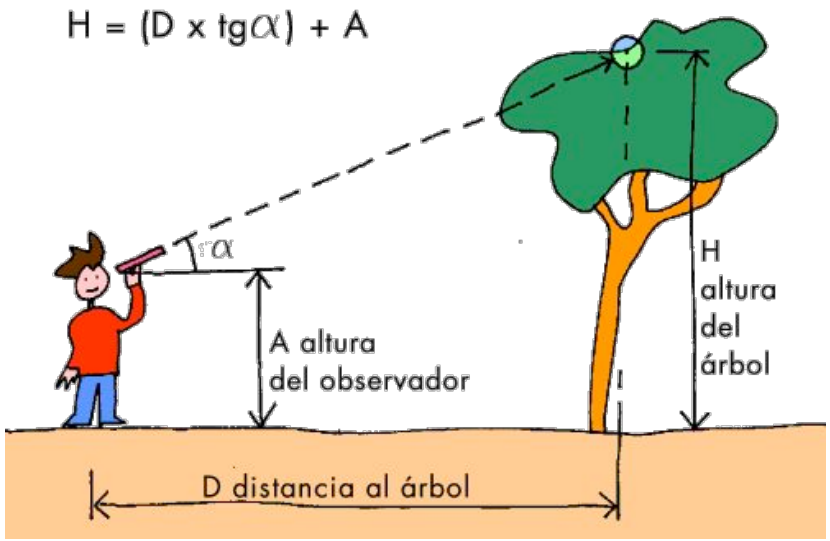
Matematica

TRIGONOMETRIA

La trigonometria



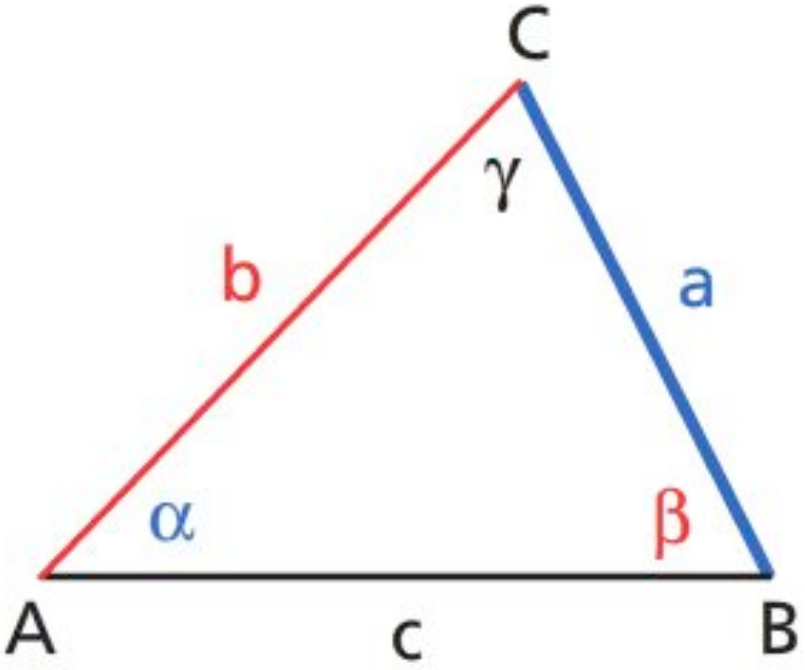
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

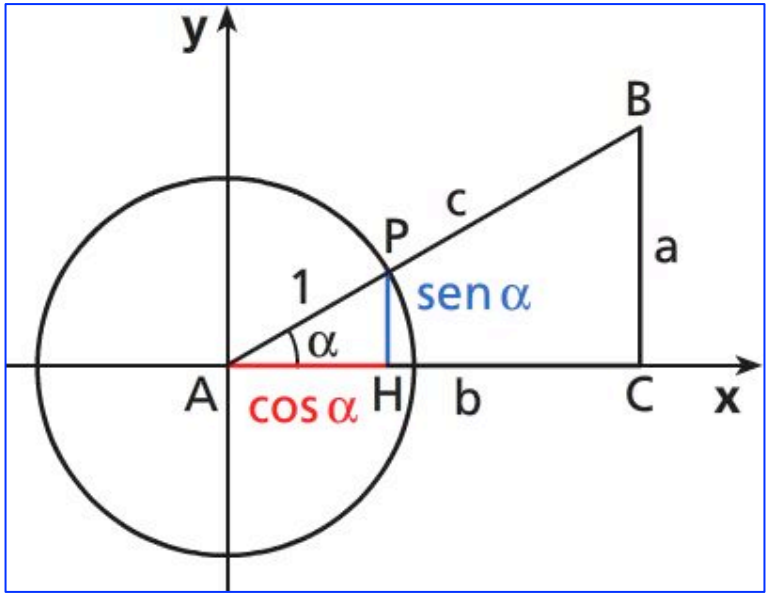
Finora ci siamo occupati di goniometria, ossia della misura di angoli e delle funzioni goniometriche associate ad essi.

Ora ci occuperemo di **trigonometria**, ossia delle relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo.

Utilizzeremo la seguente nomenclatura per gli elementi (angoli e lati) del triangolo.



TEOREMI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO



I due triangoli APH e ABC sono simili:

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{PH} : \overline{AP} \qquad \overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AH} : \overline{AP}$$

$$\overline{AP} = 1 \qquad \overline{PH} = sen\alpha \qquad \overline{AH} = \cos\alpha$$

si ha il seguente teorema:

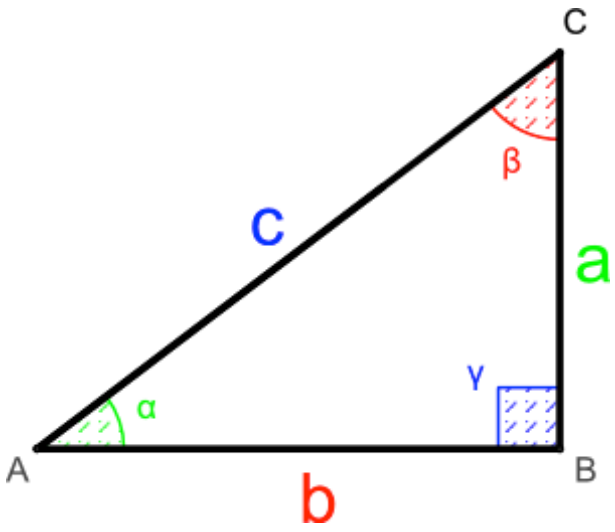
Primo teorema dei triangoli rettangoli

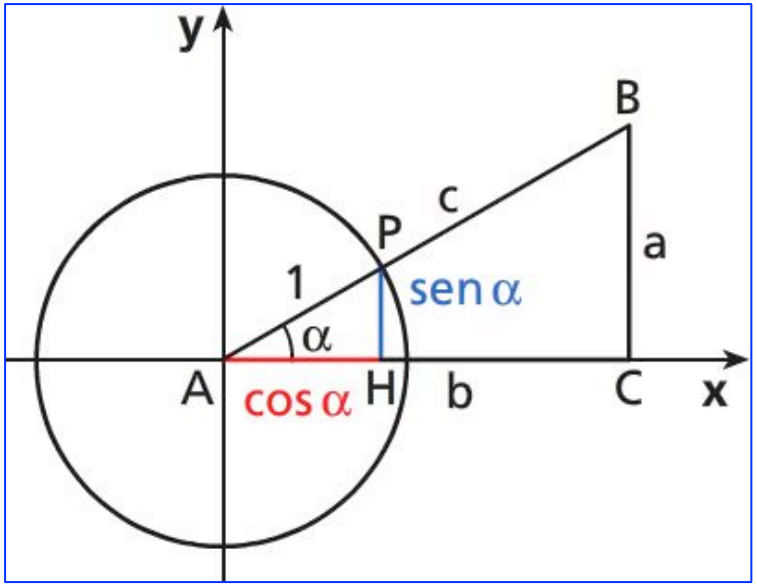
Cateto=ipotenusa x seno dell'angolo opposto al cateto

$$a = c \cdot sen\alpha \qquad b = c \cdot sen\beta$$

Cateto=ipotenusa x coseno dell'angolo adiacente al cateto

$$a = c \cdot \cos\beta \qquad b = c \cdot \cos\alpha$$





Per i due triangoli APH e ABC, essendo simili, possiamo anche scrivere:

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{PH} : \overline{AH}$$

$$\overline{BC} = sen\alpha \quad \overline{AC} = \cos\alpha \quad \overline{PH} = sen\alpha \quad \overline{AH} = \cos\alpha$$

si ha il seguente teorema:

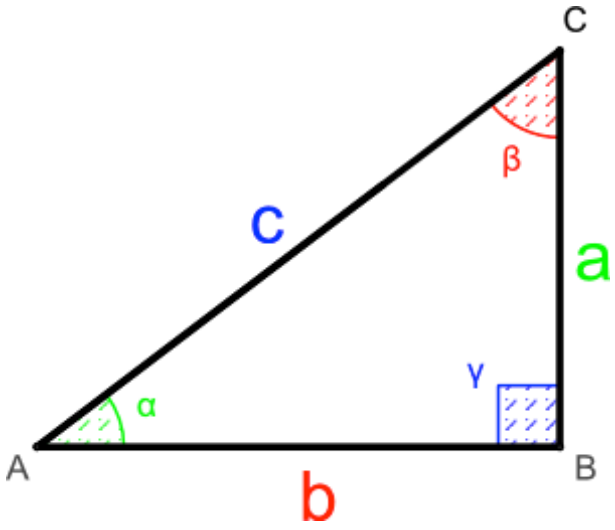
Secondo teorema dei triangoli rettangoli

Cateto=altro cateto x tangente dell'angolo opposto al cateto

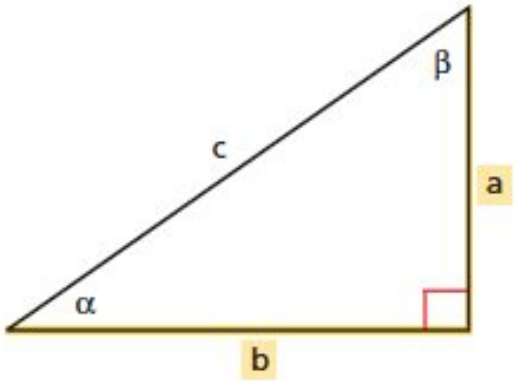
$$a = b \cdot tg\alpha \quad b = a \cdot tg\beta$$

Cateto=altro cateto x cotangente dell'angolo adiacente al cateto

$$a = b \cdot \cot g\beta \quad b = a \cdot \cot g\alpha$$



Sono noti due cateti (a,b), determinare (α, β, c)



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, da cui ricaviamo

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$;

$\beta = 90° - \alpha$;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, per il teorema di Pitagora.

ESEMPIO

Le misure dei due cateti del triangolo in figura sono $a = 40$ e $b = 110$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{110} = 0,\overline{36}, \quad \text{da cui}$$

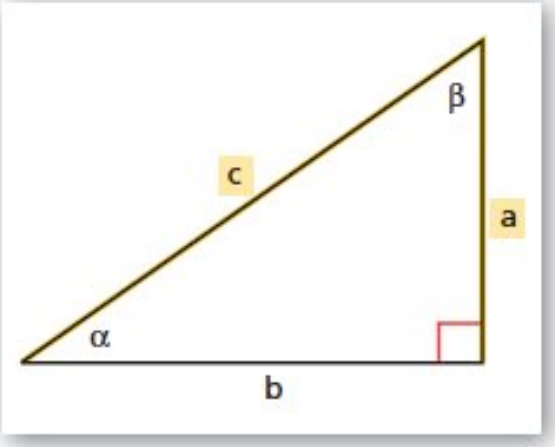
$\alpha \simeq 19°\,58'\,59''$, che approssimiamo a 20°,

$$\alpha \simeq 20° \;\rightarrow\; \beta \simeq 90° - 20° \simeq 70°.$$

$$c = \sqrt{40^2 + 110^2} = \sqrt{1600 + 12100} = \sqrt{13700} \simeq 117.$$

È possibile calcolare il valore di c anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma ricavando c dalla formula: $a = c \operatorname{sen}\alpha$.

Sono noti due cateti (a,c), determinare (α, β, b)



$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$, da cui ricaviamo

$\alpha = \text{arcsen}\frac{a}{c}$;

$\beta = 90° - \alpha$;

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$, per il teorema di Pitagora.

Si può ricavare b anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma con:

$$b = c\cos\alpha \quad \text{o} \quad b = c\,\text{sen}\,\beta.$$

ESEMPIO

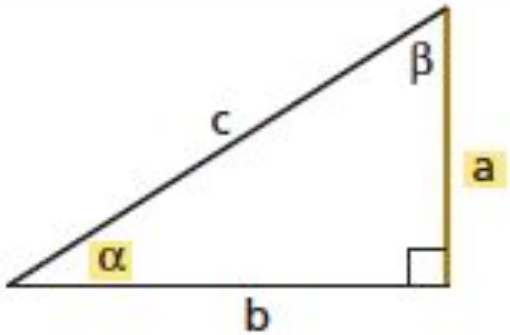
In un triangolo rettangolo le misure di un cateto e dell'ipotenusa sono $a = 21{,}13$ e $c = 50$.
Ricaviamo:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{21{,}13}{50} = 0{,}4226 \rightarrow \alpha \simeq 25°;$$

$$\beta \simeq 90° - 25° \simeq 65°;$$

$$b = \sqrt{50^2 - (21{,}13)^2} = \sqrt{2500 - 446{,}4769} = \sqrt{2053{,}5231} \simeq 45{,}3.$$

Sono noti un cateto e un angolo acuto (a, α), determinare (β, b,c).



$$\beta = 90° - \alpha;$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

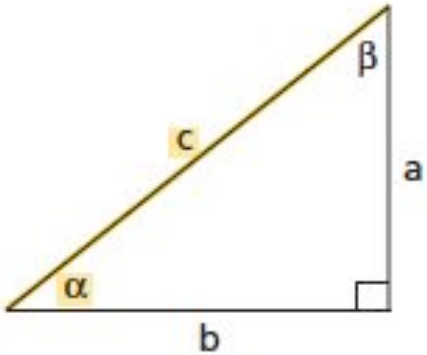
ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo in cui sono noti $a = 8$ e $\alpha = 28°$. Si ricava:

$$\beta = 90° - 28° = 62°; \quad b = 8 \operatorname{tg} 62° \simeq 8 \cdot 1{,}88 \simeq 15;$$

$$c \simeq \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Sono noti l'ipotenusa e un angolo acuto (c, α), determinare (β, a,b).



$$\beta = 90° - \alpha;$$

$$a = c \text{ sen } \alpha;$$

$$b = c \text{ sen } \beta.$$

ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo della figura a lato. Le misure dell'ipotenusa e dell'angolo sono rispettivamente $c = 28{,}3$ e $\alpha = 58°$.
Si ricava:

$$\beta = 90° - 58° = 32°;$$

$$a = 28{,}3 \cdot \text{sen } 58° \simeq 28{,}3 \cdot 0{,}848 \simeq 24;$$

$$b = 28{,}3 \cdot \text{sen } 32° \simeq 28{,}3 \cdot 0{,}5299 \simeq 15.$$

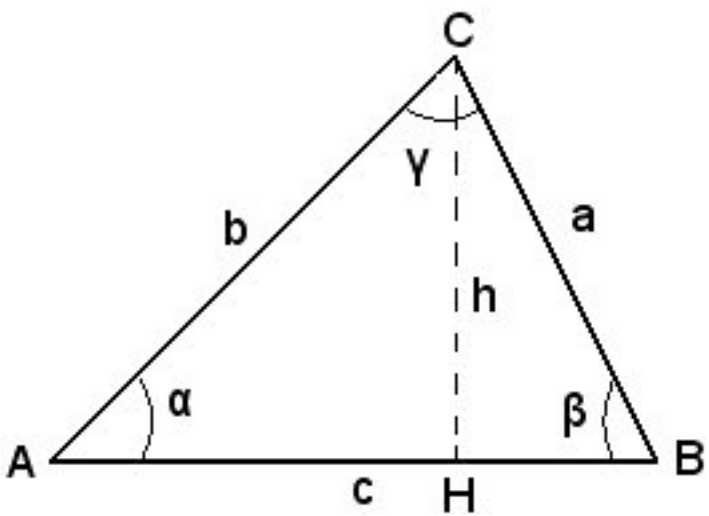
Area di un triangolo

- α<90° (angolo acuto)

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{cbsen\alpha}{2}$$

$$dove: \quad \overline{CH} = bsen\alpha$$

(teorema triangolo rettangolo)

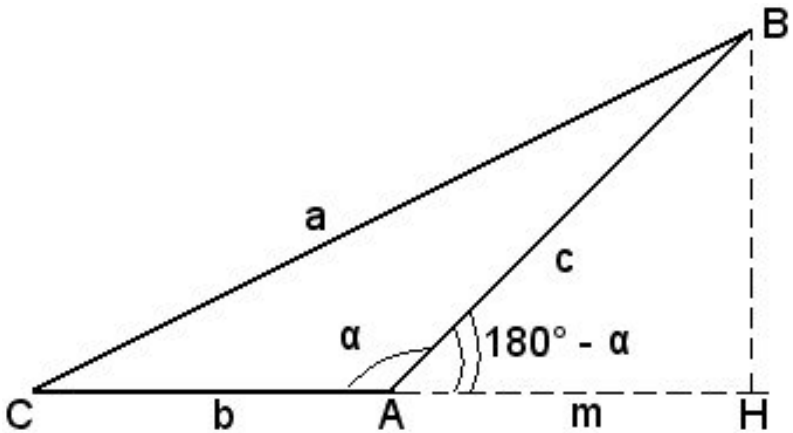


- A>90° (angolo ottuso)

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{cbsen\alpha}{2}$$

$$dove: \quad \overline{BH} = csen(180° - \alpha) = csen\alpha$$

(teorema triangolo rettangolo)



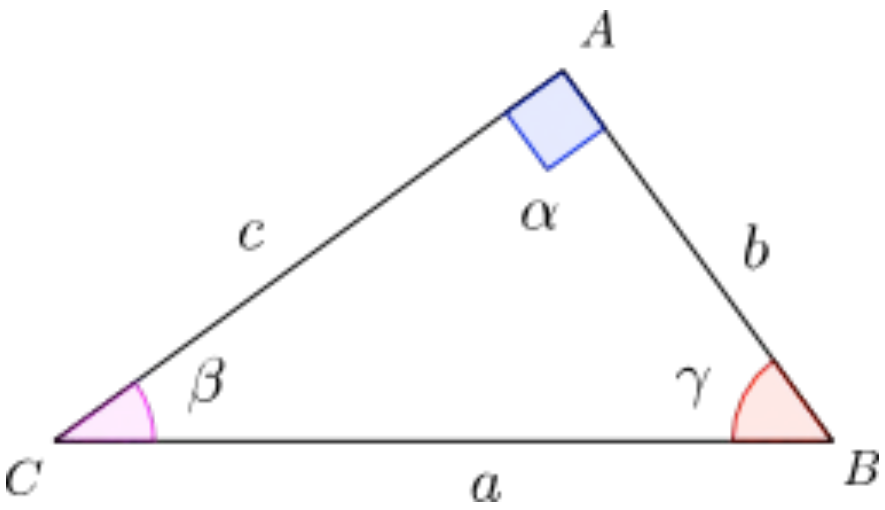
teorema
Area di un triangolo

La misura dell'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati e del seno dell'angolo tra di essi compreso:

$$A = \frac{bc\,sen\alpha}{2}$$

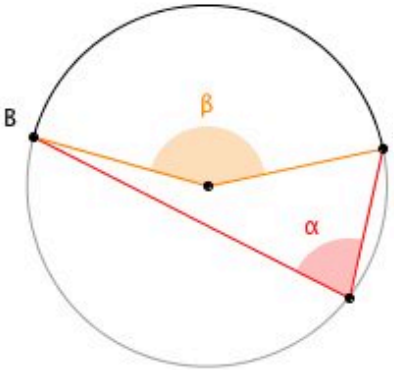
$$A = \frac{ab\,sen\gamma}{2}$$

$$A = \frac{ac\,sen\beta}{2}$$



definizione

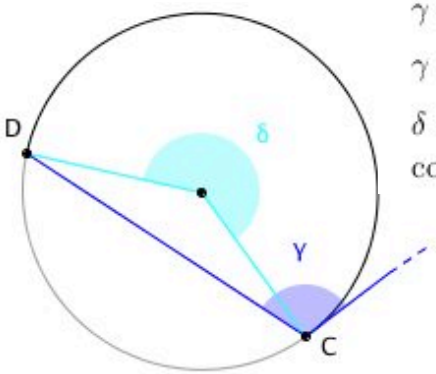
- Un angolo alla circonferenza è un angolo convesso che ha vertice sulla circonferenza considerata, e tale per cui i suoi lati sono entrambi secanti la circonferenza, oppure uno secante e l'altro tangente.
- Diremo che un angolo alla circonferenza insiste sull'arco che ha per estremi i punti di intersezione tra i lati dell'angolo e la circonferenza, ed è contenuto nell'angolo.
- Dato un angolo alla circonferenza, si dice angolo al centro corrispondente l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e che sottende l'arco su cui insiste l'angolo alla circonferenza.



α è un angolo alla circonferenza

α insiste su $\widehat{AB}$

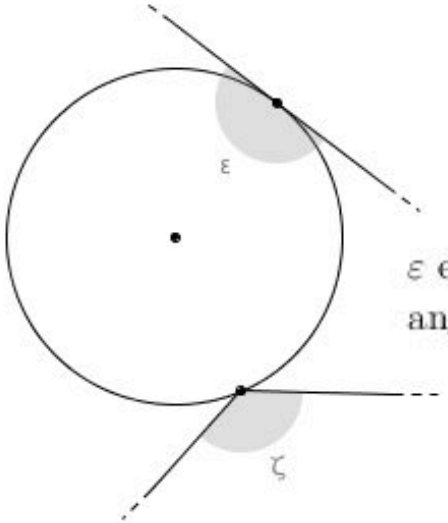
β è l'angolo al centro corrispondente ad α



γ è un angolo alla circonferenza

γ insiste su $\widehat{CD}$

δ è l'angolo al centro corrispondente a γ



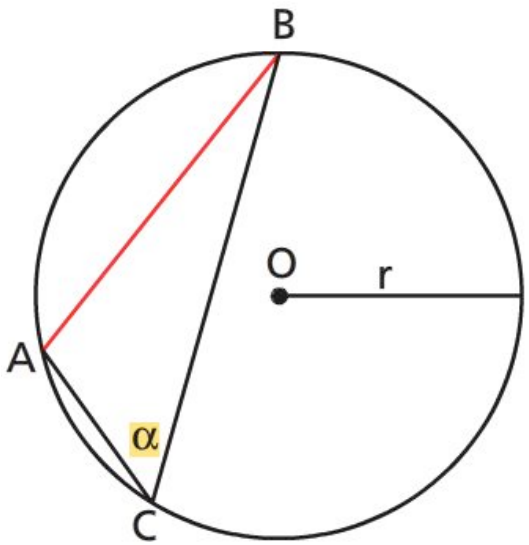
ε e ζ NON sono angoli alla circonferenza

Teorema della corda

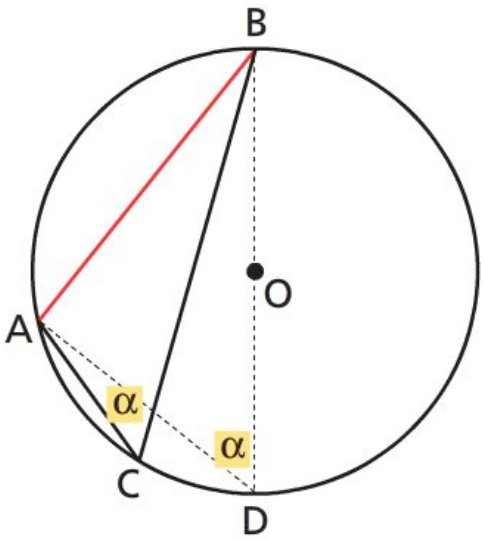
In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto della misura dl diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda:

$$\overline{AB} = 2r \cdot sen\alpha$$

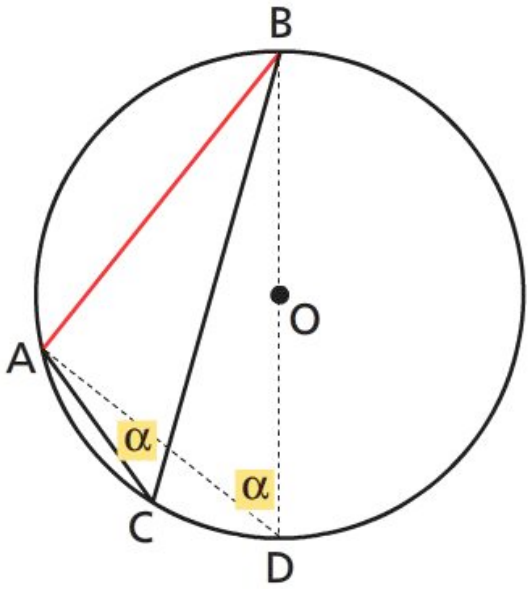
Teorema della corda



dimostrazione



Sia α=ACB un qualsiasi angolo alla circonferenza che insista sulla corda AB e sull'arco minore AB. Dopo aver fatto la costruzione in figura, osserviamo che il triangolo ABD è rettangolo in A (perché inscritto in una semicirconferenza).



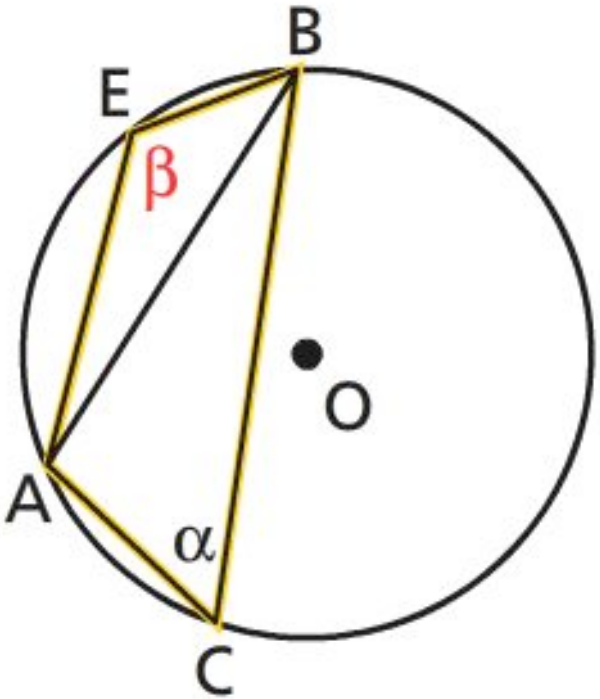
Inoltre, l'angolo α in D è uguale a quello α in C (ADB≅ACB) perché sono due angoli che insistono sullo stesso arco AB.

Applicando il teorema sul triangolo rettangolo, calcoliamo la misura della corda AB:

$$\boxed{\overline{AB} = 2r \cdot sen\alpha}$$

Come volevasi dimostrare.

Il teorema continua a valere anche se consideriamo l'angolo AEB=β che insiste sull'arco maggiore AB.



Infatti, il quadrilatero AEBC, essendo inscritto in una circonferenza, ha gli angoli opposti supplementari. Quindi:

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \beta = \pi - \alpha \ \ e \ \ sen\beta = sen(\pi - \alpha) = sen\alpha$$

ESERCIZIO GUIDA

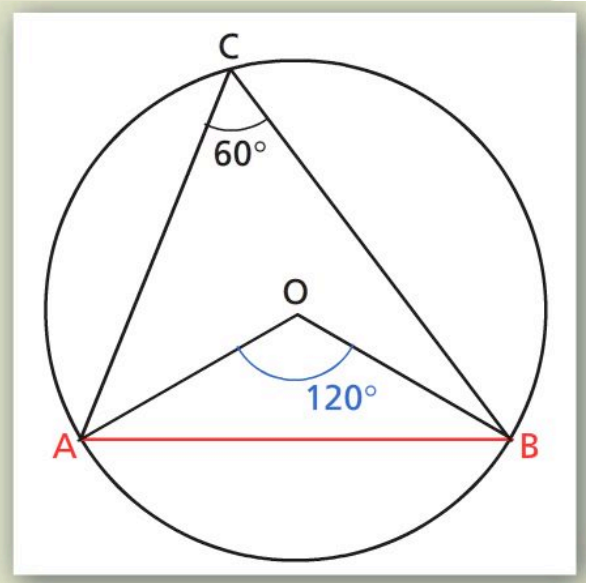
In una circonferenza il raggio è 20 cm. Calcoliamo la lunghezza di una sua corda, sapendo che l'angolo al centro che insiste su di essa ha ampiezza di 120°.

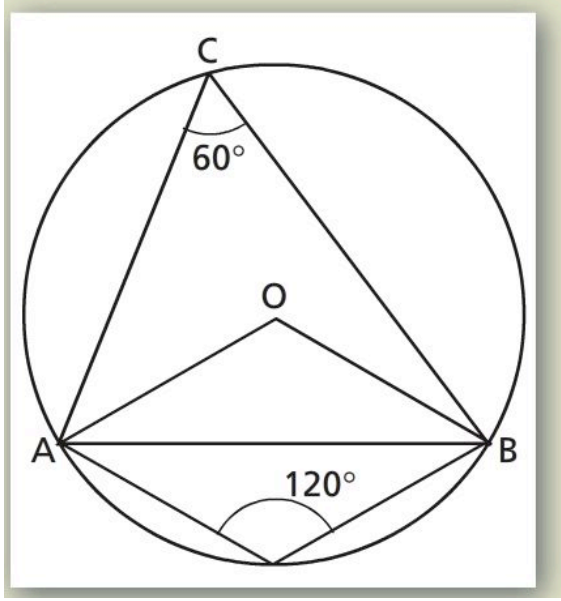
Se l'angolo al centro che insiste sulla corda è 120°, allora il corrispondente angolo alla circonferenza è $\alpha = 60°$.

Per il teorema della corda è:

$$\overline{AB} = 2r \operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot 20 \cdot \operatorname{sen} 60° = \overset{20}{\cancel{40}} \frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 20\sqrt{3}.$$

La corda è lunga $20\sqrt{3}$ cm.

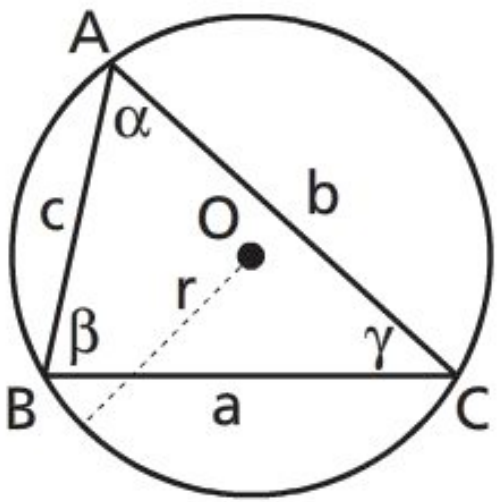




Osservazione. Sulla corda AB insistono angoli alla circonferenza di 60° e angoli alla circonferenza di 120°. La lunghezza della corda AB che calcoliamo non dipende dall'angolo scelto, perché

$$\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Raggio circonferenza circoscritta a un triangolo



Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r.

Il teorema della corda permette di scrivere le seguenti relazioni:

$$a = 2r \cdot sen\alpha \qquad b = 2r \cdot sen\beta \qquad c = 2r \cdot sen\gamma$$

da cui possiamo ricavare il raggio r:

$$\boxed{r = \frac{a}{2sen\alpha} \qquad r = \frac{b}{2sen\beta} \qquad r = \frac{c}{2sen\gamma}}$$

Queste formule consentono di calcolare il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo conoscendo un lato del triangolo e l'angolo opposto ad esso.

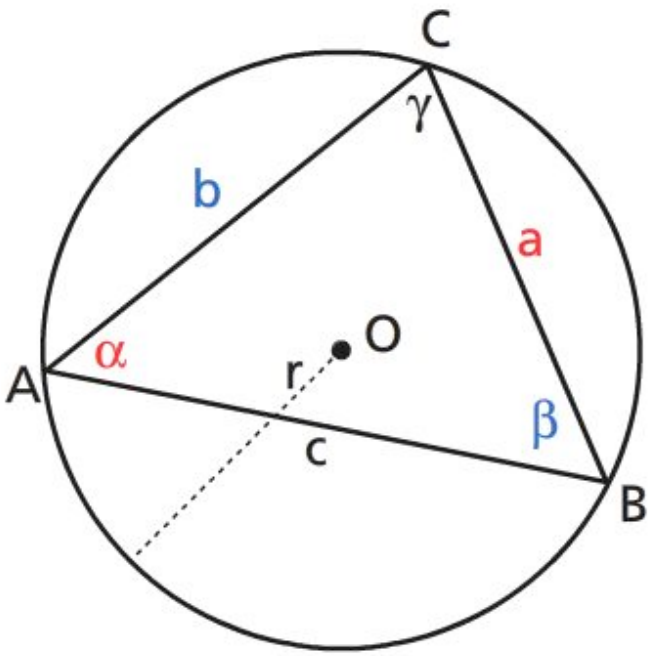
Esaminiamo le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque.

Teorema dei seni

Teorema dei seni

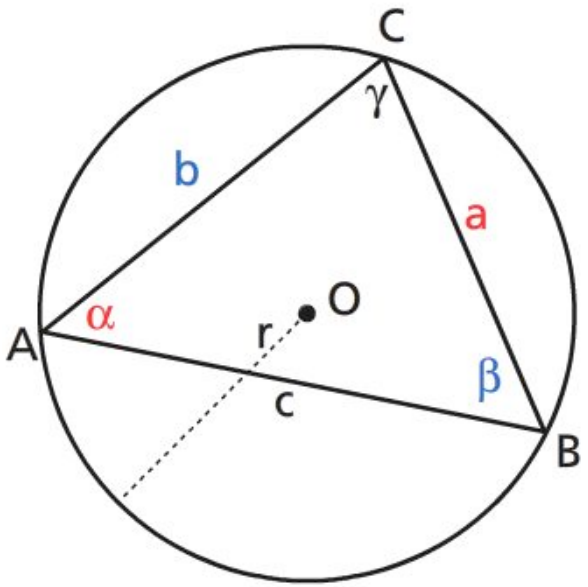
In un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$



dimostrazione

Applichiamo il teorema della corda ai lati del triangolo ABC inscritto in una circonferenza di diametro 2r:



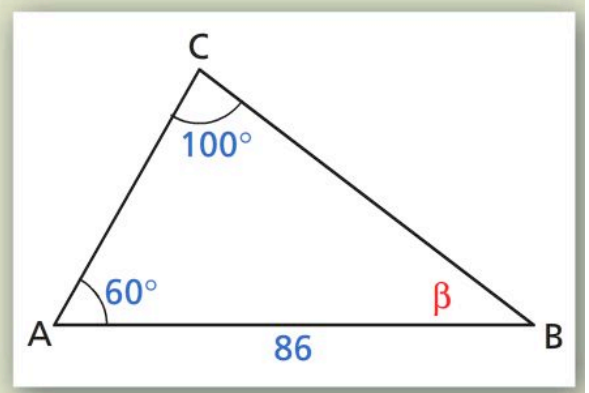
$$a = 2r \cdot sen\alpha \Rightarrow 2r = \frac{a}{sen\alpha}$$

$$b = 2r \cdot sen\beta \Rightarrow 2r = \frac{b}{sen\beta} \xrightarrow{DA\ CUI} \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r$$

$$c = 2r \cdot sen\gamma \Rightarrow 2r = \frac{c}{sen\gamma}$$

ESERCIZIO GUIDA

Utilizziamo gli elementi indicati nella figura per trovare l'angolo β e i lati *CB* e *AC* del triangolo.



$$\beta = 180° - (100° + 60°) = 20°.$$

Applichiamo il teorema dei seni per determinare *CB* e *AC*:

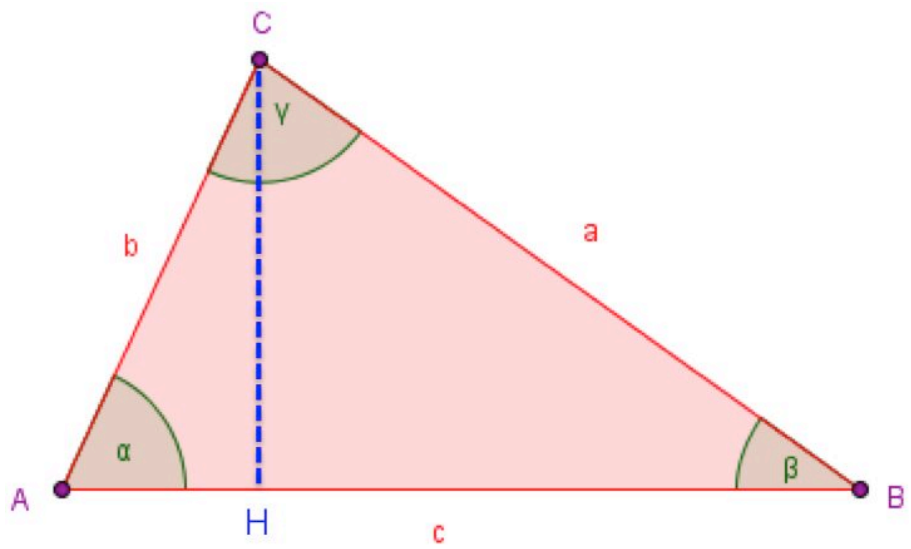
$$\frac{\overline{CB}}{\text{sen } 60°} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \rightarrow \overline{CB} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \cdot \text{sen } 60° \simeq 75{,}6.$$

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 20°} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \cdot \text{sen } 20° \simeq 29{,}8.$$

Teorema del coseno

Teorema dei coseno

In un triangolo, il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compresso:

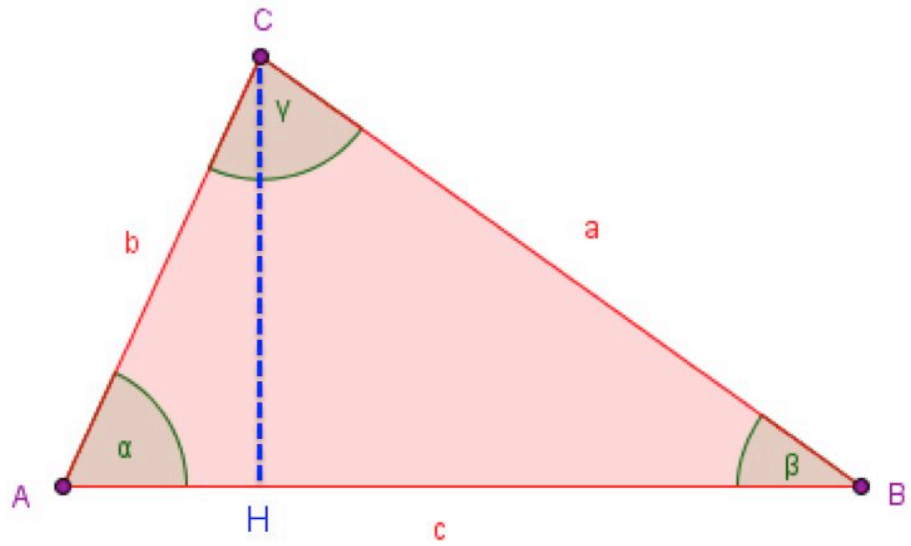


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

dimostrazione



Applichiamo al triangolo ACH il primo teorema dei triangoli rettangoli:

$$CH = b sen\alpha \qquad AH = b\cos\alpha \xrightarrow{DA\ CUI} HB = AB - AH = c - b\cos\alpha$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo CHB per determinare CB:

$$CB^2 = CH^2 + HB^2 = b^2 sen^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2 \xrightarrow[con\ CB=a]{calcoli} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

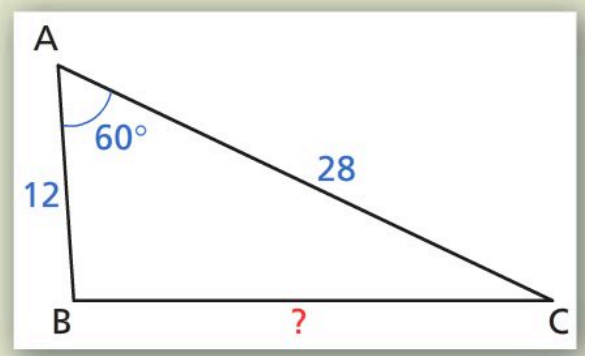
Analogamente per gli altri due lati:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la misura del lato *BC* utilizzando gli elementi indicati nella figura.



Applichiamo il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos B\widehat{A}C =$$

$$= 12^2 + 28^2 - 2\cdot 12\cdot 28\cos 60° =$$

$$= 144 + 784 - \cancel{2}\cdot 12\cdot 28\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 592 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{592} \simeq 24{,}3.$$

Risoluzione di un triangolo qualunque

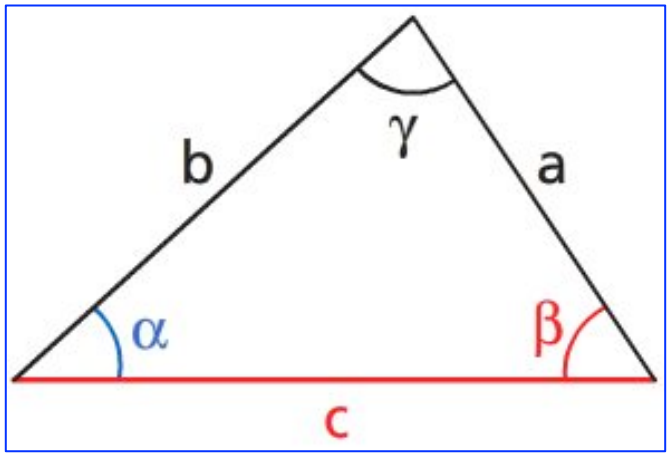
Risolvere un triangolo qualunque significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. È sempre possibile risolvere un triangolo se sono noti *tre* suoi elementi, di cui *almeno uno sia un lato*.
Possiamo utilizzare il teorema dei seni e il teorema del coseno.
Esaminiamo i quattro possibili casi.

Sono noti un lato e due angoli

Conoscendo c, α e β, vogliamo determinare γ, a e b.

Determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Per il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \rightarrow \quad a = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}.$$



Ancora per il teorema dei seni:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \rightarrow \quad b = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

ESEMPIO

Nel triangolo in figura a lato sono noti $c = 12$, $\alpha = 40°$ e $\beta = 60°$. Ricaviamo γ:

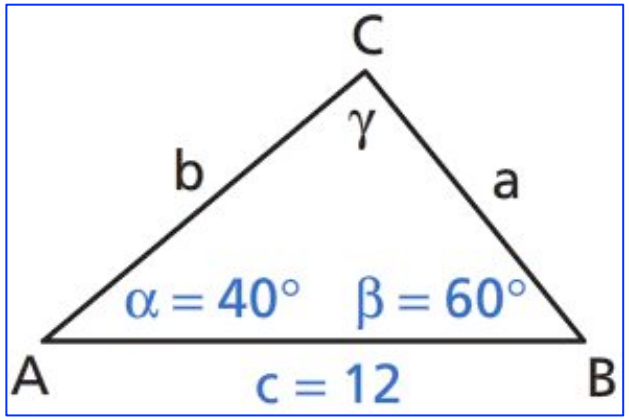
$$\gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°.$$

Per il teorema dei seni, $\dfrac{a}{\text{sen } 40°} = \dfrac{12}{\text{sen } 80°}$, da cui:

$$a = \frac{12 \cdot \text{sen } 40°}{\text{sen } 80°} \simeq \frac{12 \cdot 0{,}64279}{0{,}9848} \simeq 7{,}83.$$

Ancora per il teorema dei seni, $\dfrac{b}{\text{sen } 60°} = \dfrac{12}{\text{sen } 80°}$, da cui:

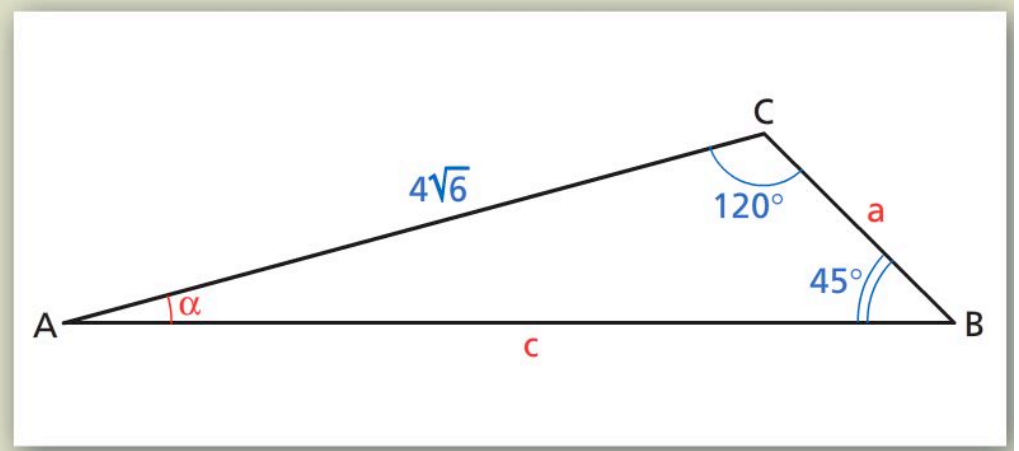
$$b = \frac{12 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 80°} \simeq \frac{12 \cdot 0{,}866}{0{,}9848} \simeq 10{,}55.$$



ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo il triangolo ABC, sapendo che:

$$b = 4\sqrt{6},\ \beta = 45°,\ \gamma = 120°.$$



Ricaviamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (45° + 120°) = 15°.$$

Applichiamo il teorema dei seni per calcolare c e a:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \rightarrow \quad c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$c = \frac{4\sqrt{6}\ \operatorname{sen} 120°}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12;$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$a = \frac{4\sqrt{6}\ \operatorname{sen} 15°}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{\cancel{4}\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{6}}}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{2}}}} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$

Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

Nel triangolo in figura a lato conosciamo b, c e α; determiniamo β, γ e a.

Determiniamo a mediante il teorema del coseno:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}\,.$$

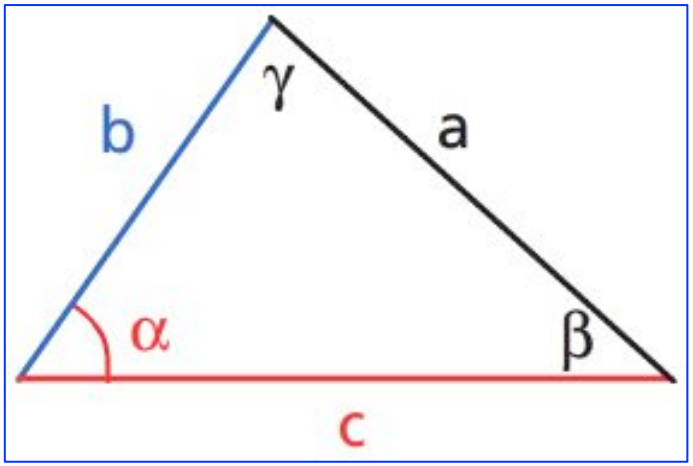
Applichiamo nuovamente il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \rightarrow \quad 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Troviamo β con la funzione arcocoseno.
Infine determiniamo γ:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$



ESEMPIO

Del triangolo in figura a lato sono noti $b = 46$, $c = 62$ e $\alpha = 20°$.

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare a:

$$a = \sqrt{46^2 + 62^2 - 2 \cdot 46 \cdot 62 \cdot \cos 20°}$$

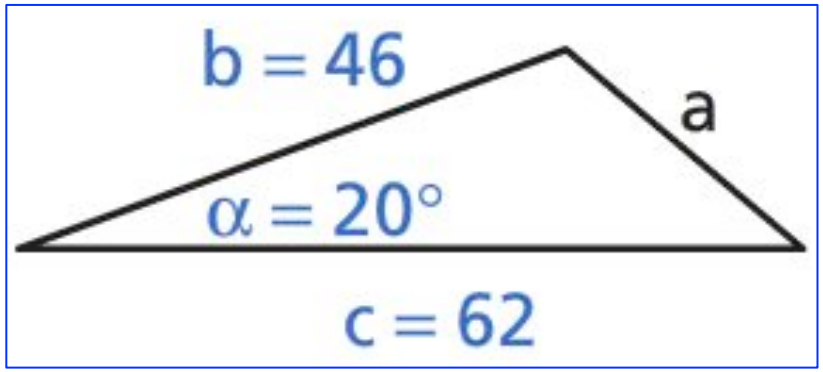
$$a \simeq \sqrt{2116 + 3844 - 5704 \cdot 0{,}93969} \simeq \sqrt{600{,}0082} \rightarrow a \simeq 24{,}50.$$

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \rightarrow 46^2 = 24{,}5^2 + 62^2 - 2 \cdot 24{,}5 \cdot 62 \cdot \cos \beta,$$

$$\cos \beta \simeq 0{,}77 \rightarrow \beta \simeq 40°.$$

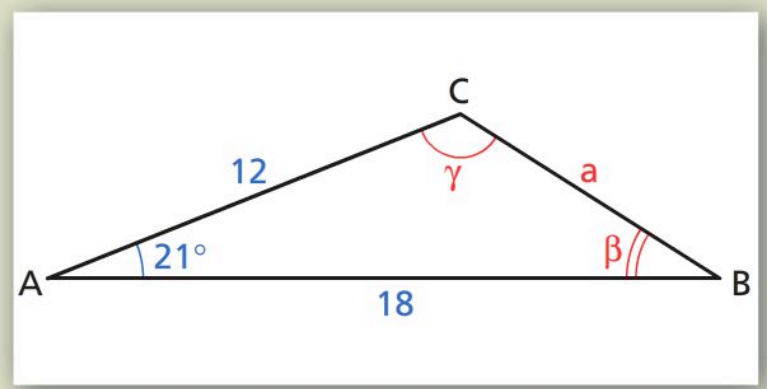
$$\gamma \simeq 180° - (20° + 40°) = 120°.$$



ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo il triangolo ABC, sapendo che:

$$b = 12,\ c = 18,\ \alpha = 21°.$$



Applicando il teorema del coseno, ricaviamo a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$a^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cos 21° \simeq 64{,}69;$$

$$a \simeq 8{,}04.$$

Ricaviamo β, applicando ancora il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos\beta \simeq \frac{8{,}04^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 8{,}04 \cdot 18} \simeq 0{,}85 \rightarrow \beta \simeq 32°.$$

Ricaviamo γ per differenza:

$$\gamma \simeq 180° - (21° + 32°) = 127°.$$

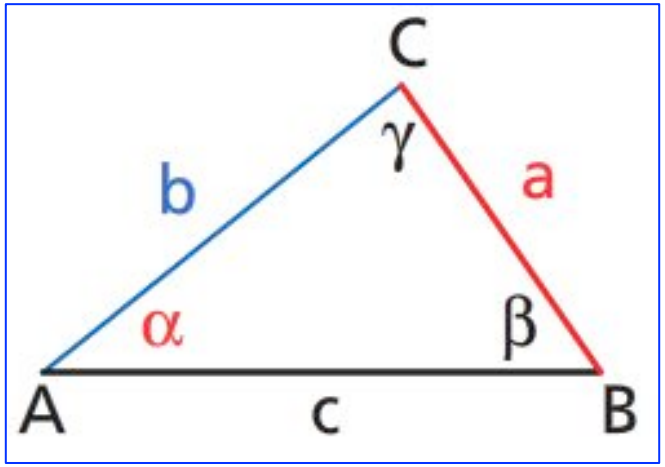
Sono noti due lati e un angolo opposto a uno di essi

Consideriamo il triangolo ABC e supponiamo noti a, b e α. Vogliamo conoscere β, γ e c.

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo dato per calcolare β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha.$$

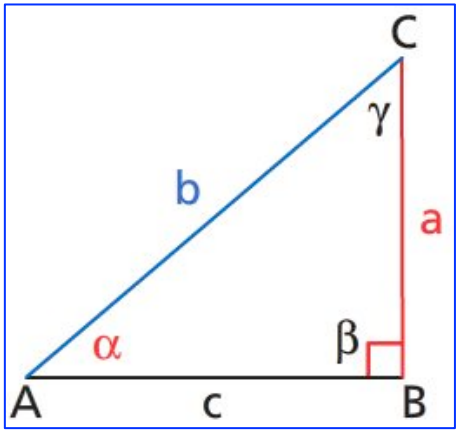
Esaminiamo i casi che si possono presentare a seconda del valore di sen β, ricordando che deve risultare $0 < \operatorname{sen}\beta \leq 1$, altrimenti β non esiste.



1. sen $\beta = 1 \rightarrow \beta = 90°$.

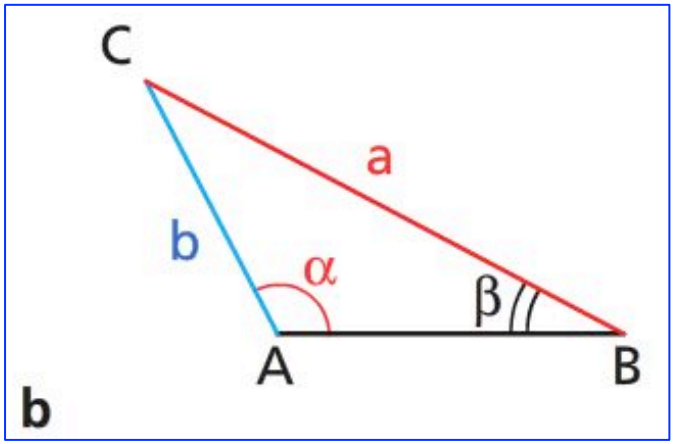
Distinguiamo due casi:

- se $\alpha \geq 90°$, il problema non ha soluzioni;
- se $\alpha < 90°$, il problema ammette una sola soluzione



2. $0 <$ sen $\beta < 1$: in questo caso si hanno due soluzioni, β_1 e β_2, tra loro supplementari, per esempio β_1 acuto e β_2 ottuso.
Per sapere se questi valori sono accettabili, dobbiamo considerare α, a e b.

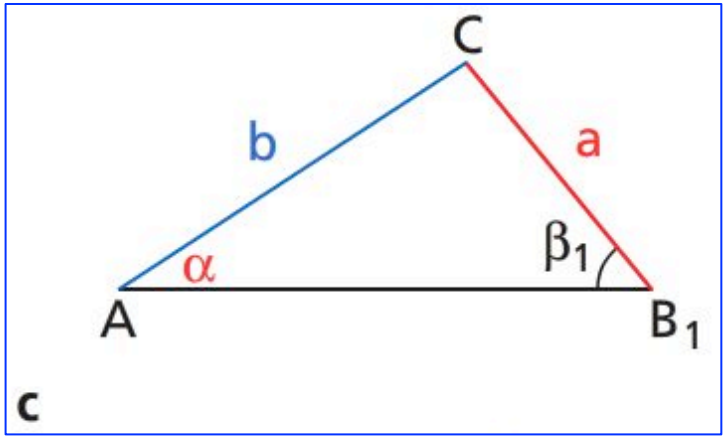
- Se $\alpha \geq 90°$, la soluzione β_2 non è accettabile perché un triangolo non può avere due angoli ottusi. Accettiamo solo β_1 acuto; il problema ammette una sola soluzione (figura *b*).

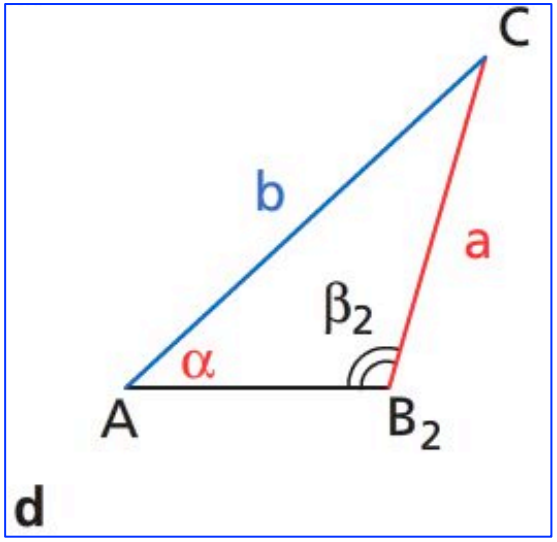


- Se $\alpha < 90°$ e $b > a$, allora, poiché a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, è $\beta_1 > \alpha$ oppure $\beta_2 > \alpha$; entrambe le situazioni sono accettabili: il problema ammette due soluzioni (figure *c* e *d*).
- Se $\alpha < 90°$ e $b < a$, allora $\beta < \alpha$, per cui β_2, che è ottuso, non è accettabile e abbiamo per soluzione solo β_1.

Per finire, dopo aver calcolato β, determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ e poi calcoliamo la misura del terzo lato, applicando il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \quad \rightarrow \quad c = a\frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}.$$





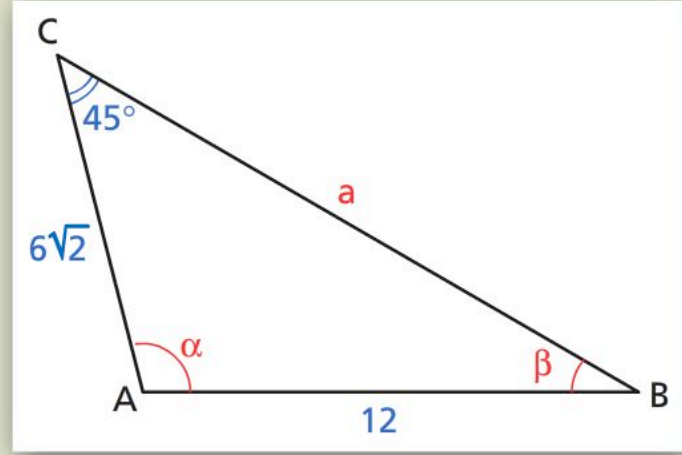
ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo un triangolo *ABC*, sapendo che:

a) $b = 6\sqrt{2}, c = 12, \gamma = 45°$;

b) $b = 4\sqrt{2}, c = 4\sqrt{6}, \beta = 30°$.

a) Ricaviamo β con il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta},$$

$$\frac{\cancel{12}^{\,2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{{}^{1}\cancel{6}\sqrt{2}}{\text{sen}\,\beta} \rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 = 30° \\ \beta_2 = 150° \end{cases}$$

È accettabile solo il valore $\beta_1 = 30°$, in quanto per $\beta_2 = 150°$ si avrebbe $\beta + \gamma = 150° + 45° = 195° > 180°$.

Inoltre non sarebbe vero che ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore: $6\sqrt{2}$, che è minore di 12, sarebbe opposto a 150°, che è maggiore di 45°.

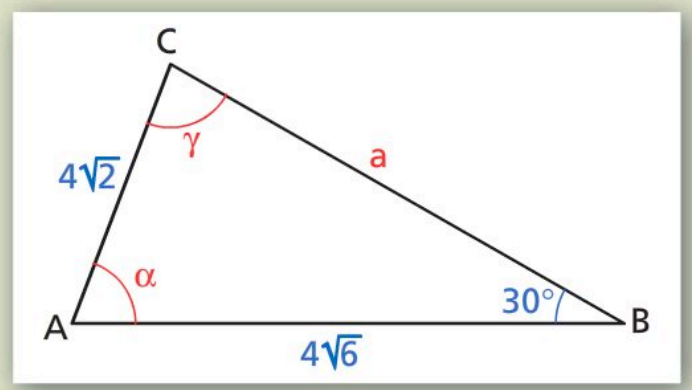
Determiniamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (30° + 45°) = 105°.$$

Troviamo a con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,105°} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow a \simeq 16{,}4.$$

b) Applichiamo il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta},$$

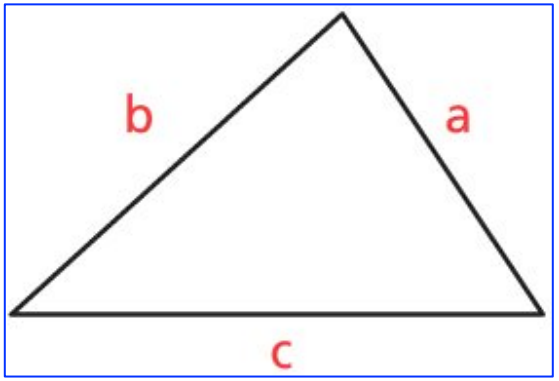
$$\frac{4\sqrt{6}}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{sen}\,\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \gamma_1 = 60° \\ \gamma_2 = 120° \end{cases}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

- Se $\gamma = 60° \rightarrow \alpha = 90°$,

$$\frac{a}{\text{sen}\,90°} = \frac{4\sqrt{2}}{\text{sen}\,30°} \rightarrow a = 8\sqrt{2}.$$

- Se $\gamma = 120° \rightarrow \alpha = 30°$, il triangolo è isoscele, quindi $a = 4\sqrt{2}$.



Sono noti i tre lati

Conoscendo a, b e c (figura a lato), determiniamo α, β e γ.

Ricaviamo α applicando il teorema del coseno:

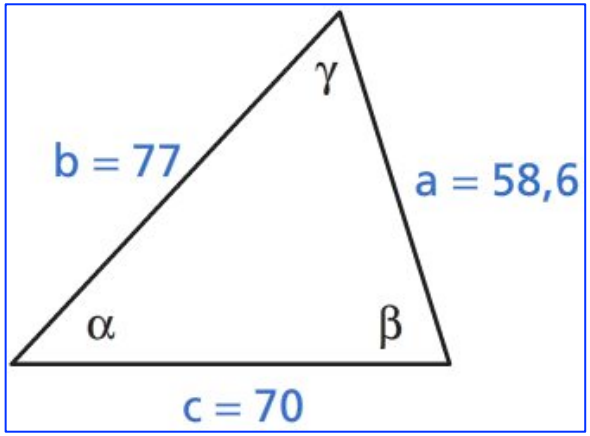
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \;\rightarrow\; 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \;\rightarrow\; \alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ricaviamo β allo stesso modo:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \;\rightarrow\; \beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Ricaviamo γ per differenza: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.



ESEMPIO

Consideriamo il triangolo con $a = 58{,}6$, $b = 77$ e $c = 70$.

Ricaviamo α utilizzando il teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{(77)^2 + (70)^2 - (58{,}6)^2}{2 \cdot 70 \cdot 77} = \frac{5929 + 4900 - 3433{,}96}{10\,780}$$

$$\cos\alpha = \frac{7395{,}04}{10\,780} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha \simeq 0{,}686 \quad \rightarrow \quad \alpha \simeq \arccos 0{,}686 \simeq 47°.$$

Allo stesso modo:

$$\cos\beta = \frac{70^2 + 58{,}6^2 - 77^2}{2 \cdot 70 \cdot 58{,}6} \simeq 0{,}29 \quad \rightarrow \quad \beta \simeq \arccos 0{,}29 \simeq 73°.$$

Ricaviamo, infine, γ per differenza: $\gamma \simeq 180° - (47° + 73°) = 60°$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo un triangolo ABC, sapendo che:

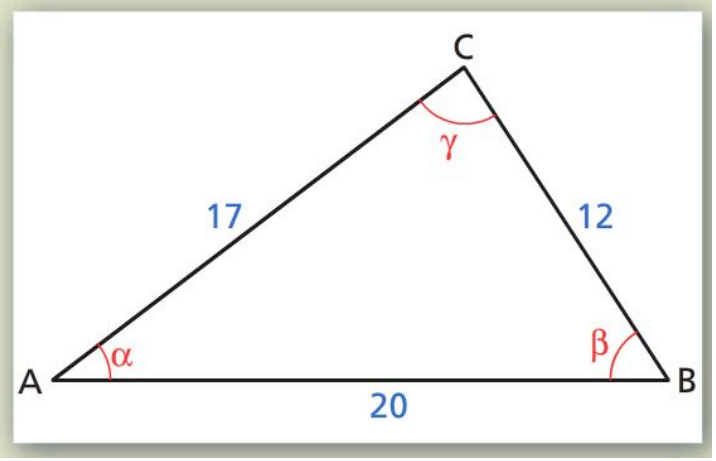
$$a = 12, b = 17, c = 20.$$

Applichiamo più volte il teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17^2 + 20^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 20} \simeq 0,80 \rightarrow \alpha \simeq 36,72°;$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12^2 + 20^2 - 17^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \simeq 0,53 \rightarrow \beta \simeq 57,91°;$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12^2 + 17^2 - 20^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} \simeq 0,08 \rightarrow \gamma \simeq 85,36°.$$



PROBLEMI

E' dato il triangolo rettangolo ABC di cui si conosce il cateto AB=2a. Sia T il punto dell'ipotenusa BC tale che BT≅AB. Determinare l'angolo ACB in modo che sia verificata la relazione:

$$(AC)^2+2(CT)^2=5(AB)^2$$

Indichiamo con x l'angolo $A\hat{C}B$ (fig. 6), con $0° < x < 90°$; dai teoremi sul triangolo rettangolo si deduce che è

$$\overline{AC} = 2a \cot g\, x; \quad \overline{BC} = \frac{2a}{sen\, x};$$

$$\overline{CT} = \frac{2a}{sen\, x} - 2a = 2a\frac{1 - sen\, x}{sen\, x}.$$

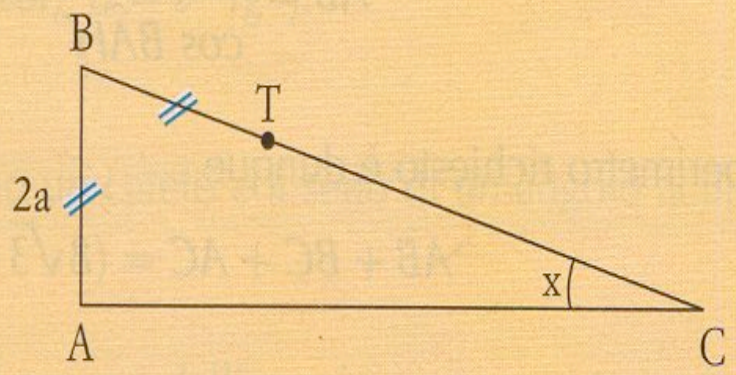


Figura 6

Sostituendo nella relazione data dal problema, si ottiene l'equazione

$$4\, a^2\, cotg^2 x + 2 \cdot 4a^2 \frac{(1 - sen\, x)^2}{sen^2 x} = 5 \cdot 4a^2 \longrightarrow \frac{cos^2 x}{sen^2 x} + \frac{2(1 + sen^2 x - 2\, sen\, x)}{sen^2 x} = 5.$$

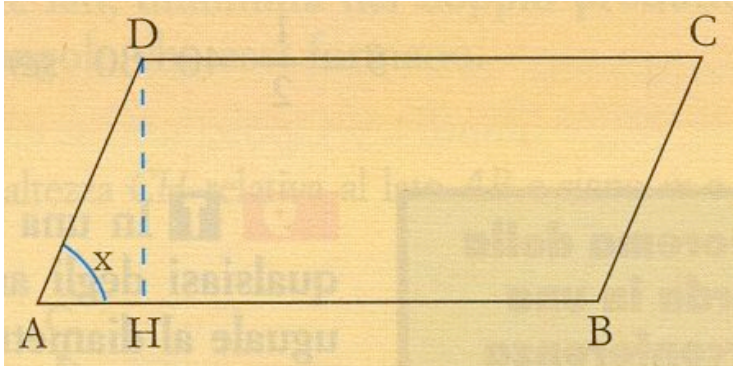
Risolvendo si ha

$$\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}^2 x - 4\,\mathrm{sen}\,x + 2 = 5\,\mathrm{sen}^2 x \longrightarrow 4\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x - 3 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2} \vee \mathrm{sen}\,x = -\frac{3}{2}.$$

Solo la soluzione $\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$ è accettabile e, dovendo l'angolo $A\hat{C}B$ essere acuto, dalla soluzione $\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$ si ricava $x = 30°$.

Determinare l'angolo acuto di un parallelogramma ABCD di cui si conosce la base AB=a, l'altezza DH=a/2 e il perimetro p=2√3(1+√3)a/2.



Consideriamo il triangolo AHD di cui si conosce il cateto DH.

Si indichi l'angolo BAD=x (0°<x<90°) e si determini AD, ipotenusa del triangolo rettangolo AHD:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{DH}}{sen\ x} = \frac{a}{2\ sen\ x}.$$

Dai dati del problema si ha

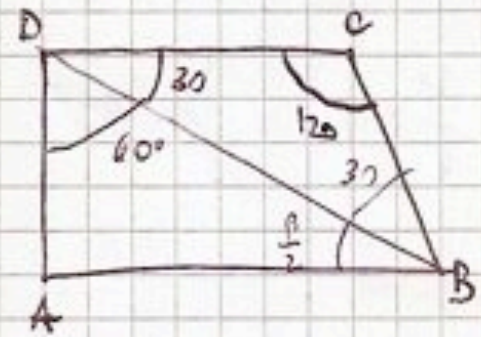
$$2(\overline{AB} + \overline{AD}) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})a \longrightarrow \overline{AB} + \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})a \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a + \frac{a}{2\ sen\ x} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})a.$$

Risolviamo l'equazione $1 + \frac{1}{2\ sen\ x} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3}) \longrightarrow \frac{1}{2\ sen\ x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow sen\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Si ricava così che, dovendo essere $0° < x < 90°$, è $x = 60°$, cioè $B\widehat{A}D = 60°$.

La base maggiore del trapezio rettangolo ABCD è AB = 48 cm ; la diagonale maggiore BD è lunga $32\sqrt{3}$ cm ed è bisettrice dell'angolo ABC. Determina gli angoli, il perimetro e l'area del trapezio.



$AB = 48$

$BD = 32\sqrt{3}$ bis $A\hat{B}C$

$\hat{B}, \hat{C} = ?$

$2p = ?$

$A = ?$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{(32\sqrt{3})^2 - 48^2} = 16\sqrt{3}$$

$$AB = BD \cos\beta \qquad \cos\beta = \frac{AB}{BD} = \frac{48}{32\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\beta}{2} = 30° \,, \quad \beta = 60° \qquad \hat{C} = 360 - 90 - 90 - 60 = 120°$$

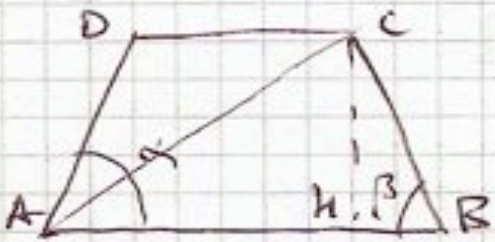
$$\frac{BP}{m\,60^\circ} = \frac{DC}{m\,30^\circ} \qquad \frac{32\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$$

$$32\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\,DC \qquad DC = 32$$

$$2 \cdot 32 + 16\sqrt{3} + 48 = 112 + 16\sqrt{3} \qquad 2p = 16(7+\sqrt{3})$$

$$A = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(48+32)\,16\sqrt{3}}{2} = 640\sqrt{3}$$

Determina gli angoli di un trapezio isoscele sapendo che la base maggiore è AB = 14 , la base minore è CD = 8 e il rapporto fra il quadrato della diagonale e quadrato del lato obliquo è 37/9 .



$AB = 14$

$CD = 8$

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{37}{9}$$

$$HB = \frac{AB - CD}{2} = \frac{14-8}{2} = 3$$

$AH = AB - HB \qquad AH = 14 - 3 = 11$

$BC^2 = HB^2 + CH^2 \qquad CH = HB\, tg\,\beta \qquad CH = 3\, tg\,\beta$

$$BC^2 = 3^2 + 3^2 tg^2\beta = 9(1 + tg\beta)$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 11^2 + 9\, tg^2\beta = 121 + 9\, tg^2\beta$$

$$\frac{121 + 9\,tg^2\beta}{\cancel{9}\left(1 + tg^2\beta\right)} = \frac{37}{\cancel{9}}$$

$$121 + 9\,tg^2\beta = 37\left(1 + tg^2\beta\right)$$

$$28\,tg^2\beta = 84 \qquad tg^2\beta = 3, \quad tg\,\beta = \sqrt{3} \qquad \beta = \frac{2}{3}\pi$$

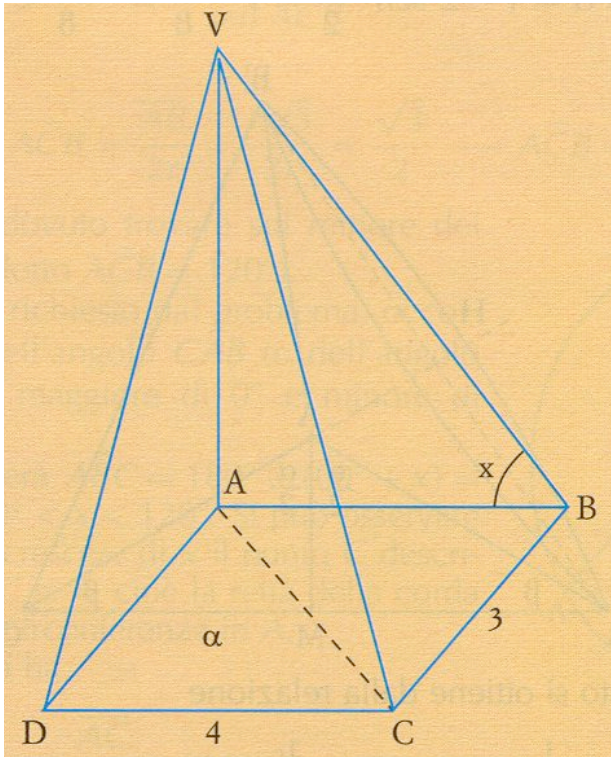
$$\alpha = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$

Su un piano α è dato il rettangolo ABCD di lati AB=4cm e AD=3cm. Dal punto A si innalzi la perpendicolare VA al piano α e si consideri la piramide VABCD. Determinare l'angolo x, che lo spigolo VB forma con il piano α, in modo che sia $242cm^2$ la somma dei quadrati dei quattro spigoli VA, VB, VC, VD. In questo caso determinare la superficie totale e il volume della piramide.

Osserviamo la figura e ricordiamo che per angolo di una retta con un piano s'intende l'angolo che la retta forma con la sua proiezione sul piano.

Poiché la proiezione di VB sul piano α è AB, poniamo:

$$x = VBA \quad \text{con } 0° < x < 90°$$

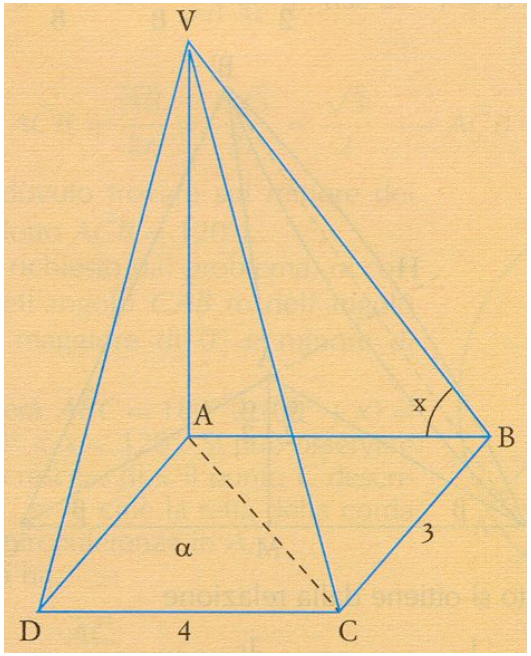


Dal triangolo VAB si ha:

$$VA = 4tgx \qquad VB = \frac{4}{\cos x}$$

risulta poi:

$$AC = 5 \qquad VC^2 = 16tg^2x + 25 \qquad VD^2 = 16tg^2x + 9$$



e, quindi, la relazione del problema si traduce nell'equazione

$$16\ tg^2x + \frac{16}{cos^2x} + 16\ tg^2x + 25 + 16\ tg^2x + 9 = 242;$$

quest'ultima equazione, dopo le opportune riduzioni, diviene

$$tg^2x = 3$$

da cui, dovendo essere $0° < x < 90°$, si ottiene la sola soluzione $tg\ x = \sqrt{3} \longrightarrow x = 60°$.

Sarà quindi $VA = 4\sqrt{3}$ cm e il volume della piramide risulterà

$$\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3}\ \text{cm}^3 = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

Per calcolare poi la superficie totale della piamide occorrerà determinare la superficie delle singole facce laterali: per il *teorema delle tre perpendicolari* risulta $VB \perp BC$ e $VD \perp DC$ e quindi sarà

$$S_{VAB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{VA}; \quad S_{VAD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{VA}; \quad S_{VBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{VB}; \quad S_{VCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VD}.$$

La superficie totale della piramide è quindi, essendo $VB = \dfrac{4}{\cos 60°}$ cm $= 8$ cm e $VD = \sqrt{16\ tg^2\ 60° + 9}$ cm $= \sqrt{57}$ cm,

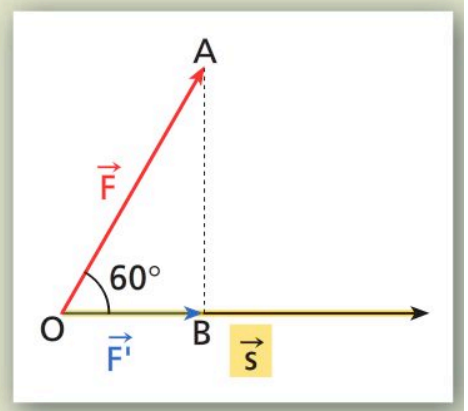
$$\left(12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{57}\right) \text{cm}^2 =$$

$$= (14\sqrt{3} + 2\sqrt{57} + 24)\ \text{cm}^2 = 2 \cdot (7\sqrt{3} + \sqrt{57} + 12)\ \text{cm}^2.$$

Le applicazioni alla fisica

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il lavoro che compie una forza costante di intensità pari a 25 N, inclinata di 60° rispetto a un piano orizzontale, agente su un corpo che viene spostato dalla forza su tale piano di 15 m.



Dati la forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$, il lavoro L compiuto dalla forza è dato da

$$L = F' \cdot s,$$

dove F' è l'intensità della proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento. F' è la misura di un cateto del triangolo rettangolo OAB, quindi

$$F' = \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\alpha, \text{ da cui:}$$

$$L = F \cdot s \cdot \cos\alpha.$$

Applichiamo la formula precedente:

$$L = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 25 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 187{,}5.$$

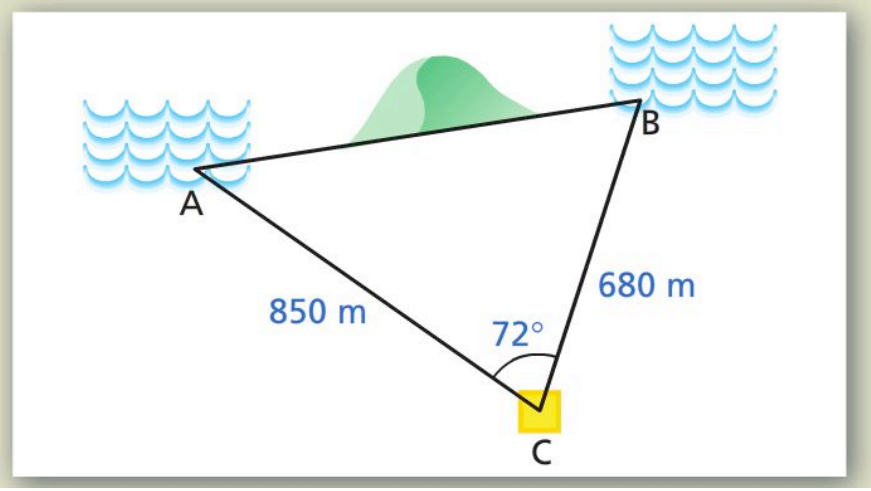
Il lavoro è di 187,5 J.

Altre applicazioni alla realtà

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la distanza fra due laghi separati da una collina. Scegliamo come punto di riferimento un monastero che dista dai due laghi rispettivamente 850 m e 680 m. Inoltre, le direzioni in cui dal monastero si vedono i due laghi formano un angolo di 72°.

Indichiamo i due laghi con A e B e il monastero con C.



Applichiamo il teorema del coseno al triangolo ABC e otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} =$$
$$= \sqrt{850^2 + 680^2 - 2 \cdot 850 \cdot 680 \cdot \cos 72^\circ} \simeq$$
$$\simeq \sqrt{827\,676} \simeq 909{,}77.$$

La distanza fra i laghi è di circa 909,77 m.

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione cartesiana della curva definita dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \\ y = 2 \operatorname{cotg} t \end{cases}$$

Per eliminare il parametro t, cerchiamo di utilizzare la relazione $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
Nella prima equazione ricaviamo sen t:

$$x = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} t = \frac{1}{x}.$$

Per ricavare cos t, dividiamo membro a membro le due equazioni:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{1}{2\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2\cos t} \quad \rightarrow \quad \cos t = \frac{y}{2x}.$$

Sostituiamo le espressioni di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ in $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 4 + y^2 = 4x^2 \quad \rightarrow \quad 4x^2 - y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

L'equazione ottenuta è quella di un'iperbole.