separatamente da tre laboratori (Tucson, Oxford e Zurigo) su un campione di tessuto prelevato appositamente, il lenzuolo va datato nell'intervallo di tempo compreso tra il 1260 e il 1390. Questa datazione corrisponde al periodo in cui si ha la prima documentazione storica che si riferisca con certezza alla Sindone di Torino (1353).