

Esercizi di ripasso

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

$$\begin{array}{l}
 P(E) = \sum_{x \in E} f(x) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x \\
 \text{Mathematics: } \int_a^b f(x) \\
 x \xrightarrow{f} y \quad \text{A study of relationships} \quad \frac{G}{K} \\
 \begin{array}{c} \searrow \text{gof} \\ \downarrow g \\ Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \cap \text{B} \quad \text{B} \end{array} \quad \begin{array}{c} M = U \cup V \\ T: V \rightarrow W \\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \end{array} \\
 \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \quad \{1, 2, 3, 5, 8, \dots\} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad A = P^{-1} B P \\
 x \in A
 \end{array}$$

ALGEBRA

Disequazioni

Disequazioni di 1° grado numeriche

$$(x+1)^3 - (x+1)^2 > (x+2)^3 - 4(x+2)^2$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^2 + 2x + 1) > x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 4(x^2 + 4x + 4)$$

$$\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - 2x - \cancel{1} > \cancel{x^3} + 6x^2 + 12x + 8 - 4x^2 - 16x - 16$$

$$\cancel{2x^2} + x > \cancel{2x^2} - 4x - 8$$

$$x + 4x > -8$$

$$5x > -8$$

$$x > -\frac{8}{5}$$

$$(2x+1)^3 - 4x^2(2x+1) < 2(2x-1)^2$$

$$\cancel{8x^3} + 12x^2 + 6x + 1 - \cancel{8x^3} - 4x^2 < 2(4x^2 - 4x + 1)$$

$$\cancel{8x^2} + 6x + 1 < \cancel{8x^2} - 8x + 2$$

$$6x + 8x < 2 - 1$$

$$14x < 1$$

$$x < \frac{1}{14}$$

$$\frac{3-2x}{5} + \frac{2}{3}x(2-3x) < \frac{2x(1-15x)}{15}$$

$$\frac{9-6x+20x-30x^2}{15} < \frac{2x-30x^2}{15}$$

$$9+14x-\cancel{30x^2} < 2x-\cancel{30x^2}$$

$$14x-2x < -9$$

$$12x < -9$$

$$x < -\frac{9}{12}$$

$$x < -\frac{3}{4}$$

$$\frac{(1-x)(1+x)^2}{3} - \frac{1-2x^3}{6} > 3x - \frac{1}{3}(x-2)^2$$

$$\frac{2(1-x)(1+2x+x^2) - 1 + 2x^3}{\cancel{6}} > \frac{18x - 2(x^2 - 4x + 4)}{\cancel{6}}$$

$$2(1+2x+x^2-x-2x^2-x^3) - 1 + 2x^3 > 18x - 2x^2 + 8x - 8$$

$$2(-x^3 - x^2 + x + 1) - 1 + 2x^3 > -2x^2 + 26x - 8$$

$$\cancel{-2x^3} - \cancel{2x^2} + 2x + 2 - 1 + \cancel{2x^3} > \cancel{-2x^2} + 26x - 8$$

$$2x - 26x > -8 - 2 + 1$$

$$-24x > -9 \quad \rightarrow \quad 24x < 9 \quad \rightarrow \quad x < \frac{9}{24} \quad \rightarrow \quad x < \frac{3}{8}$$

Disequazioni di 1° grado letterali

$$x(a+2) - (a+2)(2-a) > 0$$

$$(a+2)x > (a+2)(2-a)$$

$$\text{se } a+2 > 0 \rightarrow a > -2 : \quad x > \frac{\cancel{(a+2)}(2-a)}{\cancel{a+2}} \rightarrow x > 2-a$$

$$\text{se } a+2 = 0 \rightarrow a = -2 : \quad 0x > 0 \rightarrow \text{nessun valore di } x$$

$$\text{se } a+2 < 0 \rightarrow a < -2 : \quad x < \frac{\cancel{(a+2)}(2-a)}{\cancel{a+2}} \rightarrow x < 2-a$$

$$\frac{ax}{a-1} - \frac{x+1}{2} < \frac{2x+1}{4} \quad a \neq 1$$

$$\frac{4ax - 2(a-1)(x+1)}{4(a-1)} < \frac{(a-1)(2x+1)}{4(a-1)}$$

$$\frac{\cancel{4ax} - \cancel{2ax} - 2a + 2x + 2}{4(a-1)} < \frac{\cancel{2ax} + a - 2x - 1}{4(a-1)}$$

$$\frac{\cancel{4x}}{\cancel{4(a-1)}} < \frac{3a-3}{4(a-1)}$$

$$\text{se } a-1 > 0 \rightarrow a > 1 : \quad x < \frac{3(a-1)}{4(a-1)} \cancel{(a-1)} \rightarrow x < \frac{3(a-1)}{4}$$

$$\text{se } a-1 < 0 \rightarrow a < 1 : \quad x > \frac{3(a-1)}{4(a-1)} \cancel{(a-1)} \rightarrow x > \frac{3(a-1)}{4}$$

$$\frac{2+Kx}{K+1} \leq x + \frac{1}{3}$$

$$K+1 \neq 0 \rightarrow K \neq -1$$

$$\frac{6+3Kx}{3(K+1)} \leq \frac{(K+1)(3x+1)}{3(K+1)}$$

$$\frac{6+\cancel{3Kx}}{3(K+1)} \leq \frac{\cancel{3Kx}+K+3x+1}{3(K+1)}$$

$$\frac{3x}{3(K+1)} \geq \frac{5-K}{3(K+1)}$$

$$\text{se } K+1 > 0 \rightarrow K > -1 : \quad x \geq \frac{5-K}{3}$$

$$\text{se } K+1 < 0 \rightarrow K < -1 : \quad x \leq \frac{5-K}{3}$$

Disequazioni di 2° grado numeriche

$$(2x-1)(x-3) - (x-1)[2(2x-1)+x] < 0$$

$$2x^2 - 6x - x + 3 - (x-1)(4x-2+x) < 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 - (x-1)(5x-2) < 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 - (5x^2 - 2x - 5x + 2) < 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 - (5x^2 - 7x + 2) < 0$$

$$2x^2 - \cancel{7x} + 3 - 5x^2 + \cancel{7x} - 2 < 0$$

$$-3x^2 + 1 < 0$$

$$3x^2 - 1 > 0$$

$$x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 - 1 = 0 \quad x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(x+5)^2 - (x-1)(2x+1) > 13(x+2)$$

$$x^2 + 10x + 25 - (2x^2 + x - 2x - 1) > 13x + 26$$

$$x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - x + 2x + 1 > 13x + 26$$

$$-x^2 + 11x + 26 > 13x + 26$$

$$-x^2 + 11x - 13x > 0$$

$$-x^2 - 2x > 0$$

$$x^2 + 2x < 0$$

$$-2 < x < 0$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$\frac{1-3x}{5} - \frac{(2-x)(2+x)}{3} \leq x - \frac{6}{5} + \frac{1+x^2}{15}$$

$$\frac{3-9x-5(4-x^2)}{15} \leq \frac{15x-18+1+x^2}{15}$$

$$3-9x-20+5x^2 \leq x^2+15x-17$$

$$5x^2-9x-17-x^2-15x+17 \leq 0$$

$$4x^2-24x \leq 0$$

$$4x(x-6) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 6$$

$$4x^2-24x=0$$

$$4x(x-6)=0 \quad x_1=0$$

$$x_2=6$$

Disequazioni di 2° grado letterali

$$3x^2 - 2bx - b^2 > 0$$

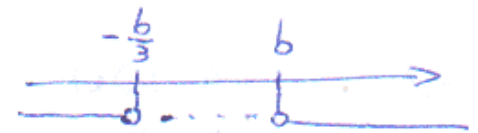
$$\frac{\Delta}{4} = b^2 + 3b^2 = 4b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm 2b}{3} = \begin{cases} -\frac{b}{3} \\ +b \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3} \\ x_2 &= b \end{aligned}$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow -\frac{b}{3} < b \rightarrow -b < 3b \rightarrow 4b > 0 \rightarrow b > 0$$

$$b > 0: \quad \begin{aligned} A &= 3 > 0 \\ \Delta &> 0 \end{aligned}$$

$$x < -\frac{b}{3} \quad \vee \quad x > b$$

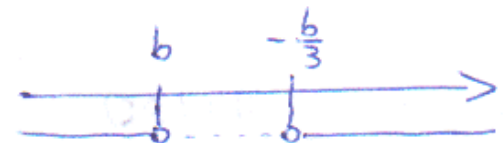


$$b = 0: \quad \begin{aligned} A &= 3 > 0 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

$$x \neq 0$$

$$b < 0: \quad \begin{aligned} A &= 3 > 0 \\ \Delta &> 0 \end{aligned}$$

$$x < b \quad \vee \quad x > -\frac{b}{3}$$

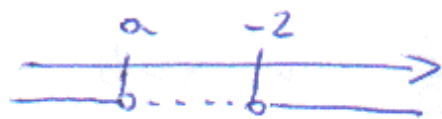


$$x^2 + (2-a)x - 2a > 0$$

$$\Delta = 4 - 4a + a^2 + 8a = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$$

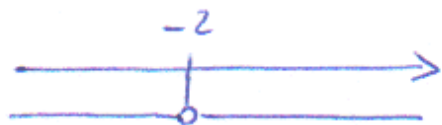
$$x_{1/2} = \frac{a-2 \pm (a+2)}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 \\ +\frac{2a}{2} = a \end{cases} \quad a \neq 0$$

$$a < -2: \quad \begin{aligned} A &= 1 > 0 \\ \Delta &> 0 \end{aligned}$$



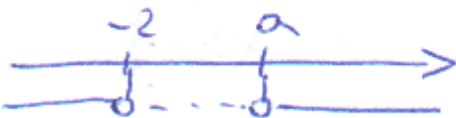
$$x < a \vee x > -2$$

$$a = -2: \quad \begin{aligned} A &= 1 > 0 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$



$$x \neq -2$$

$$a > -2: \quad \begin{aligned} A &= 1 > 0 \\ \Delta &> 0 \end{aligned}$$



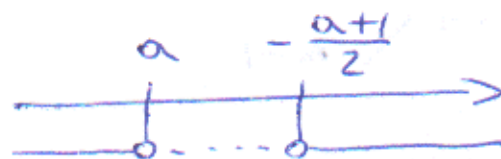
$$x < -2 \vee x > a$$

$$2x^2 - (a-1)x - a(a+1) \leq 0$$

$$\Delta = a^2 - 2a + 1 + 8a^2 + 8a = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{a-1 \pm (3a+1)}{4} = \begin{cases} - & \frac{a-1-3a-1}{4} = \frac{-2a-2}{4} = -\frac{a+1}{2} \\ + & \frac{a-1+3a+1}{4} = a \end{cases}$$

$$a < -\frac{1}{3} : \quad A=2 > 0 \\ \Delta > 0$$



$$a \leq x \leq -\frac{a+1}{2}$$

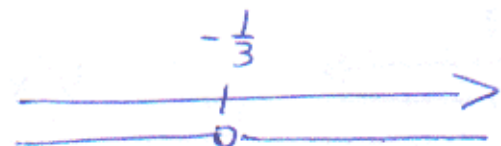
$$a > -\frac{a+1}{2}$$

$$2a > -a-1$$

$$3a > -1$$

$$a > -\frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3} : \quad A=2 > 0 \\ \Delta = 0$$



$$x = -\frac{1}{3}$$

$$a > -\frac{1}{3} : \quad A=2 > 0 \\ \Delta > 0$$



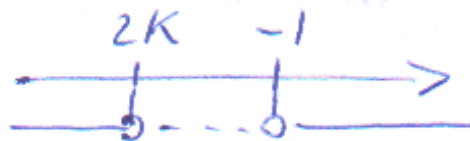
$$-\frac{a+1}{2} \leq x \leq a$$

$$x^2 - (2K-1)x - 2K \leq 0$$

$$\Delta = 4K^2 - 4K + 1 + 8K = 4K^2 + 4K + 1 = (2K+1)^2$$

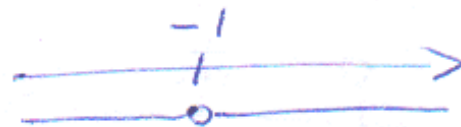
$$x_{1/2} = \frac{2K-1 \pm (2K+1)}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2K \end{cases}$$

$$K < -\frac{1}{2} : \quad A=1 > 0 \\ \Delta > 0$$



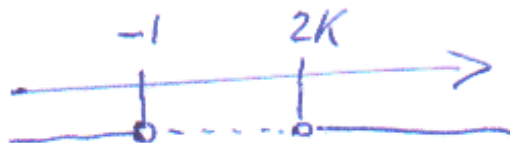
$$2K \leq x \leq -1$$

$$K = -\frac{1}{2} : \quad A=1 > 0 \\ \Delta = 0$$



$$x = -1$$

$$K > -\frac{1}{2} : \quad A=1 > 0 \\ \Delta > 0$$



$$-1 \leq x \leq 2K$$

Diseguazioni frazionarie

$$\frac{x}{x+3} - \frac{1}{4} < \frac{x-1}{2x}$$

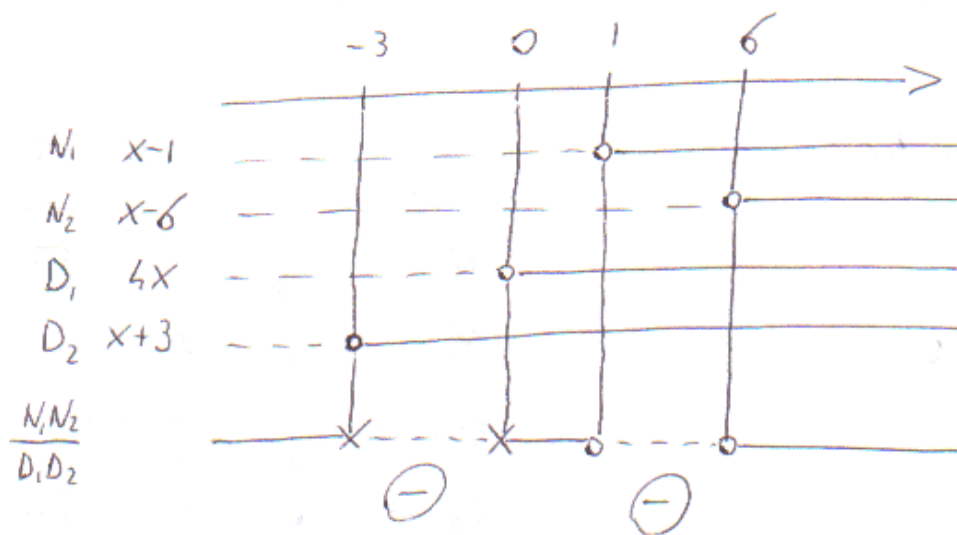
$$\frac{x}{x+3} - \frac{1}{4} - \frac{x-1}{2x} < 0$$

$$\frac{4x^2 - x^2 - 3x - (2x+6)(x-1)}{4x(x+3)} < 0$$

$$\frac{4x^2 - x^2 - 3x - 2x^2 + 2x - 6x + 6}{4x(x+3)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{4x(x+3)} < 0$$

$$\frac{(x-1)(x-6)}{4x(x+3)} < 0$$



$$S: -3 < x < 0 \vee 1 < x < 6$$

$$\frac{2x^2-4x-9}{x^3+8} - \frac{1}{x+2} < \frac{1+x}{x^2-2x+4}$$

$$\frac{2x^2-4x-9}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1+x}{x^2-2x+4} < 0$$

$$\frac{2x^2-4x-9-x^2+2x-4-(x+2)(1+x)}{(x+2)(x^2-2x+4)} < 0$$

$$\frac{\cancel{x^2}-2x-13-\cancel{x}-\cancel{x^2}-2-2x}{(x+2)(x^2-2x+4)} < 0$$

$$\frac{-5x-15}{(x+2)(x^2-2x+4)} < 0$$

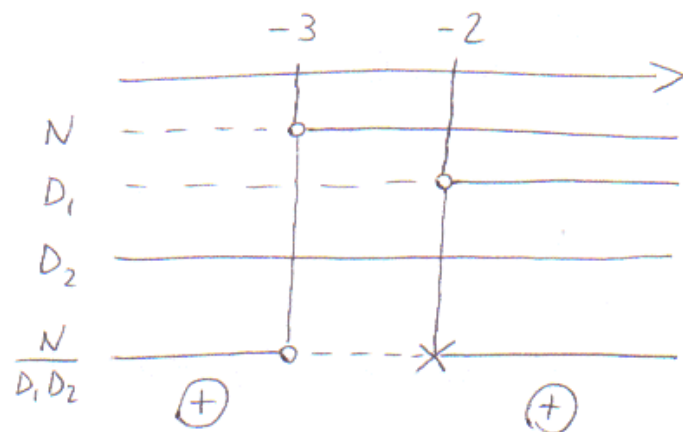
$$\frac{5x+15}{(x+2)(x^2-2x+4)} > 0$$

$$N > 0 \rightarrow 5x+15 > 0 \rightarrow x > -3$$

$$D_1 > 0 \rightarrow x+2 > 0 \rightarrow x > -2$$

$$D_2 > 0 \rightarrow x^2-2x+4 > 0 \quad \Delta = -12 < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$



$$S: x < -3 \vee x > -2$$

$$\frac{8x^2+3x}{x^2-1} + \frac{5}{x-1} < \frac{4x}{x+1}$$

$$\frac{8x^2+3x}{(x+1)(x-1)} + \frac{5}{x-1} - \frac{4x}{x+1} < 0$$

$$\frac{8x^2+3x+5x+5-4x^2+4x}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{4x^2+12x+5}{(x+1)(x-1)} < 0$$

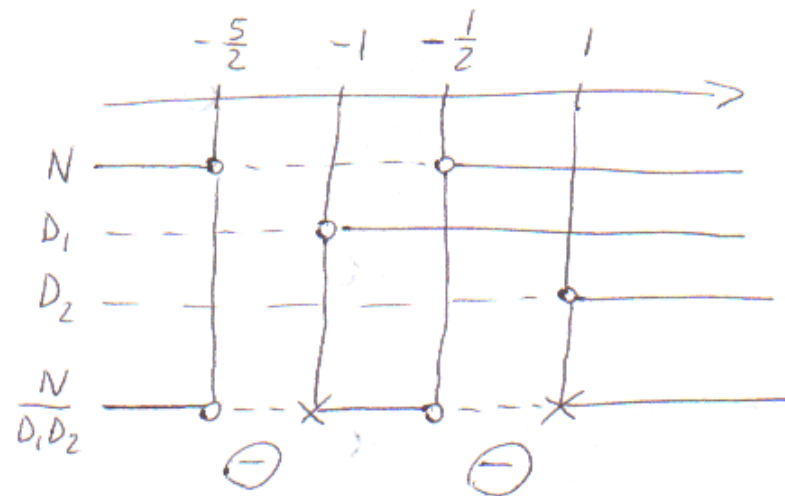
$$N > 0 \rightarrow 4x^2+12x+5 > 0 \rightarrow x < -\frac{5}{2} \vee x > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 20 = 16 = 4^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{4} = \begin{cases} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D_1 > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$D_2 > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$



$$S: -\frac{5}{2} < x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < 1$$

$$(x-1) \left(1 + \frac{2}{x}\right) + x < 3 - \frac{2}{x}$$

$$(x-1) \left(\frac{x+2}{x}\right) + x - 3 + \frac{2}{x} < 0$$

$$\frac{x^2 + 2x - x - \cancel{2} + x^2 - 3x + \cancel{2}}{x} < 0$$

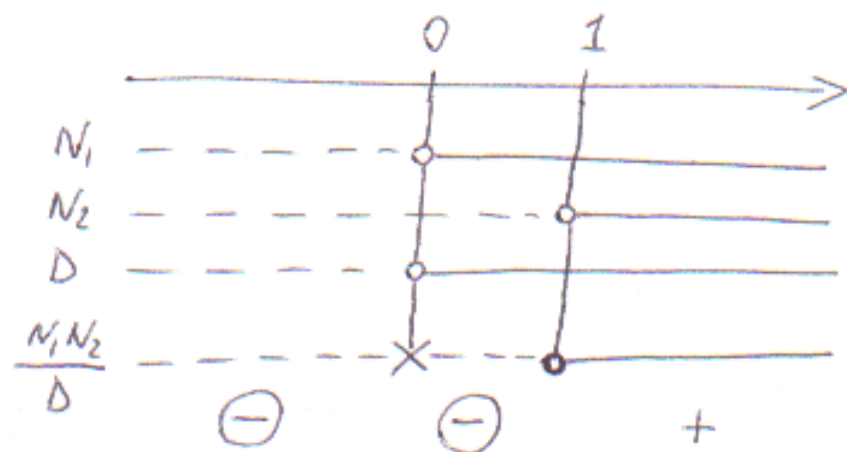
$$\frac{2x^2 - 2x}{x} < 0$$

$$\frac{2x(x-1)}{x} < 0$$

$$N_1 > 0 \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0$$

$$N_2 > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$D > 0 \rightarrow x > 0$$



$$S: \quad x < 0 \vee 0 < x < 1$$

$$\frac{2}{1-x^2} + \frac{6}{x^4-1} > 1 - \frac{3}{x^2+1}$$

$$-\frac{2}{x^2-1} + \frac{6}{(x^2+1)(x^2-1)} - 1 + \frac{3}{x^2+1} > 0$$

$$\frac{-2x^2-2+6-x^4+1+3x^2-3}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} > 0$$

$$\frac{-x^4+x^2+2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} > 0$$

$$\frac{x^4-x^2-2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} < 0$$

$$\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} < 0$$

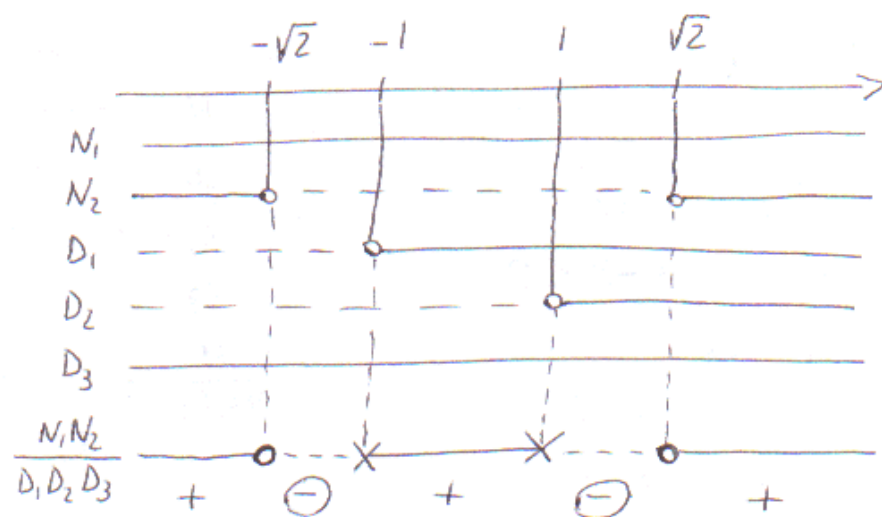
$$N_1 > 0 \rightarrow x^2+1 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$N_2 > 0 \rightarrow x^2-2 > 0 \rightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > +\sqrt{2}$$

$$D_1 > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$D_2 > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$D_3 > 0 \rightarrow x^2+1 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$



$$S: -\sqrt{2} < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < \sqrt{2}$$

$$\frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x^4 - 7x^2 - 18} \leq 0$$

$$\frac{x^2(x-5) - (x-5)}{(x^2-9)(x^2+2)} \leq 0$$

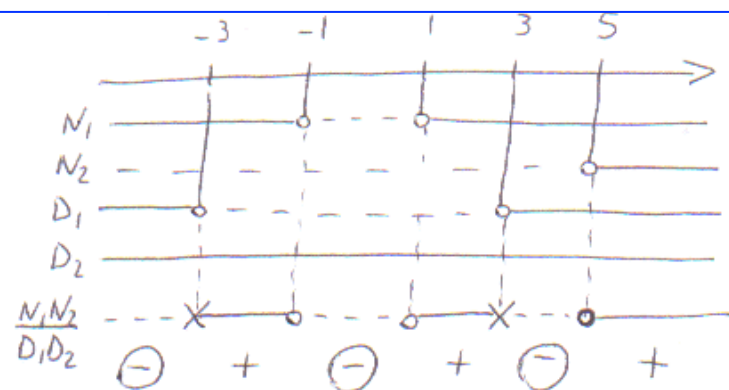
$$\frac{(x^2-1)(x-5)}{(x^2-9)(x^2+2)} \leq 0$$

$$N_1 > 0 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \\ x < -1 \vee x > 1$$

$$N_2 > 0 \rightarrow x - 5 > 0 \\ x > 5$$

$$D_1 > 0 \rightarrow x^2 - 9 > 0 \\ x < -3 \vee x > 3$$

$$D_2 > 0 \rightarrow x^2 + 2 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}$$



S:

$$x < -3 \vee -1 \leq x \leq 1 \vee 3 < x \leq 5$$

$$\begin{cases} (x+2)(x-1) > 4 - (3x-1)^2 \\ (x-1)^2 + (2x+3)^2 > 25 \end{cases}$$

$\approx$ 1. li seq.

$$(x+2)(x-1) > 4 - (3x-1)^2$$

$$x^2 - x + 2x - 2 > 4 - 9x^2 + 6x - 1$$

$$x^2 + x - 2 > -9x^2 + 6x + 3$$

$$x^2 + x - 2 + 9x^2 - 6x - 3 > 0$$

$$10x^2 - 5x - 5 > 0$$

$$5(2x^2 - x - 1) > 0$$

$$2x^2 - x - 1 > 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ +1 \end{cases}$$

$$x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \vee x > 1 \\ x < -3 \vee x > 1 \end{cases}$$

2° li seq.

$$(x-1)^2 + (2x+3)^2 > 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 - 25 > 0$$

$$5x^2 + 10x - 15 > 0$$

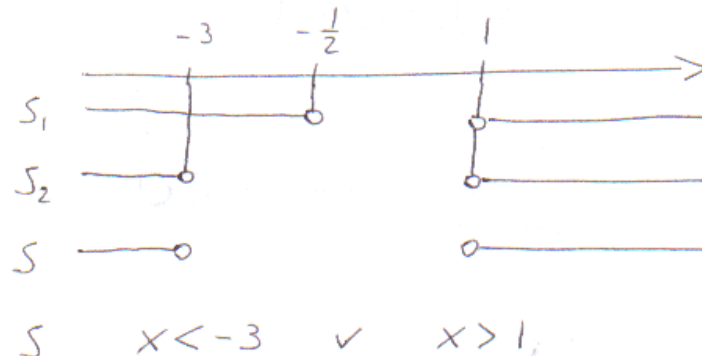
$$5(x^2 + 2x - 3) > 0$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ +1 \end{cases}$$

$$x < -3 \vee x > 1$$



Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} (2x-1)^2 + (3-x)^2 > 5(27-2x) \\ (x+4)(x-4) < 33 \end{cases}$$

1^a diseq.

$$(2x-1)^2 + (3-x)^2 > 5(27-2x)$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 9 - 6x + x^2 > 135 - 10x$$

$$5x^2 - 10x + 10 > -10x + 135$$

$$5x^2 - 125 > 0$$

$$x^2 - 25 > 0$$

$$x < -5 \vee x > 5$$

$$\begin{cases} x < -5 \vee x > 5 \\ -7 < x < 7 \end{cases}$$

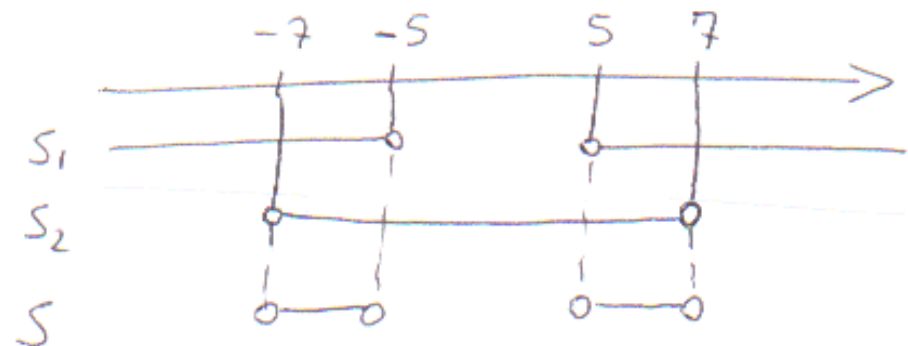
2^a diseq.

$$(x+4)(x-4) < 33$$

$$x^2 - 16 - 33 < 0$$

$$x^2 - 49 < 0$$

$$-7 < x < 7$$



$$-7 < x < -5 \vee 5 < x < 7$$

$$\begin{cases} \frac{3x+7}{x+1} - \frac{3x-7}{x-1} < 0 \\ 3(x-1)^2 \leq 25-x \end{cases}$$

1^{re} ineq.

$$\frac{3x+7}{x+1} - \frac{3x-7}{x-1} < 0$$

$$\frac{\cancel{3x^2} - 3x + 7x - 7 - \cancel{3x^2} + 7x - 3x + 7}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{8x}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$N > 0 \rightarrow 8x > 0 \rightarrow x > 0$$

$$D_1 > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$D_2 > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

2^{de} ineq.

$$3(x-1)^2 \leq 25-x$$

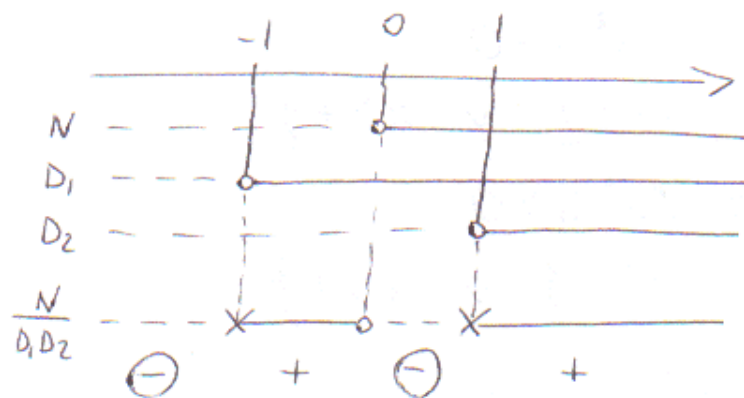
$$3x^2 - 6x + 3 - 25 + x \leq 0$$

$$3x^2 - 5x - 22 \leq 0$$

$$\Delta = 25 + 264 = 289 = 17^2$$

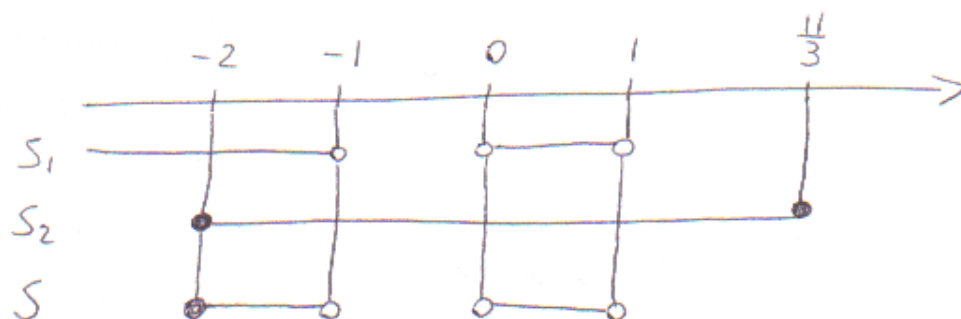
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 17}{6} = \begin{cases} -2 \\ + \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq \frac{11}{3}$$



$$x < -1 \vee 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} x < -1 \vee 0 < x < 1 \\ -2 \leq x \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$



$$S: -2 \leq x < -1 \vee 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0 \\ 36x^4 - 25x^2 + 4 > 0 \end{cases}$$

1^a oliseq.

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$$

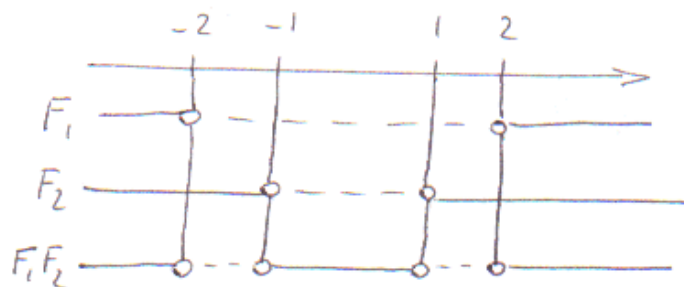
$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) \geq 0$$

$$F_1 > 0 \rightarrow x^2 - 4 > 0$$

$$x < -2 \vee x > 2$$

$$F_2 > 0 \rightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$x < -1 \vee x > 1$$



$$x \leq -2 \vee -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 2$$

$$z = x^2$$

$$36z^2 - 25z + 4 > 0$$

$$\Delta = 625 - 576 = 49 = 7^2$$

$$z_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{72} = \begin{cases} \frac{18}{72} = \frac{1}{4} \\ \frac{32}{72} = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$36 \left(z - \frac{1}{4} \right) \left(z - \frac{4}{9} \right) > 0$$

$$36 \left(\frac{4z-1}{4} \right) \left(\frac{9z-4}{9} \right) > 0$$

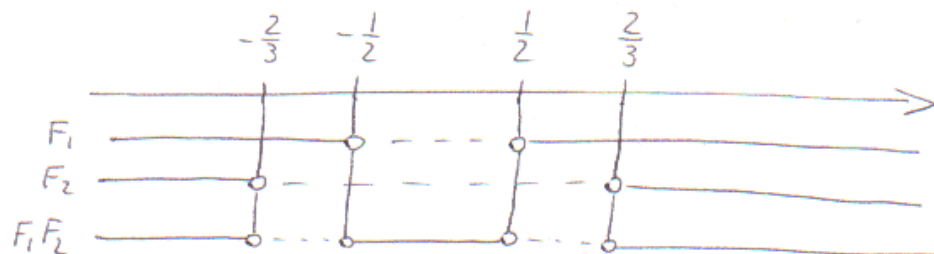
$$(4x^2 - 1)(9x^2 - 4) > 0$$

$$F_1 > 0 \rightarrow 4x^2 - 1 > 0$$

$$x < -\frac{1}{2} \vee x > +\frac{1}{2}$$

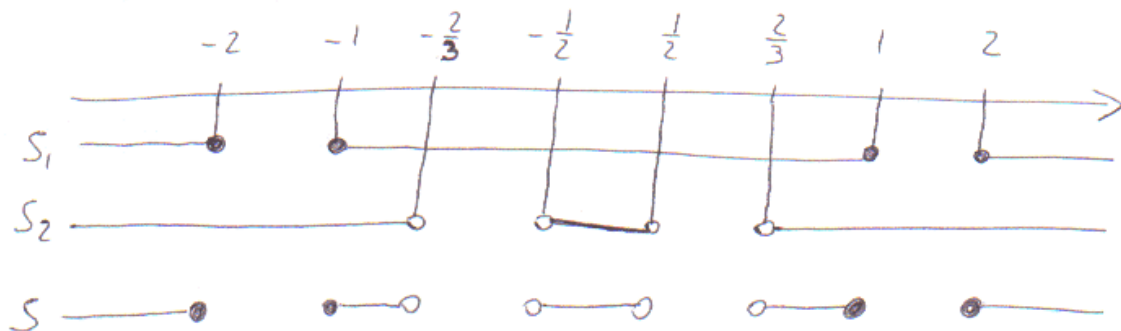
$$F_2 > 0 \rightarrow 9x^2 - 4 > 0$$

$$x < -\frac{2}{3} \vee x > +\frac{2}{3}$$



$$x < -\frac{2}{3} \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x < -\frac{2}{3} \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$x \leq -2 \vee -1 \leq x < -\frac{2}{3} \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee \frac{2}{3} < x \leq 1 \vee x \geq 2$$

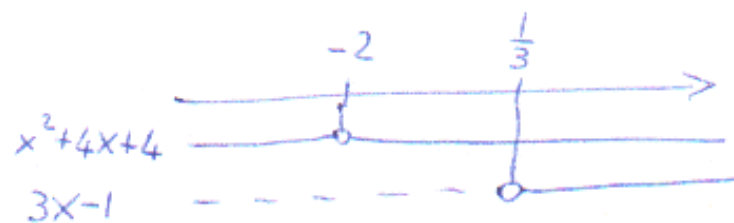
Equazioni con valore assoluto

$$|x^2 + 4x + 4| - |3x - 1| = 4x + 1$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$3x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$



$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x^2 + 4x + 4 - (1 - 3x) = 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x^2 + 4x + 4 - 1 + 3x - 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + 4x + 4 - (3x - 1) = 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + 4x + 4 - 3x + 1 = 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$

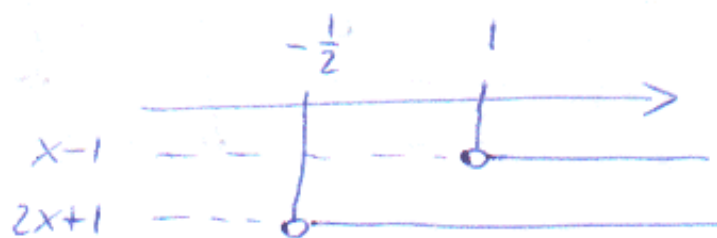
$$S_2 = \emptyset$$

$$S: x = -2 \vee x = -1$$

$$x+2 + |x-1| = |2x+1|$$

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$2x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2 + 1-x = -2x-1 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leq 1 \\ x+2 + 1-x = 2x+1 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 1 \\ x+2 + x-1 = 2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x = -4 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -2x = -2 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 1 \\ 0x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leq 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

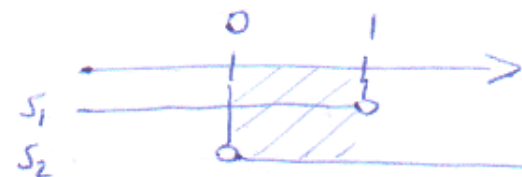
$$S: x = -2 \vee x \geq 1$$

Disequazioni con valore assoluto

$$\begin{aligned} |3+4x| > 2 &\rightarrow \begin{cases} 3+4x < -2 & \vee & 3+4x > 2 \\ 4x < -5 & \vee & 4x > -1 \\ x < -\frac{5}{4} & \vee & x > -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$|1-2x| < 1 \rightarrow -1 < 1-2x < 1 \rightarrow \begin{cases} 1-2x > -1 \\ 1-2x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x > -2 \\ -2x < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x < 2 \\ 2x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$$



$$S: 0 < x < 1$$

$$|x^2 - (2x - 3)| < 3$$

$$|x^2 - 2x + 3| < 3 \rightarrow -3 < x^2 - 2x + 3 < 3 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 > -3 \\ x^2 - 2x + 3 < 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 6 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

1^a diseq.

$$x^2 - 2x + 6 > 0$$

$$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ 0 < x < 2 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow$$

2^a diseq.

$$x^2 - 2x < 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$0 < x < 2$$

$$S: \quad 0 < x < 2$$

$$\left| \frac{x-1}{2+x} \right| > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x-1}{2+x} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{2+x} + \frac{1}{2} < 0$$

$$\frac{2x-2+2+x}{2(2+x)} < 0$$

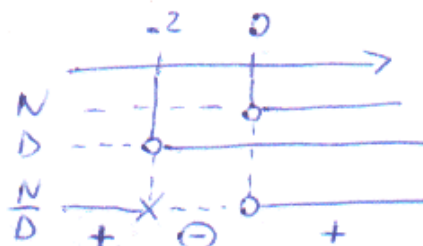
$$\frac{3x}{2+x} < 0$$

$$N > 0$$

$$3x > 0 \rightarrow x > 0$$

$$D > 0$$

$$2+x > 0 \rightarrow x > -2$$



$$-2 < x < 0$$

$$\vee \frac{x-1}{2+x} > \frac{1}{2}$$

$$\vee \frac{x-1}{2+x} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\vee \frac{2x-2-2-x}{2(2+x)} > 0$$

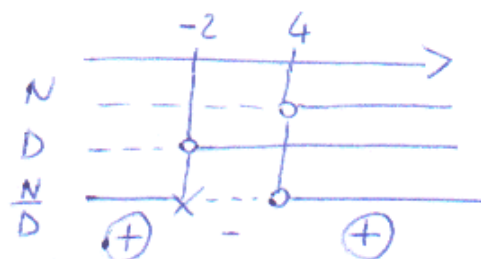
$$\vee \frac{x-4}{2+x} > 0$$

$$N > 0$$

$$x-4 > 0 \rightarrow x > 4$$

$$D > 0$$

$$2+x > 0 \rightarrow x > -2$$



$$x < -2 \vee x > 4$$

$$S: x < -2 \vee -2 < x < 0 \vee x > 4$$

$$2x + 3|x| - 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ 2x - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 0 \\ 2x + 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x \geq 4 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 0 \\ 5x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$x \leq -4$$

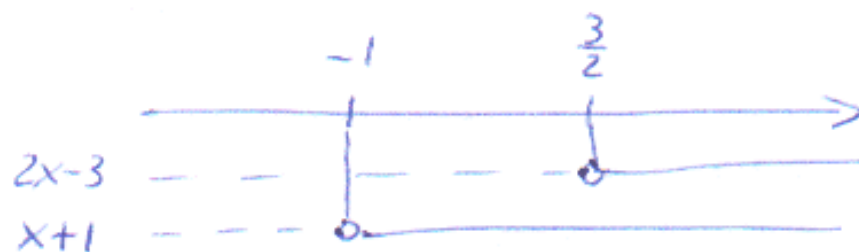
$$\vee x \geq \frac{4}{5}$$

$$S: x \leq -4 \vee x \geq \frac{4}{5}$$

$$|2x-3| > |x+1|$$

$$2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$



$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -2x+3 > -x-1 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{2} \\ -2x+3 > x+1 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 2x-3 > x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -x > -4 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{2} \\ -3x > -2 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{2} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > 4 \end{cases}$$

$$x \leq -1$$

$$\vee -1 < x < \frac{2}{3}$$

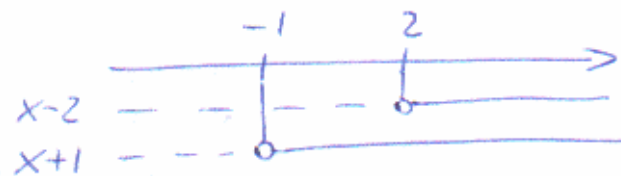
$$\vee x > 4$$

$$S: \quad x < \frac{2}{3} \quad \vee \quad x > 4$$

$$\frac{x^2 + |x-2|}{x^2 - |x+1|} > 1$$

$$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -1 \\ \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} > 1 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} -1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 1} > 1 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 1} > 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -1 \\ \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} - 1 > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} -1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 1} - 1 > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 1} - 1 > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -1 \\ \frac{x^2 - x + 2 - x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} -1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2 - x + 2 - x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1} > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -1 \\ \frac{-2x + 1}{x^2 + x + 1} > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} -1 < x \leq 2 \\ \frac{3}{x^2 - x - 1} > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1} > 0 \end{array} \right.$$

Disequazioni irrazionali

$$\sqrt[3]{x^3-8} < x-2$$

$$x^3-8 < (x-2)^3$$

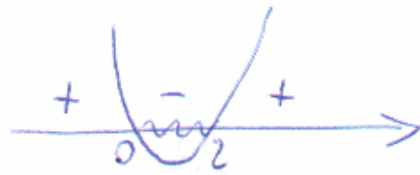
$$\cancel{x^3-8} < \cancel{x^3-6x^2+12x-8}$$

$$6x^2-12x < 0$$

$$6x(x-2) < 0$$

$a=6 > 0$ concavità verso l'alto

$$x_1=0 \quad x_2=2$$



$$S: \boxed{0 < x < 2}$$

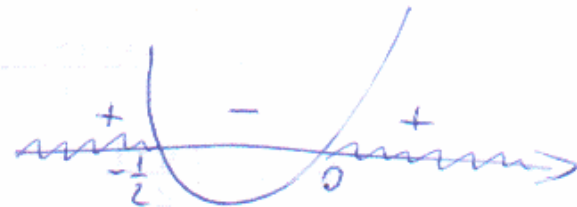
$$1+2x > \sqrt[3]{1+8x^3}$$

$$\cancel{1+6x+12x^2+8x^3} > \cancel{1+8x^3}$$

$$6x(2x+1) > 0$$

$a=12 > 0$ concavità verso l'alto

$$x_1=0 \quad x_2=-\frac{1}{2}$$



$$S: \boxed{x < -\frac{1}{2} \vee x > 0}$$

$$\sqrt{x-1} < x-3$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \\ x-1 < (x-3)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \\ x < 2 \vee x > 5 \end{cases}$$

Risolvo 3^a diseq.

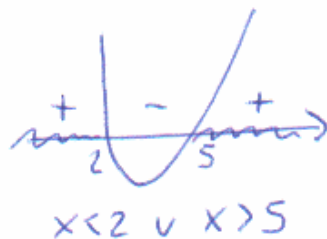
$$x-1 < x^2-6x+9$$

$$0 < x^2-7x+10$$

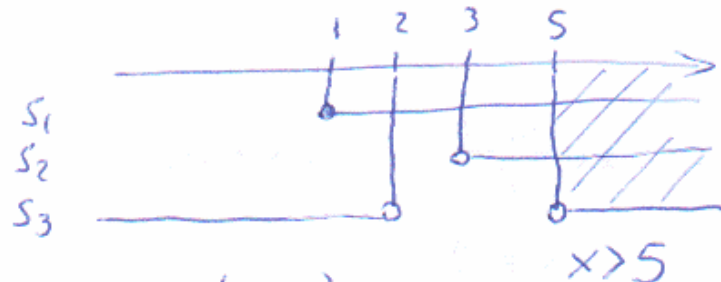
$$x^2-7x+10 > 0$$

$a=1$ concavità verso l'alto

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}$$



Soluzioni del sistema:



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 5\}$$

$$\sqrt{x^2 - x} \geq 2x$$

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 - x \geq 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 + x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$x < 0 \vee x = 0$$

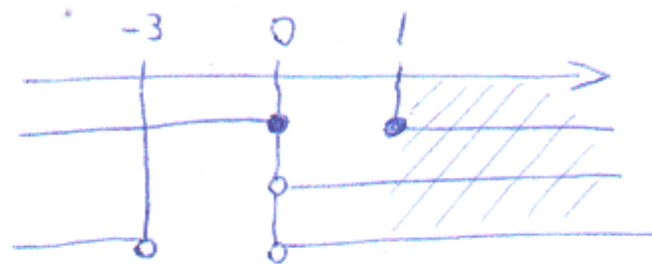
$$S: x \leq 0$$

$$\sqrt{x^2 - x} < 2x$$

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ 2x > 0 \\ x^2 - x < 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x > 0 \\ 3x^2 + x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x > 0 \\ x < -3 \vee x > 0 \end{cases}$$



$$S: x \geq 1$$

$$\sqrt{3-x+x^2} > x$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{x^2 - x + 3} > \cancel{x^2} \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

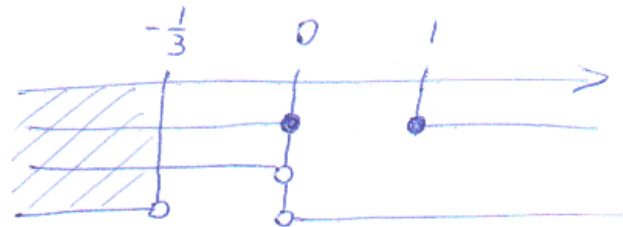
$$x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x < 3$$

$$S: x < 3$$

$$\sqrt{x^2 - x} < -2x$$

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ -2x > 0 \\ x^2 - x < 4x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x < 0 \\ 3x^2 + x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x < 0 \\ x < -\frac{1}{3} \vee x > 0 \end{cases}$$



$$S: x < -\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x+2} > -x$$

$$\begin{cases} -x < 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -x \geq 0 \\ x+2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$x > 0 \quad \vee \quad -1 < x \leq 0$$

$$S: \quad x > -1$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

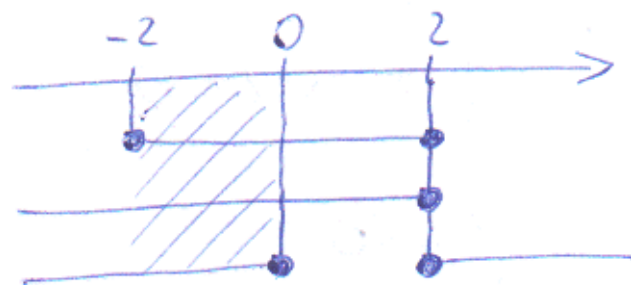
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\sqrt{4-x^2} \leq 2-x$$

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4-x^2 \leq 4-4x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4 \leq 0 \\ x \leq 2 \\ 2x^2-4x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 2 \end{cases}$$



$$S: -2 \leq x \leq 0 \quad \checkmark \quad x=2$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 3$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+1+x+2+2\sqrt{x^2+3x+2} < 9 \end{cases}$$

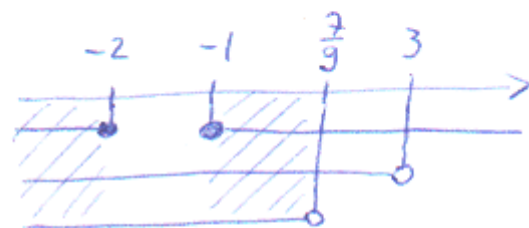
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \\ 2\sqrt{x^2+3x+2} < 6-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \\ \sqrt{x^2+3x+2} < 3-x \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} < 3-x$$

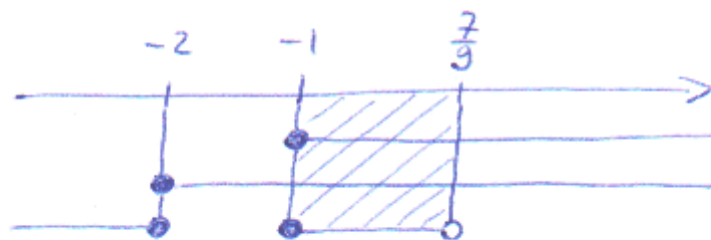
$$\begin{cases} x^2+3x+2 \geq 0 \\ 3-x > 0 \\ x^2+3x+2 < x^2-6x+9 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq -1 \\ x < 3 \\ x < \frac{7}{9} \end{cases}$$



$$x \leq -2 \vee -1 \leq x < \frac{7}{9}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \\ x \leq -2 \vee -1 \leq x < \frac{7}{9} \end{cases}$$



$$S: -1 \leq x < \frac{7}{9}$$

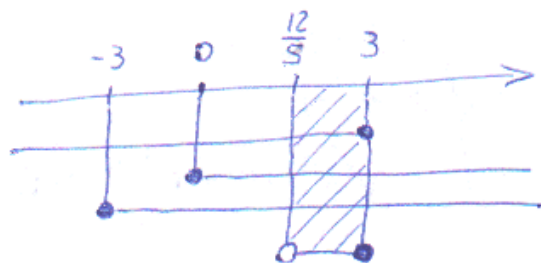
$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x} < \sqrt{3+x}$$

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3+x \geq 0 \\ 3-x+x+2\sqrt{3x-x^2} < 3+x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \geq -3 \\ 2\sqrt{3x-x^2} < x \end{cases}$$

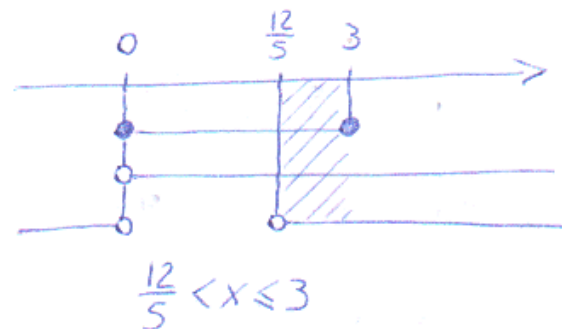
$$2\sqrt{3x-x^2} < x$$

$$\begin{cases} 3x-x^2 \geq 0 \\ x > 0 \\ 12x-4x^2 < x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x \leq 0 \\ x > 0 \\ 5x^2-12x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x > 0 \\ x < 0 \vee x > \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \geq -3 \\ \frac{12}{5} < x \leq 3 \end{cases}$$



$$S: \frac{12}{5} < x \leq 3$$



$$\sqrt{2x-2} - \sqrt{x} > \sqrt{2+x}$$

$$\sqrt{2x-2} > \sqrt{x} + \sqrt{2+x}$$

$$\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2+x \geq 0 \\ 2x-2 > x+2+x+2\sqrt{2x+x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 2\sqrt{2x+x^2} < -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ \emptyset \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} < \sqrt{x}$$

$$\sqrt{1+x} < \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1+x < 1-x+x+2\sqrt{x-x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ 2\sqrt{x-x^2} > x \end{cases}$$

$$2\sqrt{x-x^2} > x$$

$$\begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x-4x^2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 5x^2-4x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < x < \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\emptyset \vee 0 < x < \frac{4}{5}$$

$$0 < x < \frac{4}{5}$$

$$S: 0 < x < \frac{4}{5}$$

FUNZIONI

Funzioni: dominio

$$y = \sqrt{2-x}$$

$$2-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2 \quad D = (-\infty; 2]$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$4-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2-4 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad D = [-2; 2]$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$9-x^2 > 0 \rightarrow x^2-9 < 0 \rightarrow -3 < x < 3 \quad D = (-3; 3)$$

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad D = [0; 1]$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1-x}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow 0 < x \leq 1 \quad D = (0; 1]$$

$$y = \frac{1}{x^4+3x^2+2}$$

$$x^4+3x^2+2 \neq 0$$

$$(x^2+1)(x^2+2) \neq 0$$

$$x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2+2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$y = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-9 \leq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq -3 \end{cases} \rightarrow -3 < x \leq 3$$

$$D = (-3; 3]$$

$$y = \sqrt{|x|-2}$$

$$|x|-2 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$$

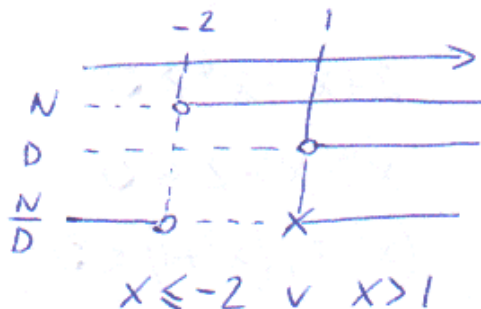
$$D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

$$y = \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

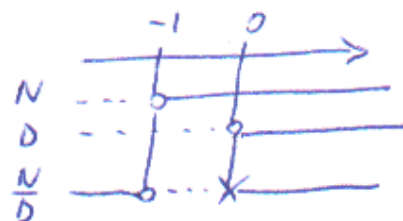


$$D = (-\infty; -2] \cup (1; +\infty)$$

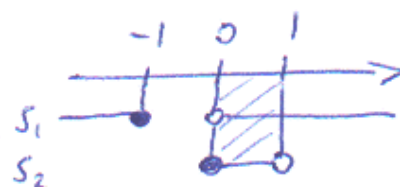
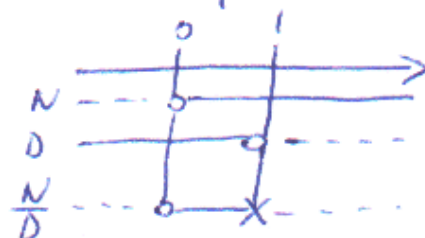
$$y = \sqrt{\frac{1+x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\begin{cases} \frac{1+x}{x} \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x > 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

1^a diseq.



2^a diseq.



$$0 < x < 1$$

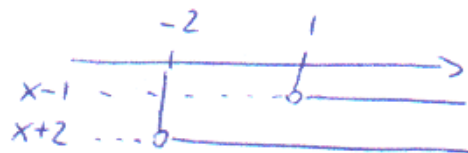
$$D = (0; 1)$$

$$y = \sqrt{|x-1| - |x+2| + 1}$$

$$|x-1| - |x+2| + 1 \geq 0$$

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$$



$$\begin{cases} x \leq -2 \\ -x+1+x+2+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 1 \\ -x+1-x-2+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ x-1-x-2+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ 0x \geq -4 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 1 \\ -2x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ 0x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ \emptyset \end{cases}$$

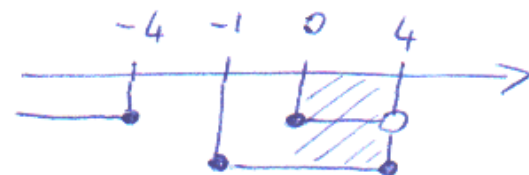
$$x \leq -2 \vee -2 < x \leq 0 \vee \emptyset$$

$$x \leq 0$$

$$D = \mathbb{R}_0^-$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2+4x}{4-x}} + \sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2+4x}{4-x} \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \vee 0 \leq x < 4 \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



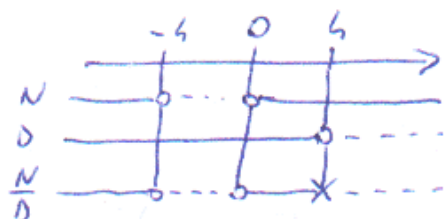
1^a diseq.

$$N > 0 \rightarrow 4x + x^2 > 0$$

$$x < -4 \vee x > 0$$

$$D > 0 \quad 4-x > 0$$

$$x < 4$$



$$x \leq -4 \vee 0 \leq x < 4$$

2^a diseq.

$$-x^2 + 3x + 4 \geq 0$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}$$

$$-1 \leq x \leq 4$$

$$0 \leq x < 4$$

$$D = [0; 4)$$

Funzioni: definizione,
proprietà,
caratteristiche

$$A = \{-2; -1; 1; 2; 3\}$$

$$B = \{1; 4; 9; 10\}$$

$$p(x; y) = "y = x^2" \quad x \in A, y \in B$$

$$-2 R 4$$

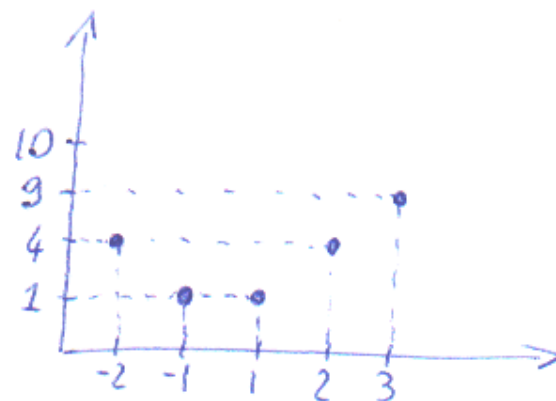
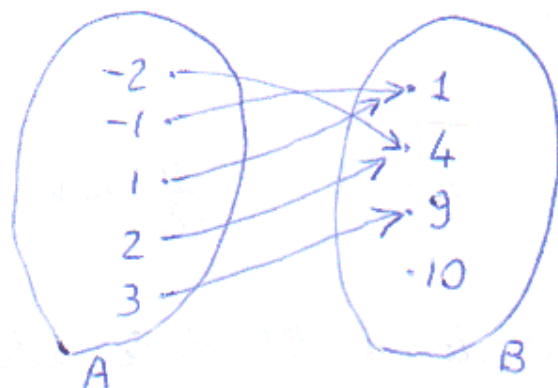
$$-1 R 1$$

$$1 R 1$$

$$2 R 4$$

$$3 R 9$$

la relazione è una funzione perché
ad ogni elemento di A corrisponde
uno ed un solo elemento di B.



$$A = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 2x - 3$$

$$C = ? \quad \text{codominio}$$

Il codominio è l'insieme di tutte le immagini.

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

$$C = \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$p(x;y) = "y = \frac{|x|}{x}" \quad x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$$

La relazione non è una funzione perché ad $x=0$ non corrisponde nessun $y \in \mathbb{Q}$.

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{se } x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$

Il denominatore di $\frac{|x|}{x}$ deve essere diverso da 0.

Quindi il dominio è

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

Il codominio è l'insieme di tutte le immagini:

$$C = \{-1; 1\}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{2}$$

immagine di 5?

$$f(5) = \frac{2 \cdot 5 - 1}{2} = \frac{9}{2}$$

verificare che 5 non ha controimmagine

$$y=5 \quad x=?$$

$$y = \frac{2x-1}{2}$$

$$5 = \frac{2x-1}{2}$$

$$10 = 2x - 1$$

$$11 = 2x \quad x = \frac{11}{2}$$

$\frac{11}{2}$ non è un numero
naturale

Non esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $f(x) = 5$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

immagine di $\frac{3}{2}$?

$$x = \frac{3}{2} \quad y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 4 = \frac{3}{4} - 4 = \frac{3-16}{4} = -\frac{13}{4}$$

controimmagine di $-\frac{1}{6}$?

$$y = -\frac{1}{6} \quad x = ?$$

$$y = \frac{1}{2}x - 4$$

$$-\frac{1}{6} = +\frac{1}{2}x - 4 \rightarrow -1 = 3x - 24 \rightarrow 23 = 3x$$

$$x = \frac{23}{3}$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4$$

$$x \in \mathbb{R}$$

immagine di 0?

$$x=0$$

$$y = f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4$$

controimmagini di 10?

$$y=10 \quad x=?$$

$$y = 2x^2 + 3x - 4$$

$$10 = 2x^2 + 3x - 4$$

$$2x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = 9 + 112 = 121 = 11^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 11}{4} = \begin{cases} -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} \\ +\frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{per } x \geq 1 \\ -x^2+x & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_1(x) = x+3$$

$$f_2(x) = -x^2+x$$

$$\text{per } x=1$$

$$f_1(1) = 1+3 = 4$$

$$f_2(1) = -(1)^2 + 1 = 0$$

la legge non definisce una funzione perché ad $x=1$ sono associati due elementi di B ($y=4$ e $y=0$).

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = ax + b$$

$$a = ?$$

$$b = ?$$

$$f(1) = 7$$

$$f(-2) = 1$$

$$f(1) = a + b$$

$$f(-2) = -2a + b$$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 7 - b \\ -14 + 2b + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 7 - b \\ 3b = 15 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = 2(x+1) + 3$$

immagine di 2?

$$x=2$$

$$f(2) = 2(2+1) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

controimmagine di 13?

$$y=13 \quad x=?$$

$$y = 2(x+1) + 3$$

$$13 = 2x + 2 + 3$$

$$13 = 2x + 5$$

$$8 = 2x$$

$$x=4$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

immagine di 0 ?

$$x=0 \quad y=?$$

$$y = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$$

immagine di 1 ?

$$x=1 \quad y=?$$

$$y = f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 3$$

controimmagini di 4 ?

$$y=4 \quad x=?$$

$$y = x^2 - 4x + 6$$

$$4 = x^2 - 4x + 6$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 8 = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$2 - \sqrt{2}$ è un numero irrazionale

$2 + \sqrt{2}$ " " " "

4 non ha controimmagini in $\mathbb{Q}$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(x) = x^8$$

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g(x) = 5x^4 - 4$$

$$x = ? \quad f(x) = g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$x^8 = 5x^4 - 4$$

$$x^8 - 5x^4 + 4 = 0$$

$$(x^4 - 4)(x^4 - 1) = 0$$

$$(x^2 + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{2} \quad \text{non appartenons a } \mathbb{Z}$$

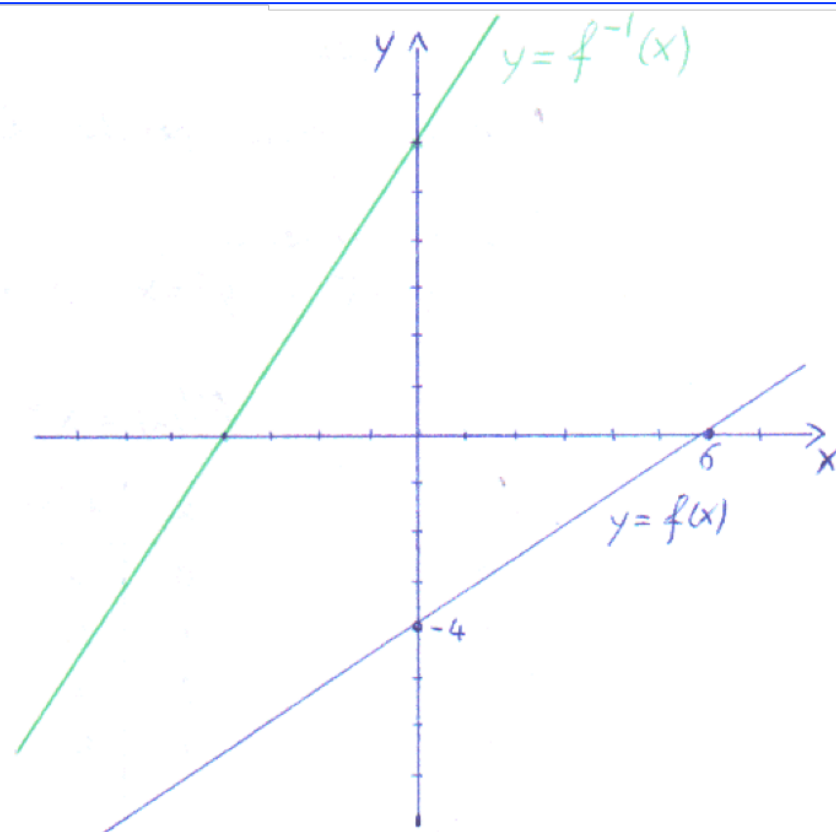
$$x = \pm 1$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 4$$

x	f(x)
-6	-8
-3	-6
0	-4
3	-2
6	0
9	2
12	4

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 6$$

x	f ⁻¹ (x)
-6	-3
-4	0
-2	3
0	6
2	9
4	12



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 4$$

f è iniettiva se $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{2}{3}x_1 - 4 = \frac{2}{3}x_2 - 4 \rightarrow \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3}x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

f è suriettiva se $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$

$$y = \frac{2}{3}x - 4 \rightarrow y + 4 = \frac{2}{3}x \rightarrow \frac{3y + 12}{3} = \frac{2x}{3} \rightarrow x = \frac{3}{2}y + 6$$

f è biunivoca perché è iniettiva e suriettiva

$$y = \frac{2}{3}x - 4 \rightarrow y + 4 = \frac{2}{3}x \rightarrow x = \frac{3}{2}y + 6$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{array}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 6 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 6$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

f è iniettiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \rightarrow x_1 = x_2$$

f è suriettiva:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$

codominio $C = \mathbb{R}_0^+$

f è biunivoca perché è iniettiva e suriettiva

funzione inversa:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y^2 = x \rightarrow x = y^2$$

$\begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix}$

$$y = x^2$$

$$f^{-1}(x) = x^2$$

$$y = f^{-1}(x)$$

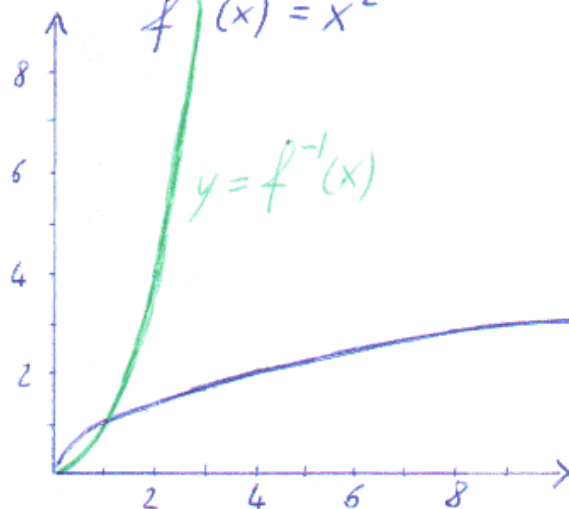
$$y = f(x)$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
9	3

$$f^{-1}(x) = x^2$$

x	$f^{-1}(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9



$$f(x) = -\sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

f è iniettiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow -\sqrt{x_1} = -\sqrt{x_2} \rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \rightarrow x_1 = x_2$$

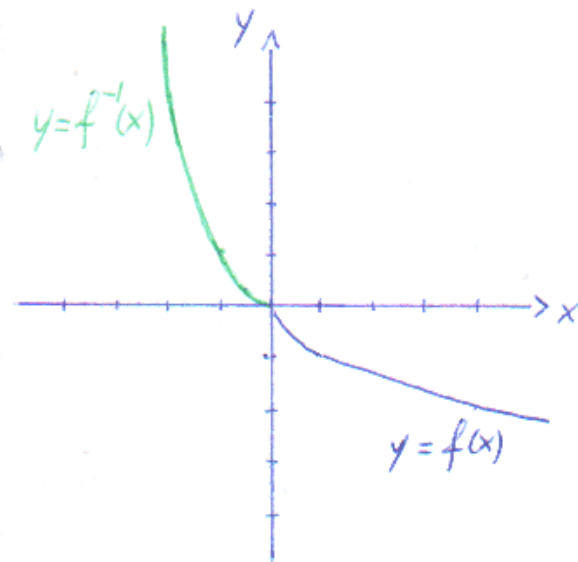
f è suriettiva:

$$y = -\sqrt{x} \rightarrow -y = \sqrt{x} \rightarrow x = (-y)^2 \quad y \leq 0$$

f è biunivoca e invertibile:

$$y = -\sqrt{x} \rightarrow x = (-y)^2 \rightarrow \begin{matrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{matrix} \quad y = (-x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = x^2, \quad f^{-1}(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$



$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x}$$

$$x \neq 0 \quad \text{dominio} \quad D = \mathbb{Q} - \{0\}$$

$$y = \frac{3x-1}{x} \rightarrow x \neq 0 \quad xy = 3x-1 \rightarrow xy-3x = -1 \rightarrow 3x-xy = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(3-y) = 1 \rightarrow y \neq 3 \quad x = \frac{1}{3-y}$$

$$\text{codominio} \quad C = \mathbb{Q} - \{3\}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{3x_1-1}{x_1} = \frac{3x_2-1}{x_2} \rightarrow \cancel{3x_1x_2} - x_2 = \cancel{3x_1x_2} - x_1 \rightarrow x_1 = x_2$$

f è iniettiva

funzione inversa:

$$y = \frac{3x-1}{x} \rightarrow xy = 3x-1 \rightarrow 1 = 3x-xy \rightarrow 1 = x(3-y) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{3-y}$$

$$\begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{3-x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3-x}$$

$$A = (0; 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$$

$$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow A$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{1}{1+x_1^2} = \frac{1}{1+x_2^2} \rightarrow 1+x_2^2 = 1+x_1^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_2^2 = x_1^2 \rightarrow x_1 = x_2 \quad f \text{ è iniettiva}$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow y + x^2 y = 1 \rightarrow x^2 y = 1 - y \rightarrow$$

$$y \neq 0 \quad x^2 = \frac{1-y}{y} \rightarrow \text{se } y \in A \quad x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

f è suriettiva

f è biunivoca e
invertibile:

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

$$\begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix}$$

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = 3x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = 2(3x - 1) + 3 = 6x - 2 + 3 = 6x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) - 1 = 6x + 9 - 1 = 6x + 8$$

$$f \circ g \neq g \circ f \quad \text{perché} \quad 6x + 1 \neq 6x + 8$$

$$y = 26$$

$$6x + 1 = 26 \rightarrow 6x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{6} \notin \mathbb{Z}$$

26 non ha controimmagine in $f \circ g$

$$y = 26$$

$$6x + 8 = 26 \rightarrow 6x = 18 \rightarrow x = 3$$

26 ha controimmagine $x = 3$ in $g \circ f$

$$f(x) = x + 1$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = 2x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(2x - 1) = 2x - 1 + 1 = 2x$$

$$(g \circ f)(x) = g(x + 1) = 2(x + 1) - 1 = 2x + 2 - 1 = 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

$$2x = 2x + 1 \rightarrow 0x = 1 \quad \text{impossibile}$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(x) = x^2 - x$$

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g(x) = 2x$$

$$a(x) = (f \circ g)(x) = f(2x) = 4x^2 - 2x$$

$$b(x) = (g \circ f)(x) = g(x^2 - x) = 2x^2 - 2x$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f è iniettiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

f è suriettiva:

$$y = 2x + 5 \rightarrow y - 5 = 2x \rightarrow x = \frac{y-5}{2}$$

f è biunivoca perché è iniettiva e suriettiva

f è una funzione crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow 2x_1 < 2x_2 \rightarrow 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + \cancel{\frac{1}{2}} = 2x_2 + \cancel{\frac{1}{2}} \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

f è iniettiva

$$y = 2x + \frac{1}{2} \rightarrow y - \frac{1}{2} = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}$$

f è suriettiva

f è biunivoca perché è iniettiva e suriettiva

funzione inversa:

$$y = 2x + \frac{1}{2} \rightarrow y - \frac{1}{2} = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x \end{aligned}$$

$$f(x) = 3 - 2x$$

f è iniettiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 3 - 2x_1 = 3 - 2x_2 \rightarrow -2x_1 = -2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

f è suriettiva:

$$y = 3 - 2x \rightarrow 2x = 3 - y \rightarrow x = \frac{3-y}{2}$$

f è biunivoca perché è iniettiva e suriettiva.

f è una funzione decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow -2x_1 > -2x_2 \rightarrow 3 - 2x_1 > 3 - 2x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

f è crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1^3 < x_2^3 \rightarrow x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f è iniettiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \rightarrow x_1^3 = x_2^3 \rightarrow x_1 = x_2$$

f è suriettiva:

$$y = x^3 + 1 \rightarrow x^3 = y - 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$$

f è biunivoca e invertibile:

$$y = x^3 + 1 \rightarrow x^3 = y - 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$$

$$\begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix}$$

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

f è decrescente in $(-\infty; 1)$

$$x_1 < 1, x_2 < 1$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 - x_1 x_2 < x_2 - x_1 x_2 \rightarrow x_1(1 - x_2) < x_2(1 - x_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x_1}{1 - x_1} < \frac{x_2}{1 - x_2} \rightarrow -\frac{x_1}{x_1 - 1} < -\frac{x_2}{x_2 - 1} \rightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} > \frac{x_2}{x_2 - 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

f è decrescente in $(1; +\infty)$

$$x_1 > 1, x_2 > 1$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 - x_1 x_2 < x_2 - x_1 x_2 \rightarrow -x_1 + x_1 x_2 > -x_2 + x_1 x_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1(x_2 - 1) > x_2(x_1 - 1) \rightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} > \frac{x_2}{x_2 - 1} \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

funzione inversa:

$$y = \frac{x}{x-1} \rightarrow x \neq 1 \quad yx - y = x \rightarrow yx - x = y \rightarrow x(y-1) = y \rightarrow$$

$$\rightarrow y \neq 1 \quad x = \frac{y}{y-1} \rightarrow \begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix} \quad y = \frac{x}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Progressioni aritmetiche e geometriche

Calcola la ragione di una progressione geometrica di 5 termini i cui estremi sono, nell'ordine, $-\frac{1}{2}$ e -8 .

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} ; \quad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} ; \quad -8 = -\frac{1}{2} \cdot q^4 ; \quad q^4 = 16 ; \quad q = \pm\sqrt[4]{16} = \pm\sqrt[4]{2^4} = \pm 2 .$$

Calcola il numero n dei termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, primo termine $\frac{3}{4}$ ed n -esimo termine $\frac{1}{36}$.

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} ; \quad \frac{1}{36} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ; \quad \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ;$$
$$n - 1 = 3 ; \quad n = 4 .$$

Inserisci fra i termini 2 e $8\sqrt{2}$ quattro numeri in modo da formare una progressione geometrica.

Soluzione

Determiniamo la ragione:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} ; \quad a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} ; \quad 8\sqrt{2} = 2 \cdot q^5 ; \quad q^5 = 4\sqrt{2} ; \quad q^5 = \sqrt{4^2 \cdot 2} ;$$
$$q^5 = (\sqrt{2})^5 ; \quad q = \sqrt{2} .$$

I termini della progressione geometrica sono: 2 , $2\sqrt{2}$, 4 , $4\sqrt{2}$, 8 , $8\sqrt{2}$.

Determina il numero dei termini di una progressione geometrica avente ragione 2, somma 51 e il cui primo termine è $\frac{1}{5}$.

Soluzione

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} ; \quad 51 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} ; \quad 255 = 2^n - 1 ; \quad 2^n = 256 ; \quad 2^n = 2^8 ; \quad n = 8 .$$

Le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo sono numeri interi e formano una progressione geometrica di ragione 2. Quale delle seguenti misure può rappresentare il volume del solido?

◇ 120

◇ 188

◇ 350

◇ 500

◇ nessuna delle precedenti

Soluzione

Le misure degli spigoli sono del tipo: x , $2x$ e $4x$.

Il volume del parallelepipedo è quindi: $V = x \cdot 2x \cdot 4x = 8x^3$.

Il volume del solido deve essere rappresentato da un numero dato dal prodotto di 8 con un numero cubo perfetto.

Le misure idonee sono: $8 \cdot 1^3 = 8$, $8 \cdot 2^3 = 64$, $8 \cdot 3^3 = 216$, $8 \cdot 4^3 = 512$

Pertanto nessuna delle precedenti misure può rappresentare il volume del solido.

Per quale valore di a i tre numeri $a - 3$, a , $a + 4$ sono in progressione geometrica? Determina il settimo termine di questa progressione.

Soluzione

$$\frac{a}{a-3} = \frac{a+4}{a} ; \quad \text{con } a \neq 0 \wedge a \neq 3$$

$$a^2 = (a-3)(a+4) ; \quad a^2 = a^2 + 4a - 3a - 12 ; \quad a = 12 .$$

$$a_1 = a - 3 = 12 - 3 = 9 ; \quad a_2 = a = 12 ; \quad q = \frac{a}{a-3} = \frac{12}{12-3} = \frac{4}{3}$$

Calcoliamo il settimo termine:

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} ; \quad a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^6 = 9 \cdot \frac{4096}{729} = \frac{4096}{81} .$$

Calcola la seguente somma: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$.

Soluzione 1

Si tratta di una progressione geometrica di ragione x . I termini di questa somma sono $n + 1$.

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} ;$$

$$S_{n+1} = 1 \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{con } x \neq 1 .$$

Soluzione 2

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} ;$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + S_n = 1 + x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + \frac{x \cdot x^n - x}{x - 1} = 1 + \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \\ &= \frac{x - 1 + x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{con } x \neq 1 . \end{aligned}$$

Calcola il sesto termine di una progressione aritmetica di ragione 7 e primo termine 3 .

Soluzione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d ; \quad a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d = 3 + 5 \cdot 7 = 38 .$$

Calcola la ragione di una progressione aritmetica di 4 termini i cui estremi sono, nell'ordine, 32 e 50 .

Soluzione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d ; \quad a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d ; \quad 50 = 32 + 3d ; \quad 3d = 18 ; \quad d = 6 .$$

Calcola il primo termine di una progressione aritmetica di ragione $\frac{5}{6}$ e ottavo termine $\frac{37}{6}$.

Soluzione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d ; \quad a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot d ; \quad \frac{37}{6} = a_1 + 7 \cdot \frac{5}{6} ; \quad a_1 = \frac{37}{6} - \frac{35}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

Calcola il numero n dei termini di una progressione aritmetica di ragione -11 , primo termine -10 ed n -esimo termine -43 .

Soluzione

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d ; & a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d ; & -43 &= -10 + (n - 1) \cdot (-11) ; \\ -43 &= -10 - 11n + 11 ; & 11n &= 43 - 10 + 11 ; & 11n &= 44 ; & n &= 4 . \end{aligned}$$

Calcola la somma dei primi dieci multipli di 4 diversi da zero.

Soluzione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d ; \quad a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 4 + 9 \cdot 4 = 40 .$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} ; \quad S_{10} = 10 \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 10 \cdot \frac{4 + 40}{2} = 5 \cdot 44 = 220 .$$

Calcola la somma dei primi n numeri pari diversi da zero.

Soluzione

$$\text{Per } n = 1 \rightarrow np = 2 \cdot n = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Per } n = 2 \rightarrow np = 2 \cdot n = 2 \cdot 2 = 4$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} ; \quad S_n = n \cdot \frac{2 + 2n}{2} = n \cdot \frac{2(1 + n)}{2} = n \cdot (n + 1) .$$

Esempio 14

Calcola la somma dei primi n numeri dispari diversi da zero.

Soluzione

$$\text{Per } n = 1 \rightarrow np = 2 \cdot n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\text{Per } n = 2 \rightarrow np = 2 \cdot n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} ; \quad S_n = n \cdot \frac{1 + (2n - 1)}{2} = n \cdot \frac{2n}{2} = n^2 .$$

Nel quadrato a lato, determina il valore di x per cui le tre aree dei tre triangoli A_1 , A_2 , A_3 sono in progressione aritmetica.

Soluzione

Le tre aree sono in progressione aritmetica se:

$$A_2 - A_1 = A_3 - A_2 ;$$

$$\frac{4 \cdot x}{2} - \frac{x \cdot (4 - x)}{2} = \frac{4 \cdot (4 - x)}{2} - \frac{4 \cdot x}{2} ;$$

$$2x - \frac{4x - x^2}{2} = \frac{16 - 4x}{2} - 2x ;$$

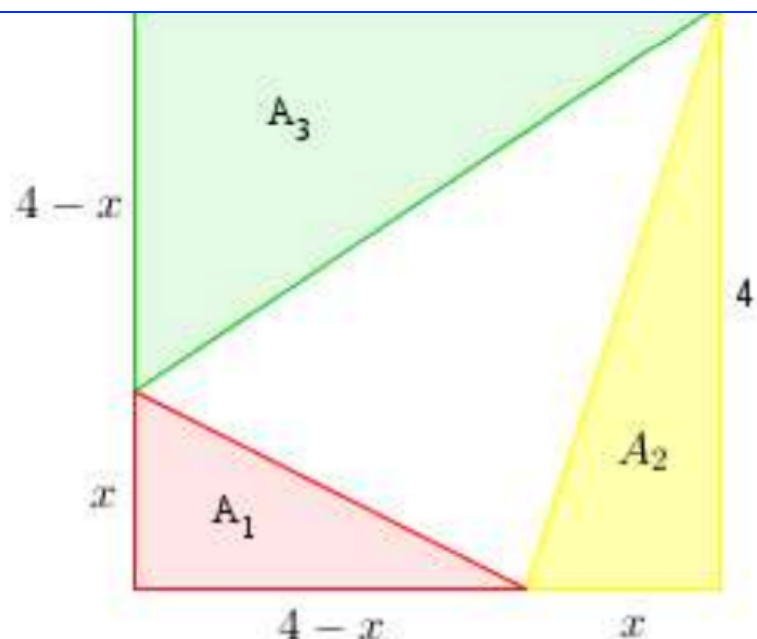
$$4x - 4x + x^2 = 16 - 4x - 4x ;$$

$$x^2 + 8x - 16 = 0 ;$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{32} = -4 \pm 4\sqrt{2} = \begin{matrix} x_1 = -4 - 4\sqrt{2} \\ x_2 = -4 + 4\sqrt{2} \end{matrix} .$$

Dalla figura si osserva che la progressione è crescente.

Pertanto è accettabile soltanto la soluzione positiva $x_2 = -4 + 4\sqrt{2}$.



Un atleta vuole preparare il suo programma di allenamento in vista della maratona. Intende correre a giorni alterni, cominciando il primo allenamento con un percorso di 5km e aumentando progressivamente di un certo numero di chilometri a ogni allenamento, in modo da arrivare a correre 42km dopo 150 giorni. Sapendo che le distanze percorse formano una progressione aritmetica, calcola la ragione.

Soluzione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d ;$$

$$a_{75} = a_1 + (75 - 1) \cdot d ;$$

$$42 = 5 + 74 \cdot d ; \quad 74 d = 37 ; \quad d = \frac{37}{74} = \frac{1}{2} = 0,5 .$$

La ragione $d = 0,5 \text{ km}$.

Calcola la somma dei primi n multipli del 3 diversi da zero.

Soluzione

Il primo multiplo di 3 diverso da zero è 3. L'n-esimo multiplo di 3 è $3n$.

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione aritmetica si ottiene:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} ; \quad S_n = n \cdot \frac{3 + 3n}{2} = \frac{3}{2} n \cdot (n + 1) .$$

GEOMETRIA ANALITICA

Piano
cartesiano

$$A(1+3K)$$

$$B(2K-5)$$

$$\overline{AB} > 0$$

$$X_B - X_A > 0$$

$$2K-5-(1+3K) > 0$$

$$2K-5-1-3K > 0$$

$$-K-6 > 0$$

$$K+6 < 0$$

$$K < -6$$

$$A(-K+3)$$

$$B(K^2-3K)$$

$$\overline{AB} < 0$$

$$X_B - X_A < 0 \rightarrow K^2-3K-(-K+3) < 0 \rightarrow K^2-3K+K-3 < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow K^2-2K-3 < 0$$

$$\Delta = 4+12=16=4^2$$

$$K_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$-1 < K < 3$$

$$A(-2;0)$$

$$B(2;0)$$

$$C(0;2\sqrt{3})$$

$\triangle ABC$ è equilatero

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

Il triangolo ABC è equilatero perché $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

$$A(1;1)$$

$$B(3;3)$$

$$C(5;1)$$

$\triangle ABC$ è un

triangolo
rettangolo

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(5-1)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$16 = 8 + 8$$

Essendo verificato il teorema di Pitagora, il triangolo ABC è rettangolo.

$$A (K; 1)$$

$$B (2; 3-2K)$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AB}^2 = 8$$

$$(2-K)^2 + (3-2K-1)^2 = 8$$

$$(2-K)^2 + (2-2K)^2 = 8$$

$$4-4K+K^2+4-8K+4K^2-8=0$$

$$5K^2-12K=0$$

$$K(5K-12)=0$$

$$K=0 \vee K=\frac{12}{5}$$

$$A(-1; 2)$$

$$B(3; -4)$$

AB ipotenusa di un
triangolo rettangolo
isoscele

C ?

$$C(x; y)$$

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2$$

$$\cancel{x^2 + 2x + 1} + \cancel{y^2 - 4y + 4} = \cancel{x^2 - 6x + 9} + \cancel{y^2 + 8y + 16}$$

$$8x - 12y - 20 = 0$$

$$2x - 3y - 5 = 0$$

$$\overline{AB}^2 = (3+1)^2 + (-4-2)^2 = 16 + 36 = 52$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 \quad \text{Teorema di Pitagora}$$

$$52 = 2 \overline{AC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 26 \rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 26$$

continua

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 26 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+5}{2} \\ \frac{9y^2 + 30y + 25}{4} + 3y + 5 - 21 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3y+5}{2} \\ 9y^2 + 30y + 25 + 12y + 20 - 84 + 4y^2 - 16y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3y+5}{2} \\ 13y^2 + 26y - 39 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+5}{2} \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} -3 \\ +1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$C(4; 1)$ oppure $C(-2; -3)$

$$A(-1; 2)$$

$$B(3; 5)$$

$$C(5; -1)$$

ⓐ

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

ⓑ

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$M\left(1; \frac{7}{2}\right)$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$N(4; 2)$$

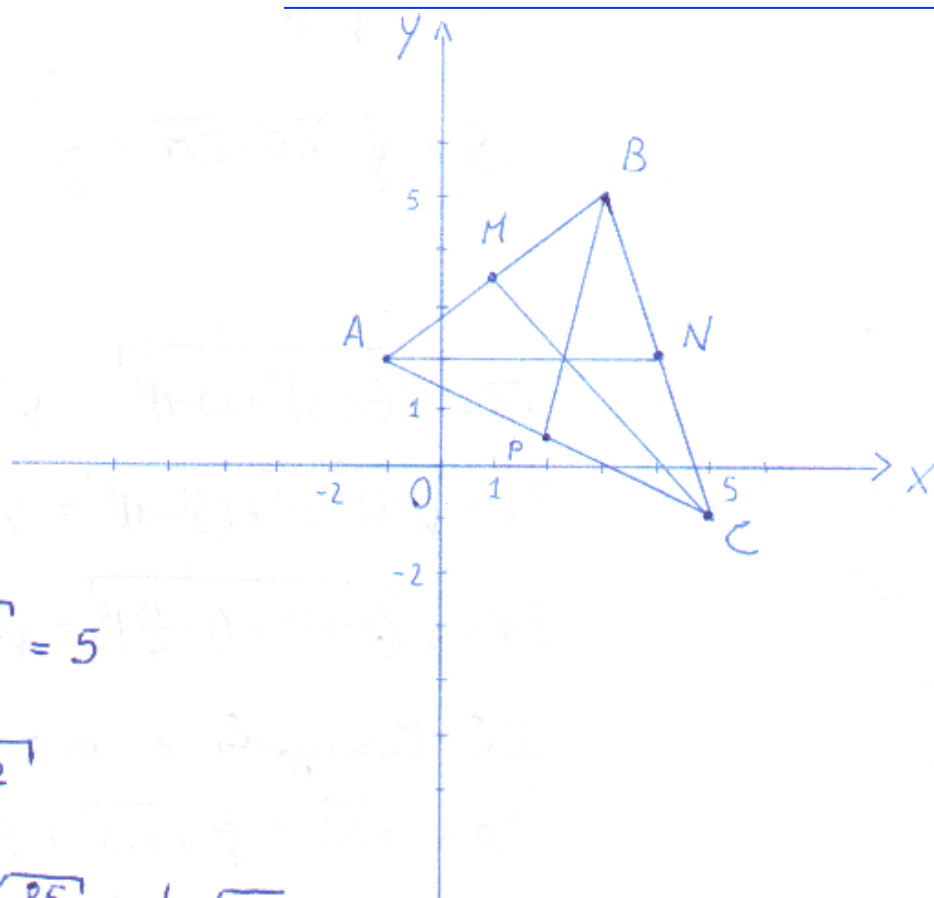
$$x_P = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$y_P = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(2; \frac{1}{2}\right)$$

continua

c)



$$\overline{AN} = \sqrt{(4+1)^2 + (2-2)^2} = 5$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(2-3)^2 + (\frac{1}{2}-5)^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{1 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2}$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(1-5)^2 + (\frac{7}{2}+1)^2} = \sqrt{16 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{64+81}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{145}$$

$$A(3;5)$$

$$B(5;7)$$

$$C(1;9)$$

$$2p = ?$$

$$S = ?$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-5)^2 + (9-7)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Il triangolo ABC è isoscele perché $\overline{BC} = \overline{CA}$

$$2p = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$$

M punto medio della base AB del triangolo

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$M(4;6)$$

CM altezza, mediana e bisettrice

$$\overline{CM} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CM} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$$

$$A(2; a-1)$$

$$B(a+2; 3a)$$

M punto medio di AB

$$X_M = Y_M$$

$$a = ?$$

$$X_M = Y_M$$

$$\frac{X_A + X_B}{2} = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

$$X_A + X_B = Y_A + Y_B$$

$$2 + a + 2 = a - 1 + 3a$$

$$a + 4 = 4a - 1$$

$$-3a = -5$$

$$a = \frac{5}{3}$$

$$A(1;2)$$

$$D(K; K+1) \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{2}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{2}$$

$$\overline{DA}^2 = 2$$

$$(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = 2$$

$$(1-K)^2 + (2-K-1)^2 = 2$$

$$(1-K)^2 + (1-K)^2 = 2$$

$$2(1-K)^2 = 2$$

$$(1-K)^2 = 1$$

$$1-K = \pm 1$$

$$K = 1 \mp 1 = \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

$$D_1(0;1)$$

$$D_2(2;3)$$

Il punto medio di $D_1 D_2$ è:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1 \quad y = \frac{1+3}{2} = 2 \rightarrow A(1;2)$$

I punti D_1 e D_2 sono pertanto simmetrici rispetto ad A .

La Retta

$$\begin{aligned} \text{rns: } \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x - 12y - 4 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 3x - 12 + 36x - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 39x = 16 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{39} \\ y = 1 - \frac{16}{13} = -\frac{3}{13} \end{cases} \quad \left(\frac{16}{39} ; -\frac{3}{13} \right) \end{aligned}$$

$$A(-3; 1)$$

r // s

A ∈ r

$$s) \quad 2x - y = 5$$

$$\begin{aligned} s: \quad 2x - y &= 5 \\ -y &= -2x + 5 \end{aligned}$$

$$y = 2x - 5 \quad m_s = 2$$

$$r // s \rightarrow m_r = m_s = 2$$

$$y - y_A = m_r(x - x_A) \rightarrow y - 1 = 2(x + 3) \rightarrow y = 2x + 7$$

$$2x - y + 7 = 0$$

$$A(-3;2)$$

$$s) y = 5x + 3$$

$$r \perp s \quad A \in r$$

$$m_s = 5 \rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{5}$$

$$y - y_A = m_r(x - x_A) \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{5}(x + 3) \rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$5y = -x + 7$$

$$x + 5y - 7 = 0$$

$$r: x - 2y + 5 = 0$$

$$s: 5x + y + 3 = 0$$

$$t: 3x + y - 1 = 0$$

$$P = r \cap s$$

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 5x + y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ 10y - 25 + y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ 11y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$P(-1;2)$$

equazione della retta passante per P e parallela a t:

$$t: 3x + y - 1 = 0 \rightarrow y = -3x + 1$$

$$m_t = -3 \quad m = m_t = -3$$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

$$y - 2 = -3(x + 1)$$

$$y = -3x - 1 \rightarrow 3x + y + 1 = 0$$

$$r: 3x - y + 1 = 0$$

$$s: x + 2y - 8 = 0$$

$$t: 2x + y - 10 = 0$$

$$P = r \cap s$$

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6y + 24 - y + 1 = 0 \\ x = -2y + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7y + 25 = 0 \\ x = -2y + 8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \frac{25}{7} \\ x = -\frac{50}{7} + 8 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{6}{7}; \frac{25}{7}\right)$$

equazione della retta passante per P e perpendicolare a t:

$$t: 2x + y - 10 = 0 \rightarrow y = -2x + 10$$

$$m_t = -2 \quad m = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y - \frac{25}{7} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{6}{7}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{6}{14} + \frac{25}{7} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{44}{14} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{22}{7}$$

$$14y = 7x + 44$$

$$7x - 14y + 44 = 0$$

$$r: 2x + y - 3 = 0$$

$$s: x + 5y - 1 = 0$$

$$P = r \cap s$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 5y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ x - 10x + 15 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ -9x = -14 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = -\frac{28}{9} + 3 \\ x = \frac{14}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{9} \\ x = \frac{14}{9} \end{cases} \quad (S) \quad P\left(\frac{14}{9}; -\frac{1}{9}\right)$$

① retta passante per P e parallela all'asse x :

$$y = -\frac{1}{9} \rightarrow 9y = -1 \rightarrow 9y + 1 = 0$$

retta passante per P e parallela all'asse y :

$$x = \frac{14}{9} \rightarrow 9x = 14 \rightarrow 9x - 14 = 0$$

② retta passante per P e parallela alla retta $2x + 3y + 1 = 0$:

$$3y = -2x - 1 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad m = -\frac{2}{3}$$

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y + \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{14}{9}\right) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{28}{27} - \frac{1}{9} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{27}$$

$$27y = -18x + 25 \rightarrow 18x + 27y - 25 = 0$$

$$P(2; -1)$$

$$A(2; 3)$$

$$B(3; 0)$$

coefficiente angolare della retta AB:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{3 - 2} = -3$$

retta passante per P e // ad AB:

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

$$y + 1 = -3(x - 2)$$

$$y = -3x + 5 \rightarrow 3x + y - 5 = 0$$

$$A(-2; -1)$$

$$B(1; 3)$$

$$C(6; 1)$$

M punto medio di AB

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$M\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

N punto medio di BC

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

$$N\left(\frac{7}{2}; 2\right)$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

coefficiente angolare della retta MN:

$$m_1 = \frac{2 - 1}{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

coefficiente angolare della retta AC:

$$m_2 = \frac{1 - (-1)}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$m_1 = m_2 \rightarrow MN \parallel AC$$

Trovare l'ortocentro (punto d'incontro delle altezze)

$$A(-7;7)$$

$$B(-1;-1)$$

$$C(5;11)$$

I coefficienti angolari delle rette
dei lati del triangolo sono:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 7}{-1 - 7} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{11 - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{12}{6} = 2$$

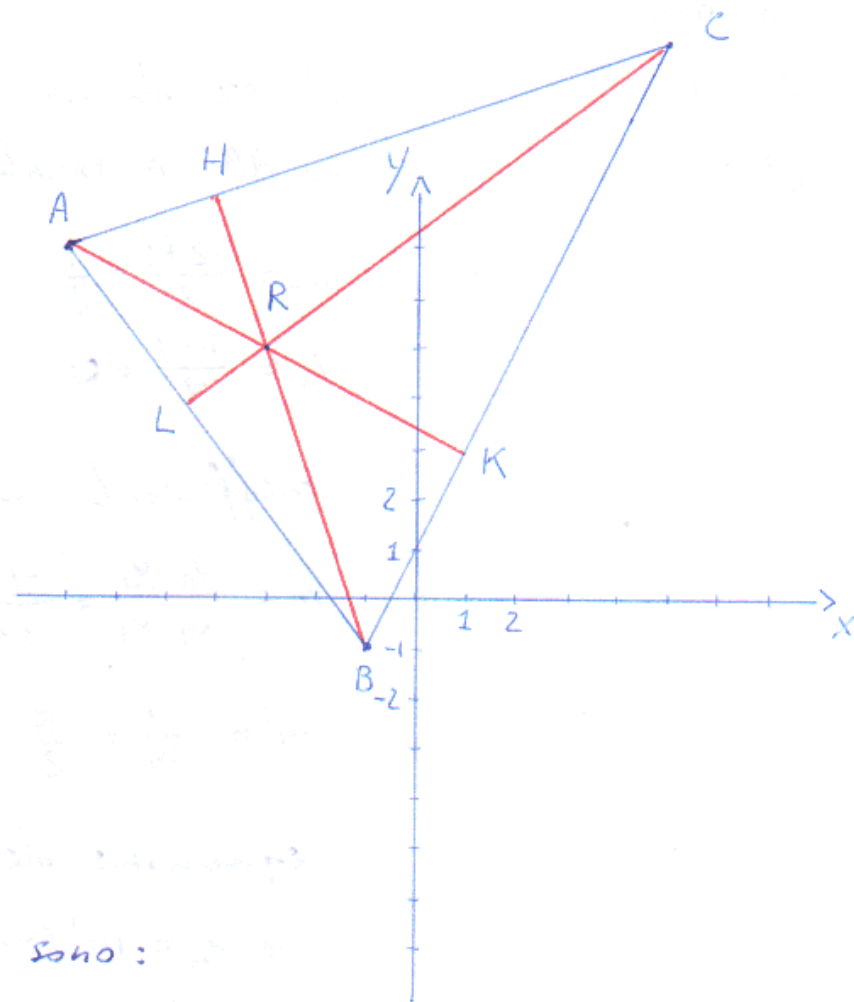
$$m_{CA} = \frac{7 - 11}{-7 - 5} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

I coefficienti angolari delle tre altezze sono:

$$m_{BH} = -\frac{1}{m_{AC}} = -3$$

$$m_{AK} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{CL} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{3}{4}$$



Equazione dell'alterna BH:

$$y - y_B = m_{BH}(x - x_B) \rightarrow y + 1 = -3(x + 1) \rightarrow y = -3x - 4$$

Equazione dell'alterna AK:

$$y - y_A = m_{AK}(x - x_A) \rightarrow y - 7 = -\frac{1}{2}(x + 7) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Equazione dell'alterna CL:

$$y - y_C = m_{CL}(x - x_C) \rightarrow y - 11 = \frac{3}{4}(x - 5) \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{29}{4}$$

Ponendo a sistema le equazioni di due alterne si otterranno le coordinate dell'ortocentro:

$$\begin{cases} y = -3x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = -3x - 4 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 7 = -6x - 8 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x = -15 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$R(-3; 5)$$

Per verificare che anche la terza alterna CL passa per R, basta sostituire le coordinate di R nell'equazione di CL e constatare che si ottiene un'identità.

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{29}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}(-3) + \frac{29}{4} = \frac{-9+29}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Trovare il circocentro (punto d'incontro degli assi dei lati)

$$A(6;4)$$

$$B(5;1)$$

$$C(2;2)$$

equazione asse di AB:

$$M\left(\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right) \quad \text{punto medio di AB}$$

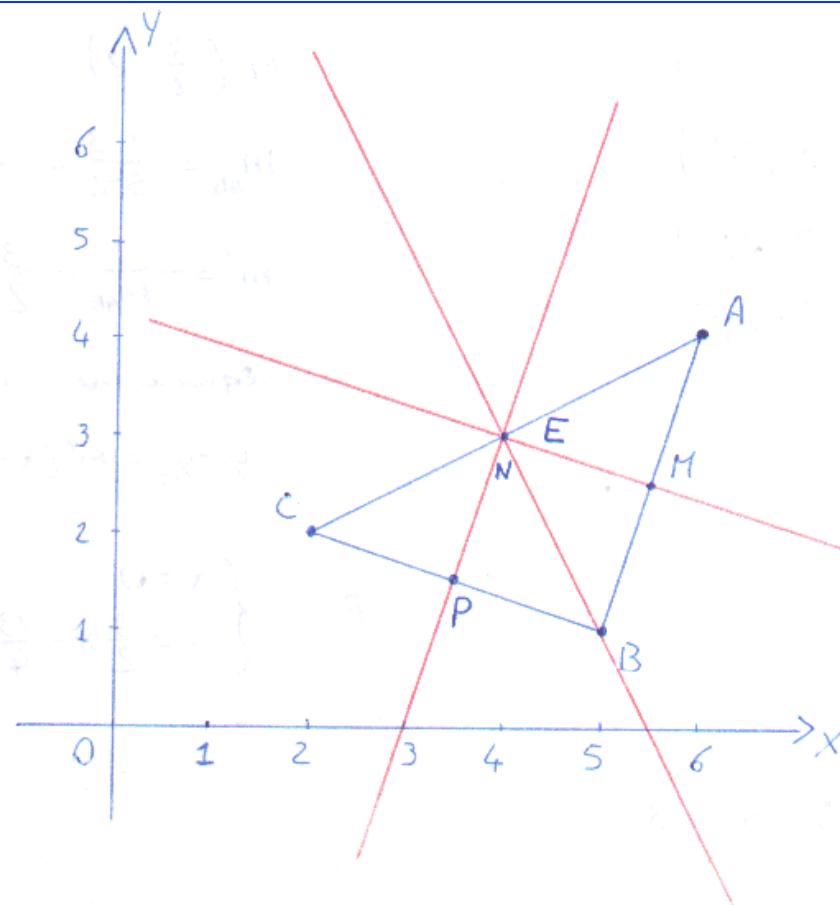
$$m_{AB} = \frac{1-4}{5-6} = 3 \quad \text{coeff. angolare della retta AB}$$

$$m' = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_M = m'(x - x_M)$$

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{11}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$$



equazione asse di CA:

$N(4;3)$ punto medio di CA

$$m_{CA} = \frac{4-2}{6-2} = \frac{1}{2} \quad \text{coeff. angolare della retta CA}$$

$$m'' = -\frac{1}{m_{CA}} = -2$$

$$y - y_N = m''(x - x_N)$$

$$y - 3 = -2(x - 4)$$

$$y = -2x + 11$$

equazione asse di CB:

$P\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ punto medio di CB

$$m_{CB} = \frac{1-2}{5-2} = -\frac{1}{3} \quad \text{coeff. angolare della retta CB}$$

$$m''' = -\frac{1}{m_{CB}} = +3$$

$$y - y_p = m'''(x - x_p)$$

$$y - \frac{3}{2} = 3\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$y = 3x - 9$$

Ponendo a sistema le equazioni
di due degli assi trovati, si
otterranno le coordinate del
CIRCOCENTRO E :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \\ y = -2x + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 11 = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \\ y = -2x + 11 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -6x + 33 = -x + 13 \\ y = -2x + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x = -20 \\ y = -2x + 11 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$E(4; 3)$$

Per verificare che il terzo asse,
quello di CB, passa per E, è
sufficiente sostituire le coordinate
di E nell'equazione di tale asse
e constatare che si ottiene un'identità.

$$x_E = 4 \quad y_E = 3$$

$$y = 3x - 9$$

$$3 = 3 \cdot 4 - 9$$

$$3 = 12 - 9$$

$$3 = 3$$

$$r) \quad x+3y+1=0$$

$$s) \quad 2x-y-5=0$$

$$B(0;5)$$

$$A: \begin{cases} x+3y+1=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3y-1 \\ -6y-2-y-5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3y-1 \\ -7y=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$A(2;-1)$$

equazione della retta AB:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \rightarrow \frac{y+1}{5+1} = \frac{x-2}{-2} \rightarrow \frac{y+1}{6} = \frac{2-x}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow y+1 = 6-3x \rightarrow 3x+y-5=0$$

$$A(-2;K)$$

$$B(K-1;3)$$

$$m_{AB} = \frac{3-K}{K-1+2} = \frac{3-K}{K+1}$$

$$(1) \quad \text{retta AB} \parallel 3x-y-2=0$$

$$y = 3x-2 \quad m=3$$

$$m_{AB} = m \rightarrow \frac{3-K}{K+1} = 3 \quad K \neq -1$$

$$3-K = 3K+3$$

$$-4K=0 \rightarrow K=0$$

Trovare il baricentro (punto incontro delle mediane)

$$A(1;8)$$

$$B(3;1)$$

$$C(-4;-3)$$

M punto medio di AB

$$M(2; \frac{9}{2})$$

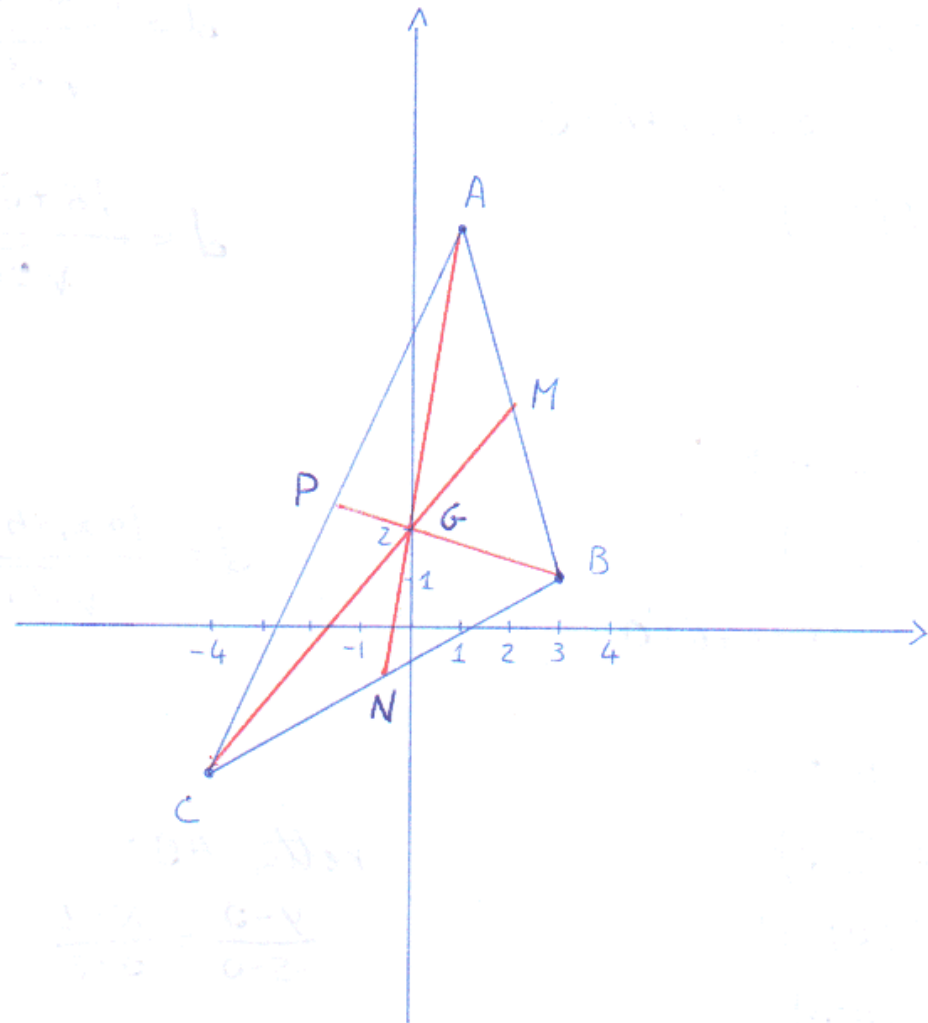
equazione della retta CM:

$$\frac{y-y_M}{y_C-y_M} = \frac{x-x_M}{x_C-x_M}$$

$$\frac{y-\frac{9}{2}}{-3-\frac{9}{2}} = \frac{x-2}{-4-2}$$

$$\frac{2y-9}{-15} = \frac{x-2}{-6}$$

$$4y-18 = 5x-10 \rightarrow 5x-4y+8=0$$



N punto medio di BC

$$N \left(-\frac{1}{2}; -1 \right)$$

equazione della retta AN:

$$\frac{y - y_A}{y_N - y_A} = \frac{x - x_A}{x_N - x_A}$$

$$\frac{y - 8}{-1 - 8} = \frac{x - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \rightarrow \frac{y - 8}{-9} = \frac{2x - 2}{-3}$$

$$y - 8 = 6x - 6$$

$$6x - y + 2 = 0$$

P punto medio di AC:

$$P\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

equazione della retta PB:

$$\frac{y - y_B}{y_P - y_B} = \frac{x - x_B}{x_P - x_B}$$

$$\frac{y - 1}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{x - 3}{-\frac{3}{2} - 3}$$

$$\frac{x(y - 1)}{3} = \frac{x(x - 3)}{-9}$$

$$3y - 3 = -x + 3$$

$$x + 3y - 6 = 0$$

Ponendo a sistema le equazioni di
AN e CM, si ottengono le coordinate
del baricentro G

$$\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 5x - 4y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6x + 2 \\ 5x - 24x - 8 + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 6x + 2 \\ -19x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad G(0; 2)$$

Per verificare che la terza mediana
(PB) passa per G, basta sostituire
le coordinate di G nell'equazione di
BP e constatare che si ottiene
un'identità.

$$x + 3y - 6 = 0$$

$$x_G = 0 \quad y_G = 2$$

$$0 + 6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

$$A(2;0)$$

$$B(0;-5)$$

$$P(0;0)$$

retta AB:

$$\frac{y-0}{-5-0} = \frac{x-2}{0-2} \rightarrow -2y = -5x+10$$

$$5x-2y-10=0$$

$$r: 5x-2y-10=0$$

$$d(P; r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25+4}} = \frac{10}{\sqrt{29}}$$

$$A(3;2)$$

$$B(10;3)$$

$$C(6;7)$$

$$S = ?$$

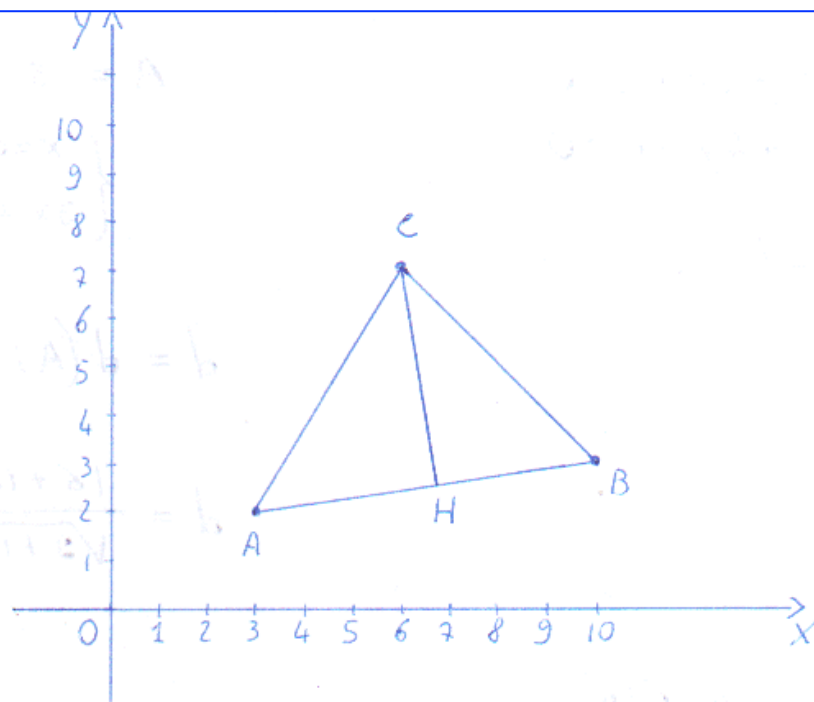
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(10-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

retta AB:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{x - 3}{10 - 3} \rightarrow y - 2 = \frac{x - 3}{7}$$

$$\rightarrow 7y - 14 = x - 3 \rightarrow x - 7y + 11 = 0$$



altitudo CH relativa al lato AB:

$$\overline{CH} = \frac{|6 - 49 + 11|}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{|-32|}{\sqrt{50}} = \frac{32}{5\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{32}{5\sqrt{2}} = 16$$

$$A(-3; 4)$$

$$B(3; 1)$$

$$C(2; 8)$$

$$S = ?$$

$$\det M = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det M = -3 + 8 + 24 - 2 + 24 - 12 = 39$$

$$S = \frac{1}{2} |\det M| = \frac{39}{2}$$

$$A(-4; -2)$$

$$B(-3; -1)$$

$$C(-1; 3)$$

$$S = ?$$

$$\det M = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det M = 4 + 2 - 9 - 1 + 12 - 6 = 2$$

$$S = \frac{1}{2} |\det M| = 1$$

$$8x - 15y - 7 = 0$$

$$3x + 4y - 2 = 0$$

bisectrice ?

$$\frac{|8x - 15y - 7|}{\sqrt{64 + 225}} = \frac{|3x + 4y - 2|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$\frac{|8x - 15y - 7|}{17} = \frac{|3x + 4y - 2|}{5}$$

$$\frac{8x - 15y - 7}{17} = \frac{-3x - 4y + 2}{5}$$

✓

$$\frac{8x - 15y - 7}{17} = \frac{3x + 4y - 2}{5}$$

$$40x - 75y - 35 = -51x - 68y + 34$$

✓

$$40x - 75y - 35 = 51x + 68y - 34$$

$$91x - 7y - 69 = 0$$

✓

$$11x + 143y + 1 = 0$$

Trovare l'incentro (punto incontro delle bisettrici)

$$r) \quad 4x + 5y - 1 = 0$$

$$s) \quad 2x + y - 5 = 0$$

$$t) \quad y = 1 \rightarrow y - 1 = 0$$

incentro?

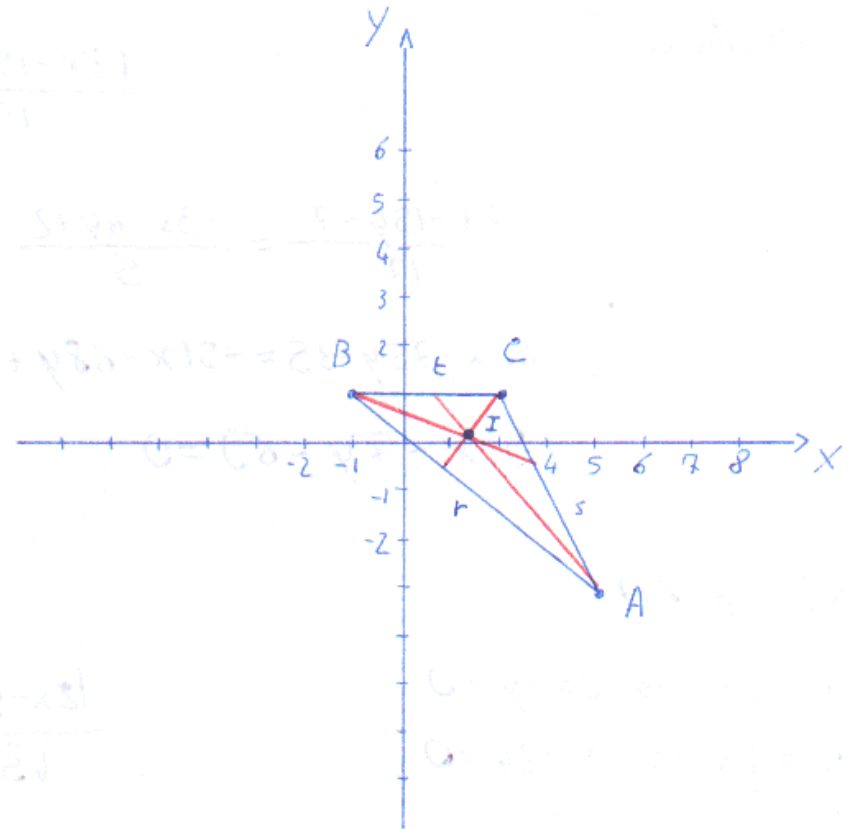
$$A = r \cap s$$

$$\begin{cases} 4x + 5y - 1 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 25 - 10x - 1 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -6x + 24 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \quad A(4; -3)$$

$$B = r \cap t$$

$$\begin{cases} 4x + 5y - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad B(-1; 1)$$



$$c = sn t$$

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad c(2;1)$$

bisectrice di $\widehat{BAC}$:

$$\frac{|4x+5y-1|}{\sqrt{41}} = \frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}}$$

$$4\sqrt{5}x + 5\sqrt{5}y - \sqrt{5} = \pm (2\sqrt{41}x + \sqrt{41}y - 5\sqrt{41})$$

$$(4\sqrt{5} + 2\sqrt{41})x + (5\sqrt{5} + \sqrt{41})y - \sqrt{5} - 5\sqrt{41} = 0$$

bisectrice di $\widehat{ABC}$:

$$\frac{|4x+5y-1|}{\sqrt{41}} = |y-1|$$

$$4x + 5y - 1 = \pm \sqrt{41}(y-1)$$

$$4x + (5 + \sqrt{41})y - 1 - \sqrt{41} = 0$$

bisectrice di $\widehat{BCA}$:

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}} = |y-1|$$

$$2x+y-5 = \pm \sqrt{5}(y-1)$$

$$2x + (1-\sqrt{5})y - 5 + \sqrt{5} = 0$$

Ponendo a sistema le equazioni di due bisettrici, si ottengono le coordinate dell' incentro I :

$$\begin{cases} 4x + (5+\sqrt{41})y - 1 - \sqrt{41} = 0 \\ 2x + (1-\sqrt{5})y - 5 + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

$$(5+\sqrt{41}-2+2\sqrt{5})y - 1 - \sqrt{41} + 10 - 2\sqrt{5} = 0$$

$$y = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{41} - 9}{2\sqrt{5} + \sqrt{41} + 3} = \frac{\sqrt{205} + \sqrt{41} - 5\sqrt{5} - 9}{4} \approx 0,135$$

$$x = \frac{\sqrt{41} - 2\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,465$$

Per verificare che la terza bisettrice passa per I , basta sostituire le coordinate di I nell'equazione della bisettrice e constatare che si ottiene un'identità.

$$\begin{aligned} & (4\sqrt{5} + 2\sqrt{41}) \left(\frac{\sqrt{41} - 2\sqrt{5} + 1}{2} \right) + \\ & + (5\sqrt{5} + \sqrt{41}) \left(\frac{\sqrt{205} + \sqrt{41} - 5\sqrt{5} - 9}{4} \right) + \\ & - \sqrt{5} - 5\sqrt{41} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 1

$$(1-K)x + (1+K)y - 2(K+2) = 0$$

$$\begin{array}{l} K=1 \\ K=-1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2y-6=0 \\ 2x-2=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y=3 \\ x=1 \end{array} \right. \quad C(1;3)$$

$$\textcircled{1} \quad // \quad x-2y+4=0 \rightarrow y=\frac{1}{2}x+2 \quad m=\frac{1}{2}$$

$$\frac{K-1}{K+1} = \frac{1}{2} \rightarrow K \neq -1 \quad 2K-2 = K+1 \rightarrow K=3$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x-y+1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x=y-1 \\ 2y-2-y-1=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array} \right. \quad P(2;3)$$

$$2-2K+3+3K-2K-4=0$$

$$-K+1=0 \rightarrow K=1$$

Esercizio 2

$$(2+m)y - (3-2m)x + 5 - 8m = 0$$

a) centro del fascio

$$\begin{matrix} m = -2 \\ m = \frac{3}{2} \end{matrix} \quad \begin{cases} -7x + 21 = 0 \\ \frac{7}{2}y - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad C(3; 2)$$

b) r: $9y + 5x - 86 = 0$

$$x_A = 10 \quad 9y_A = 86 - 50 \rightarrow y_A = 4 \quad A(10; 4)$$

$$8 + 4m - 30 + 20m + 5 - 8m = 0$$

$$16m - 17 = 0 \quad m = \frac{17}{16}$$

$$\frac{49}{16}y - \frac{14}{16}x - \frac{7}{2} = 0 \rightarrow 7y - 2x - 8 = 0$$

$$c) \quad m_{CA} = \frac{2}{7} \quad m_{\perp} = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{3-2m}{2+m} = -\frac{7}{2} \rightarrow m \neq -2 \quad 6-4m = -14-7m \rightarrow 3m = -20 \rightarrow m = -\frac{20}{3}$$

$$-\frac{14}{3}y - \frac{49}{3}x + \frac{175}{3} = 0 \rightarrow 2y + 7x - 25 = 0$$

$$\begin{cases} 9y + 5x = 86 \\ 2y + 7x = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 9y = 86 \\ 7x + 2y = 25 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 63 = -53 \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 86 & 9 \\ 25 & 2 \end{vmatrix} = 172 - 225 = -53 \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 86 \\ 7 & 25 \end{vmatrix} = 125 - 602 = -477$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1 \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 9 \quad B(1;9)$$

$$d) \quad S_{ABC} = ?$$

$$A(10;4)$$

$$B(1;9)$$

$$C(3;2)$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det M = 90 + 12 + 2 - 27 - 20 - 4 = 104 - 51 = 53$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\det M| = \frac{53}{2}$$

Esercizio 3

$$(2+K)x + (K-1)y + 3-K = 0$$

$$1) \quad 2x - y + 3 + K(x + y - 1) = 0$$

$$2x - y + 3 = 0 \quad 1^{\text{a}} \text{ generatrice}$$

$$x + y - 1 = 0 \quad 2^{\text{a}} \text{ generatrice}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y + 2 - y + 3 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3y = -5 \\ x = -y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad C\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

$$2) \quad A(2;1) \\ B(0;3)$$

$$m_{AB} = -1$$

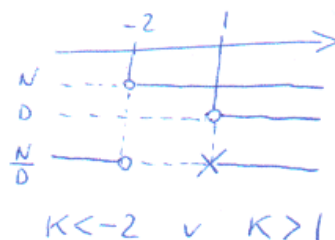
$$-\frac{2+K}{K-1} = -1 \rightarrow K \neq 1 \quad 2+K = K-1 \rightarrow 0K = -3 \quad \text{impossibile}$$

$$y - \frac{5}{3} = -\left(x + \frac{2}{3}\right) \rightarrow 3y - 5 = -3x - 2 \rightarrow 3x + 3y - 3 = 0 \rightarrow x + y - 1 = 0$$

La retta del fascio // alla retta AB è la seconda generatrice del fascio (retta esclusa)

$$3) \quad m < 0$$

$$-\frac{2+K}{K-1} < 0 \rightarrow \frac{2+K}{K-1} > 0$$



4) $O(0;0)$
 $C(2;0)$

retta del fascio passante per O

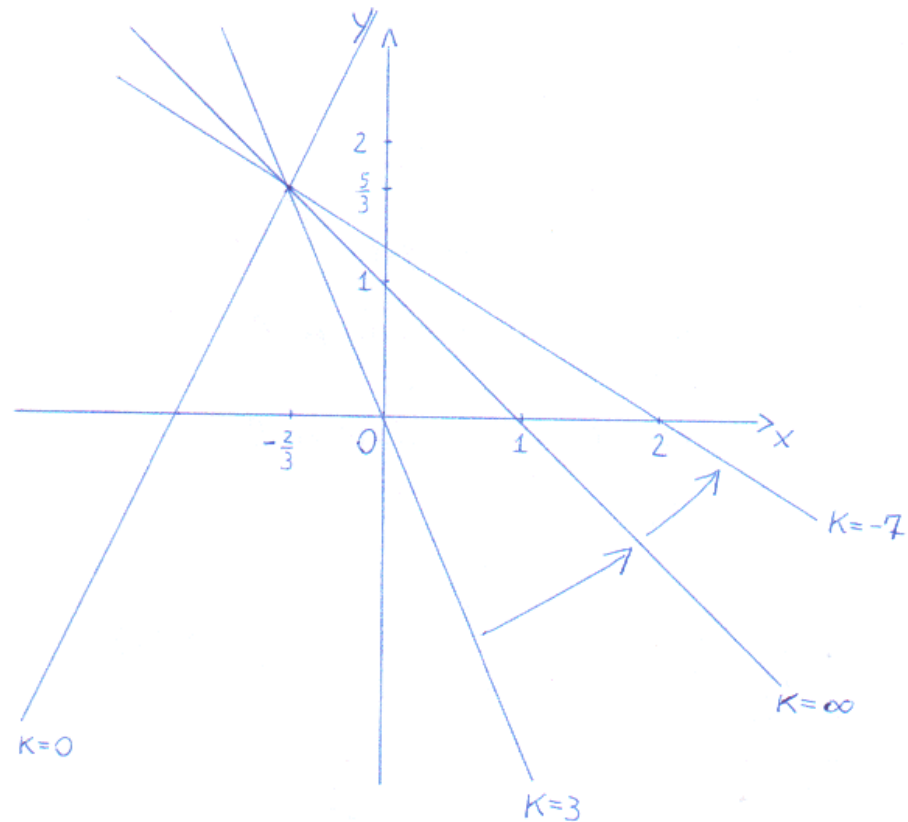
$$3 - K = 0 \rightarrow K = 3$$

retta del fascio passante per C

$$4 + 2K + 3 - K = 0 \rightarrow K = -7$$

Il fascio è orientato in
 senso antiorario

$$K \leq -7 \vee K \geq 3$$



La Parabola

Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate, di direttrice d e che passano per i punti A e B .

$$d: y+2=0 \quad A(2; -\frac{3}{2}) \quad B(4; \frac{1}{2})$$

$$d: 12y-49=0 \quad A(1; 4) \quad B(2; 1)$$

Soluzione

$a \parallel$ asse y

$$d: y+2=0 \quad \text{direttrice}$$

$$\left. \begin{array}{l} A(2; -\frac{3}{2}) \\ B(4; \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \text{punti della parabola}$$

I metodo:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \begin{array}{l} \text{parabola} \\ \text{con asse} \\ \parallel \text{ asse } y \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{3}{2} = 4a + 2b + c & \text{passaggio per } A \\ \frac{1}{2} = 16a + 4b + c & \text{" per } B \\ -\frac{1+\Delta}{4a} = -2 & \text{eq. direttrice} \\ & y = -\frac{1+\Delta}{4a} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -3 = 8a + 4b + 2c \\ 1 = 32a + 8b + 2c \\ 1 + b^2 - 4ac = 8a & a \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c = -3 - 8a - 4b \\ 1 = 32a + 8b - 3 - 8a - 4b \\ 1 + b^2 - 4ac = 8a \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2c = -3 - 8a - 4 + 24a \\ b = 1 - 6a \\ 1 + (1 - 6a)^2 - 4ac = 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c = 16a - 7 \\ b = 1 - 6a \\ 1 + 1 - 12a + 36a^2 - 32a^2 + 14a - 8a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c = 16a - 7 \\ b = 1 - 6a \\ 4a^2 - 6a + 2 = 0 \rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

le equazioni delle parabole
sono:

$$y = x^2 - 5x + \frac{9}{2} \quad \vee$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

II metodo:

eq. retta AB:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y + \frac{3}{2} = x - 2$$

$$y = x - \frac{7}{2}$$

$$y = x - \frac{7}{2} + K(x-2)(x-4)$$

$$y = x - \frac{7}{2} + K(x^2 - 6x + 8)$$

$$y = Kx^2 + (1-6K)x + 8K - \frac{7}{2}$$

$$\Delta = (1-6K)^2 - 4K(8K - \frac{7}{2})$$

$$\Delta = 1 - 12K + 36K^2 - 32K^2 + 14K = 4K^2 + 2K + 1$$

equazione
del fascio di
parabole passanti
per A e per B

direttrice $y = -2$

$$-\frac{1+\Delta}{4a} = -2$$

$$\frac{1+4K^2+2K+1}{4K} = 2 \quad K \neq 0$$

$$4K^2+2K+2 = 8K$$

$$4K^2-6K+2 = 0$$

$$2K^2-3K+1 = 0$$

$$K_1 = 1 \quad \checkmark \quad K_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 - 5x + \frac{9}{2} \quad \checkmark \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

Determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola P condotte dal punto A .

$$P: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{17}{4} \quad A(-2; 0)$$

$$P: x = y^2 - y - 3 \quad A(-1; -2)$$

Soluzione

$$A(-2; 0)$$

fascio proprio di centro A

$$y = m(x+2)$$

$$y = mx + 2m$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{17}{4} \\ y = mx + 2m \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{3}{2} - m\right)x + \frac{17}{4} - 2m = 0$$

$$x^2 + (6 - 4m)x + 17 - 8m = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0$$

$$(3 - 2m)^2 - (17 - 8m) = 0$$

$$9 - 12m + 4m^2 - 17 + 8m = 0$$

$$4m^2 - 4m - 8 = 0$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

rette tangenti:

$$y = -x - 2$$

$$y = 2x + 4$$

$$A(-1; -2)$$

fascio proprio di centro A

$$y+2 = m(x+1)$$

$$y = mx + m - 2$$

$$\begin{cases} x = y^2 - y - 3 \\ y = mx + m - 2 \end{cases}$$

$$x = m^2 x^2 + m^2 + 4 + 2m^2 x - 4mx - 4m - mx - m + 2 - 3$$

$$m^2 x^2 + (2m^2 - 5m - 1)x + m^2 - 5m + 3 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$\cancel{4m^4} + 25m^2 + 1 - \cancel{20m^3} - 4m^2 + 10m - \cancel{4m^4} + \cancel{20m^3} - 12m^2 = 0$$

$$9m^2 + 10m + 1 = 0$$

$$m_1 = -1 \quad \checkmark \quad m_2 = -\frac{1}{9}$$

rette tangenti:

$$y = -x - 3 \quad \checkmark \quad y = -\frac{1}{9}x - \frac{19}{9}$$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate che passa per il punto A e che è tangente in B alla retta di coefficiente angolare m.

$$A(0;1) \quad B(1;2) \quad m=4$$

$$A(0;3) \quad B(2;1) \quad m=-2$$

Soluzione

$$\alpha \parallel \text{asse } y \rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$\left. \begin{array}{l} A(0;1) \\ B(1;2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{punti della} \\ \text{parabola} \end{array}$$

$$m=4 \quad \begin{array}{l} \text{coeff. angolare} \\ \text{della retta tangente in B} \end{array}$$

tangente in B:

$$y - y_B = m(x - x_B)$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 2$$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$

$$ax^2 + (b-4)x + c+2 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$(b-4)^2 - 4a(c+2) = 0$$

$$\begin{cases} 1=c \\ 2=a+b+c \\ (b-4)^2 - 4a(c+2) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{passaggio per A} \\ \text{" " B} \\ \text{condizione di} \\ \text{tangenza} \end{array}$$

$$\begin{cases} c=1 \\ b=1-a \\ (-3-a)^2 - 12a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=1 \\ b=1-a \\ a^2 - 6a + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

a // asse $y \rightarrow y = ax^2 + bx + c$

$A(0;3)$
 $B(2;1)$ } punti della parabola

$m = -2$ coeff. angolare
della retta tangente in B

tangente in B:

$$y - y_B = m(x - x_B)$$

$$y - 1 = -2(x - 2)$$

$$y = -2x + 5$$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

$$ax^2 + (b+2)x + c - 5 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$(b+2)^2 - 4a(c-5) = 0$$

$$\begin{cases} 3 = c \\ 1 = 4a + 2b + c \\ (b+2)^2 - 4a(c-5) = 0 \end{cases}$$

passaggio per A
 " " B
 condizione di
 tangenza

$$\begin{cases} c = 3 \\ b = -2a - 1 \\ (1-2a)^2 + 8a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ b = -2a - 1 \\ 4a^2 + 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse che passa per il punto A e che è tangente in B alla retta perpendicolare alla retta t.

$$A(-1; 2) \quad B\left(-\frac{17}{9}; \frac{2}{3}\right) \quad t: 4x + 3y + 1 = 0$$

$$A(-1; 3) \quad B\left(\frac{5}{3}; 1\right) \quad t: 4x + 3y - 1 = 0$$

Soluzione

retta perpendicolare a t
passante per B:

$$m_t = -\frac{4}{3} \rightarrow m_{\perp} = \frac{3}{4}$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \left(x + \frac{17}{9}\right)$$

$$4y - \frac{8}{3} = 3x + \frac{17}{3}$$

$$3x - 4y + \frac{25}{3} = 0$$

$$9x - 12y + 25 = 0$$

condizione di tangenza:

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ 9x - 12y + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12y - 25 = 9ay^2 + 9by + 9c \\ x = \frac{12y - 25}{9} \end{cases}$$

eq. risolvente:

$$9ay^2 + (9b - 12)y + 9c + 25 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$(9b - 12)^2 - 36a(9c + 25) = 0$$

$$(3b - 4)^2 - 4a(9c + 25) = 0$$

$$\begin{cases} -1 = 4a + 2b + c & \text{passaggio per A} \\ -\frac{17}{9} = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c & \text{" " B} \\ (3b-4)^2 - 4a(9c+25) = 0 & \text{condizione di tangenza} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ -17 = 4a + 6b - 9 - 36a - 18b \\ (3b-4)^2 - 4a(9c+25) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ 32a + 12b - 8 = 0 \\ (3b-4)^2 - 4a(9c+25) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ 3b = 2 - 8a \\ (-2-8a)^2 - 4a(9c+25) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - \frac{4}{3} + \frac{16}{3}a \\ b = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}a \\ 4 + 32a + 64a^2 - 100a - 36ac = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{4}{3}a - \frac{7}{3} \\ b = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}a \\ 64a^2 - 68a + 4 - 48a^2 + 84a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{4}{3}a - \frac{7}{3} \\ b = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}a \\ 16a^2 + 16a + 4 = 0 \rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$X = -\frac{1}{2}y^2 + 2y - 3$$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate di vertice V e che è tangente alla retta t .

$$V(3; \frac{7}{2})$$

$$t: y = x + 1$$

Soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$x + 1 = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + (b-1)x + c-1 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (b-1)^2 - 4a(c-1) = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 & a \neq 0 \\ \frac{7}{2} = 9a + 3b + c \\ (b-1)^2 - 4a(c-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -6a \\ \frac{7}{2} = -9a + c \\ (-6a-1)^2 - 4a(9a + \frac{7}{2} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -6a \\ c = 9a + \frac{7}{2} \\ 36a^2 + 12a + 1 - 36a^2 - 10a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -6a \\ c = 9a + \frac{7}{2} \\ 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$$

Determina le equazioni delle parabole, con asse x , che passano per il punto A e che sono tangenti alla retta t .

$$A(-5;2)$$

$$t: x+4y-4=0$$

$$a: y=-1$$

Soluzione

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$ay^2 + (b+4)y + c-4 = 0$$

$$(b+4)^2 - 4a(c-4) = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ -5 = 4a + 2b + c \\ (b+4)^2 - 4a(c-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ c = -5 - 8a \\ (2a+4)^2 - 4a(-9-8a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ c = -8a - 5 \\ 4a^2 + 16a + 16 + 32a^2 + 36a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ c = -8a - 5 \\ 36a^2 + 52a + 16 = 0 \rightarrow 9a^2 + 13a + 4 = 0 \end{cases}$$

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{18} = \begin{cases} - \\ + \end{cases} \begin{cases} -1 \\ -\frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

✓

$$\begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -\frac{8}{9} \\ c = -\frac{13}{9} \end{cases}$$

$$X = -y^2 - 2y + 3$$

$$X = -\frac{4}{9}y^2 - \frac{8}{9}y - \frac{13}{9}$$

PROBLEMA

In un riferimento cartesiano ortogonale è dato il fascio di parabole di equazione

$$y = 4ax^2 - 2(3a+1)x + 2a+5$$

- Determina i punti base del fascio;
- determina l'equazione della parabola che passa per l'origine degli assi;
- determina le equazioni delle parabole Γ_1 e Γ_2 del fascio che hanno il vertice sulla retta $t: 4x - y - 1 = 0$;
- indicata con Γ_1 la parabola a cui corrisponde il minore dei due valori del parametro a , determina le tangenti a Γ_1 condotte per i punti base del fascio;
- indicato con D il punto di intersezione di dette tangenti, determina l'area del triangolo ABD essendo A e B i punti base del fascio.

Soluzione

②

punti base

$$y = -2x + 5 + a(4x^2 - 6x + 2)$$

$$2x + y - 5 = 0$$

1^a generatrice

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

2^a generatrice

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} - \\ + \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$A\left(\frac{1}{2}; 4\right)$$

$$B(1; 3)$$

⑥ eq. della parabola del fascio che passa per l'origine degli assi

$$c=0 \rightarrow 2a+5=0 \rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

$$y = -10x^2 + 13x$$

③ eq. delle parabole del fascio che hanno vertice sulla retta

$$t: 4x - y - 1 = 0$$

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{-2(3a+1)}{2(4a)} = \frac{3a+1}{4a}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4(9a^2 + 6a + 1) - 4(8a^2 + 20a) = 4(a^2 - 14a + 1)$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{\cancel{4}(a^2 - 14a + 1)}{\cancel{4}(4a)} = -\frac{a^2 - 14a + 1}{4a}$$

$$V \in t \rightarrow 4x_v - y_v - 1 = 0$$

$$\frac{12a+4}{4a} + \frac{a^2-14a+1}{4a} - \frac{4a}{4a} = 0 \quad a \neq 0$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad a_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 = \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}$$

$$a = 1$$

$$\Gamma_1: y = 4x^2 - 8x + 7$$

$$V_1(1; 3)$$

$$a = 5$$

$$\Gamma_2: y = 20x^2 - 32x + 15$$

$$V_2\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

④

$$\Gamma_1 : y = 4x^2 - 8x + 7$$

$$A\left(\frac{1}{2}; 4\right)$$

$$4x^2 - 8x - y + 7 = 0$$

$$x^2 \rightarrow x_0 x = \frac{1}{2}x$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}(x + x_0) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$y \rightarrow \frac{1}{2}(y + y_0) = \frac{1}{2}y + 2$$

$$2x - 4x - 2 - \frac{1}{2}y - 2 + 7 = 0$$

$$-2x - \frac{1}{2}y + 3 = 0$$

$$4x + y - 6 = 0$$

retta tangente alla
parabola Γ_1 in A

$$B(1; 3)$$

$$4x^2 - 8x - y + 7 = 0$$

$$x^2 \rightarrow x_0 x = x$$

$$x \rightarrow \frac{x+1}{2}$$

$$y \rightarrow \frac{y+3}{2}$$

$$4x - 4x - 4 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} + 7 = 0$$

$$-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 0$$

$$y - 3 = 0$$

retta tangente alla
parabola Γ_1 in B

e

$$D \quad \begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 3 \end{cases} \quad D\left(\frac{3}{4}; 3\right)$$

area del triangolo ABD:

$$A\left(\frac{1}{2}; 4\right)$$

$$B(1; 3)$$

$$D\left(\frac{3}{4}; 3\right)$$

$$\overline{BD} = |x_D - x_B| = \frac{1}{4}$$

$$\text{eq. retta BD} : y = 3$$

$$d(A; \text{retta BD}) = \frac{|4-3|}{\sqrt{1}} = 1$$

$$\text{area } S = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot d(A; \text{retta BD})$$

$$S = \frac{1}{8}$$

La Circonferenza

$$r) \quad x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

$$P(1; -2) \in \gamma \quad \text{se } x=1 \quad \text{e } y=-2 \quad \text{allora}$$

$$1 + 4 - 2 - 2 - 1 = 0$$

equazione della tangente alla circonferenza nel punto P

formule di sovrappiamento

$$x^2 \rightarrow x_0 x$$

$$y^2 \rightarrow y_0 y$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}(x + x_0)$$

$$y \rightarrow \frac{1}{2}(y + y_0)$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = -2$$

$$x - 2y - 2 \cdot \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(y-2) - 1 = 0$$

$$x - 2y - x - 1 + \frac{1}{2}y - 1 - 1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}y - 3 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}y + 1 = 0 \rightarrow y = -2$$

$$C(3;1)$$

t) $3x + 4y + 7 = 0$ retta tangente alla circonferenza

$$r = d(C; t) = \frac{|9 + 4 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$$

$$y = mx + 1 \quad (t)$$

determinare m in modo che la retta risulti tangente alla circonferenza

I metodo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y - 2 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

eq. risolvente

$$x^2 + m^2 x^2 + 2mx + 1 - 3x + 4mx + 4 - 2 = 0$$

$$(1+m^2)x^2 + (6m-3)x + 3 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$(6m-3)^2 - 12(1+m^2) = 0$$

$$36m^2 - 36m + 9 - 12 - 12m^2 = 0$$

$$24m^2 - 36m - 3 = 0$$

$$8m^2 - 12m - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 + 8 = 44 \quad m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{8} = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{4}$$

II metodo

$$mx - y + 1 = 0$$

eq. retta in forma implicita

$C(\frac{3}{2}; -2)$ centro della circonferenza

$$r = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 2} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$d(C; t) = r \rightarrow \frac{|\frac{3}{2}m + 2 + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$|3m + 6| = \sqrt{33m^2 + 33}$$

$$9m^2 + 36m + 36 = 33m^2 + 33$$

$$24m^2 - 36m - 3 = 0$$

$$8m^2 - 12m - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 + 8 = 44$$

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{8} = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{4}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

eq. risolvente $\rightarrow x^2 + m^2 x^2 - 6x - 2mx + 9 = 0$
 $(m^2 + 1)x^2 - 2(3 + m)x + 9 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} > 0 \rightarrow \text{retta secante}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow \text{retta tangente}$$

$$\frac{\Delta}{4} < 0 \rightarrow \text{retta esterna}$$

$$\frac{\Delta}{4} = (3 + m)^2 - 9(m^2 + 1)$$

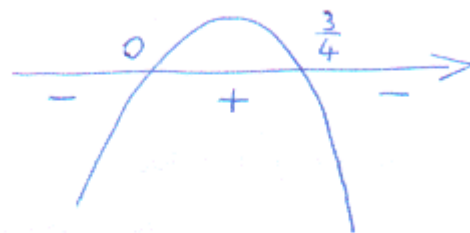
$$\frac{\Delta}{4} = m^2 + 6m + 9 - 9m^2 - 9$$

$$\frac{\Delta}{4} = -8m^2 + 6m$$

$$-8m^2 + 6m = 0$$

$$-2m(4m - 3) = 0$$

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{3}{4}$$



tangente per $m = 0 \vee m = \frac{3}{4}$

secante per $0 < m < \frac{3}{4}$

esterna per $m < 0 \vee m > \frac{3}{4}$

equazione circonferenza

tangente all'asse x

centro in $C(-3;2)$

$$y=0 \quad \text{eq. asse } x$$

$$d(C; \text{asse } x) = r$$

$$r=2$$

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$$

equazione delle circonferenze

tangenti all'asse y in $T(0;-3)$

$$r=4$$

$$(t) \quad x=0 \quad \text{eq. asse } y$$

$y=-3$ retta passante per T e per C

$$C(x; -3)$$

$$d(C; t) = r$$

$$|x| = 4 \rightarrow x = \pm 4$$

$$C_1(-4; -3)$$

$$C_2(4; -3)$$

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 16$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$A(1;0)$$

$$B(2;1)$$

$$C(-2;-1)$$

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \\ 5 + 2a + b + c = 0 \\ 5 - 2a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + a + 1 = 0 \\ 4a + 2b = 0 \\ 10 + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -c - 1 \\ b = -2a \\ c = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$(r) \quad x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x = 0$$

$$C_1(3;0) \quad r_1 = 3$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 33 = 0$$

$$C_2(7;0) \quad r_2 = 4$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x + 33 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 33 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{33}{8} \\ y^2 = \frac{495}{64} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{33}{8} \\ y = \pm \frac{3\sqrt{55}}{8} \end{cases}$$

$$A\left(\frac{33}{8}; -\frac{3\sqrt{55}}{8}\right)$$

$$B\left(\frac{33}{8}; \frac{3\sqrt{55}}{8}\right)$$

$$C_2(7;0)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

tangenti condotte
dal punto $P(6;1)$?

$$y-1 = m(x-6) \quad \text{fascio proprio di centro } P$$

$$y = mx - 6m + 1$$

$$mx - y - 6m + 1 = 0 \quad (L)$$

$C(-1;0)$ centro della circonferenza

$$r = \sqrt{5} \quad \text{raggio} \quad " \quad "$$

$$d(C; L) = r$$

$$\frac{|-m - 6m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5} \rightarrow |-7m + 1| = \sqrt{5m^2 + 5}$$

$$49m^2 - 14m + 1 = 5m^2 + 5$$

$$44m^2 - 14m - 4 = 0$$

$$22m^2 - 7m - 2 = 0 \quad \Delta = 49 + 176 = 225 = 15^2$$

$$m_{1,2} = \frac{7 \pm 15}{44} = \begin{cases} -\frac{2}{11} \\ +\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$m = -\frac{2}{11}$$

$$-\frac{2}{11}x - y + \frac{12}{11} + 1 = 0 \rightarrow -2x - 11y + 23 = 0 \rightarrow 2x + 11y - 23 = 0$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - y - 3 + 1 = 0 \rightarrow x - 2y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

tangenti condotte dall'origine?

I metodo

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

eq. risolvente

$$x^2 + m^2 x^2 - 2x - 4mx + 1 = 0$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(1 + 2m)x + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0$$

$$(1 + 2m)^2 - (m^2 + 1) = 0$$

$$1 + 4m + 4m^2 - m^2 - 1 = 0$$

$$3m^2 + 4m = 0$$

$$m_1 = 0 \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} y = 0 & & y = -\frac{4}{3}x \\ & & 4x + 3y = 0 \end{aligned}$$

II metodo

$$(t) \quad mx - y = 0 \quad \text{fascio proprio}$$

$$C(1; 2) \quad \text{centro della circonferenza}$$

$$r = \sqrt{1 + 4 - 1} = 2 \quad \text{raggio}$$

$$d(C; t) = r$$

$$\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \quad \rightarrow \quad |m-2| = 2\sqrt{m^2+1}$$

$$m^2 - 4m + 4 = 4m^2 + 4$$

$$4m^2 - m^2 + 4m = 0 \quad \rightarrow \quad 3m^2 + 4m = 0$$

$$m_1 = 0 \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

$$y = 0 \quad 4x + 3y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

tangenti condotte
dal punto $P(6;1)$?

$$y-1 = m(x-6)$$

fascio proprio di centro P

$$y = mx - 6m + 1$$

$$mx - y - 6m + 1 = 0 \quad (t)$$

$C(-1; 0)$ centro della circonferenza

$r = \sqrt{5}$ raggio " "

$$d(C; t) = r$$

$$\frac{|-m - 6m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5} \rightarrow |-7m + 1| = \sqrt{5m^2 + 5}$$

$$49m^2 - 14m + 1 = 5m^2 + 5$$

$$44m^2 - 14m - 4 = 0$$

$$22m^2 - 7m - 2 = 0$$

$$\Delta = 49 + 176 = 225 = 15^2$$

$$m_{1,2} = \frac{7 \pm 15}{44} = \begin{matrix} - & -\frac{2}{11} \\ + & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$O(0;0)$$

$$A(1;2)$$

$$B(-1;3)$$

circonferenza passante
per O , A e B ?

tangenti alla
circonferenza condotte
dal punto $P(0;-2)$?

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} c=0 \\ 5+a+2b=0 \\ 10-a+3b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 15+5b=0 \\ a=10+3b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-3 \\ a=1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + x - 3y = 0$$

$$C\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right) \quad \text{centro della circonferenza}$$

$$r = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{raggio della circonferenza}$$

$$y - y_p = m(x - x_p) \quad \text{fascio proprio di centro } P$$

$$y + 2 = mx$$

$$mx - y - 2 = 0 \quad \text{retta } (t)$$

continua

$$d(c; t) = r$$

$$\frac{\left| -\frac{1}{2}m - \frac{3}{2} - 2 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$|-m - 7| = \sqrt{10m^2 + 10}$$

$$m^2 + 14m + 49 = 10m^2 + 10$$

$$9m^2 - 14m - 39 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 49 + 351 = 400 = 20^2$$

$$m_{1,2} = \frac{7 \pm 20}{9} = \begin{cases} - \\ + \end{cases} \begin{matrix} -\frac{13}{9} \\ 3 \end{matrix}$$

$$m = -\frac{13}{9}$$

$$y = -\frac{13}{9}x - 2$$

$$m = 3$$

$$y = 3x - 2$$

Dopo aver tracciato le due circonferenze:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$$

$$\mathcal{C}': x^2 + y^2 - 6x = 0$$

determinare:

- le equazioni delle tangenti comuni;
- le coordinate dei punti A e A' di tangenza con $\mathcal{C}$ e B e B' di tangenza con $\mathcal{C}'$;
- l'area del trapezio $AA'B'B$.

- a) La circonferenza $\mathcal{C}$ ha centro nell'origine e raggio 1, la circonferenza $\mathcal{C}'$ ha centro in $C(3; 0)$ e raggio 3. Le due circonferenze sono secanti e i loro centri appartengono all'asse x , perciò le tangenti comuni sono due e si intersecano in un punto O' di tale asse.

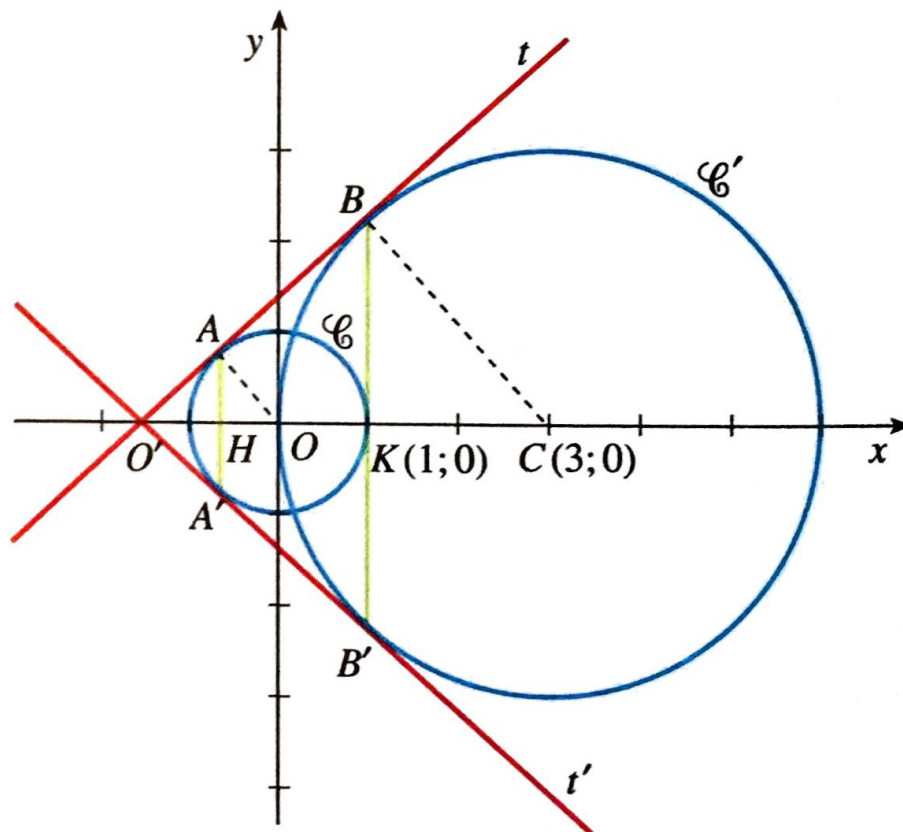
Sia $O'(\alpha; 0)$; dalla similitudine dei triangoli rettangoli $O'OA$ e $O'CB$ si ricava che, essendo $CB = 3OA$:

$$\overline{O'C} = 3 \overline{O'O}$$

da cui:

$$3 - \alpha = -3\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

Dunque $O'\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.



Le tangenti comuni sono le due rette del fascio di centro O' :

$$y = m \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

che distano 1 dall'origine; quindi deve essere:

$$\frac{\left| \frac{3}{2}m \right|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \Rightarrow \frac{9}{4}m^2 = 1+m^2 \Rightarrow m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Pertanto le tangenti comuni hanno equazioni:

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

b) Per determinare le coordinate dei punti di tangenza A e A' , si può risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \left(x + \frac{3}{2} \right) \end{cases}$$

oppure applicare il 1° teorema di Euclide al triangolo rettangolo $O'OA$:

$$\overline{AO}^2 = \overline{O'O} \cdot \overline{HO} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} \cdot \overline{HO} \Rightarrow \overline{HO} = \frac{2}{3}$$

Perciò $H\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ e l'ordinata di A è:

$$\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Pertanto le coordinate di A e A' sono:

$$A\left(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \quad A'\left(-\frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

L'ordinata di B è tripla dell'ordinata di A ; indicata con K la proiezione di B sull'asse x , si ha, applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{CK} = \sqrt{9 - 5} = 2$$

Pertanto $x_B = \overline{OK} = 1$ e le coordinate di B e B' sono:

$$B(1; \sqrt{5}) \quad B'(1; -\sqrt{5})$$

Il trapezio $AA'B'B$ ha basi $\overline{AA'} = 2\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{BB'} = 2\sqrt{5}$ e altezza $\overline{HK} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; pertanto l'area è:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(2\frac{\sqrt{5}}{3} + 2\sqrt{5} \right) \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{9} \sqrt{5}$$

Dopo aver studiato la natura del fascio di circonferenze:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - 12x - 4(1 + k)y = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

determinare il valore di k per cui si ottiene:

- a) la circonferenza passante per $B(-1; -1)$;*
- b) la circonferenza tangente nell'origine alla retta $r: 3x + 2y = 0$;*
- c) la circonferenza che ha il centro sulla retta $s: x + y + 4 = 0$;*
- d) la circonferenza che ha raggio uguale a $\sqrt{5}$.*

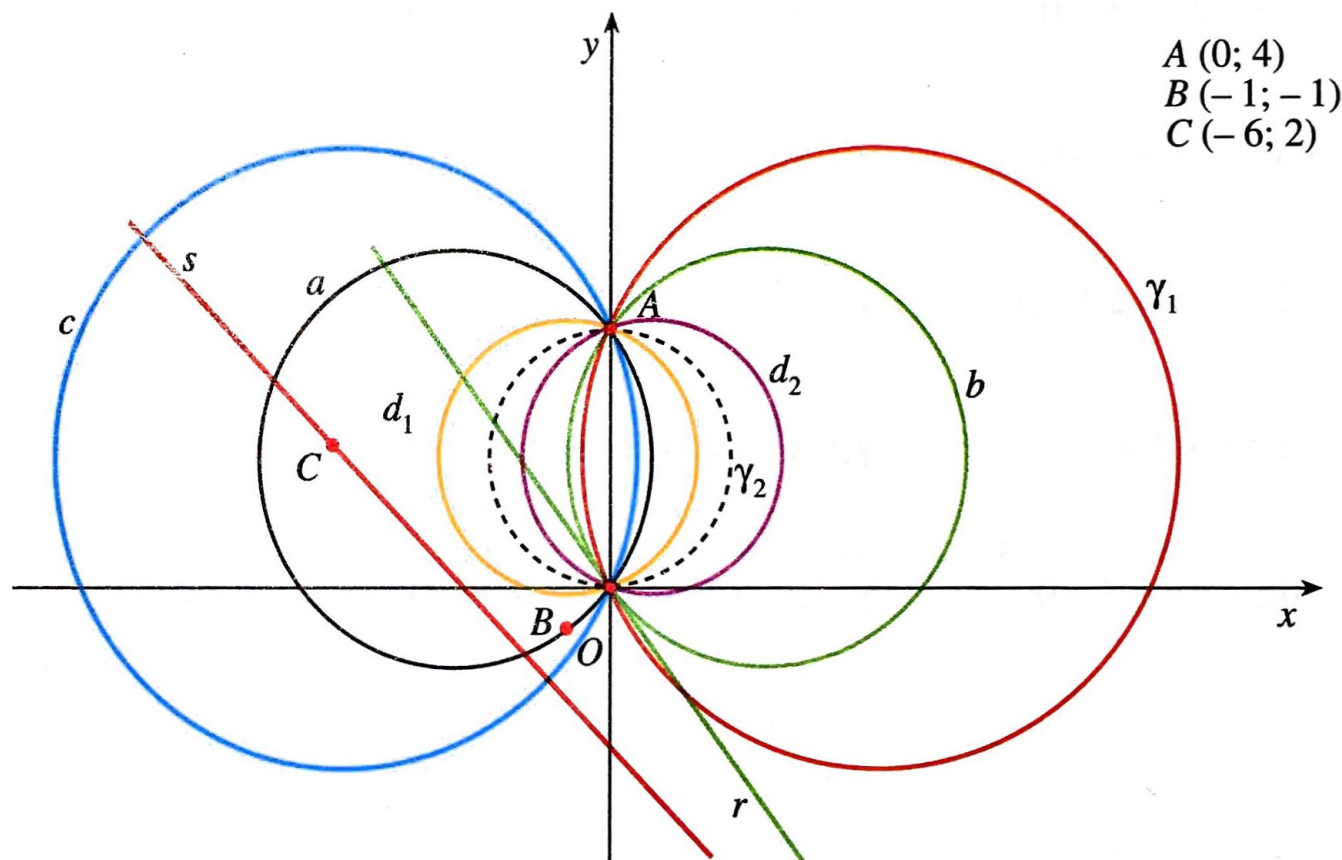
Scritta l'equazione nella forma:

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + k(x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

si osserva che il fascio è generato dalle circonferenze:

- $\gamma_1: x^2 + y^2 - 12x - 4y = 0$ che si ottiene per $k = 0$
- $\gamma_2: x^2 + y^2 - 4y = 0$ che non fa parte del fascio

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle circonferenze generatrici si ottengono i punti $O(0; 0)$ e $A(0; 4)$; pertanto l'equazione data rappresenta $\forall k \neq -1$ il fascio di circonferenze secanti, avente i punti O e A come punti base e per asse radicale l'asse y .



a) La circonferenza passante per il punto $B(-1; -1)$ si ottiene imponendo la condizione:

$$(1 + k)(-1)^2 + (1 + k)(-1)^2 - 12(-1) - 4(1 + k)(-1) = 0$$

soddisfatta dal valore $k = -3$, che sostituito nell'equazione del fascio fornisce l'equazione:

$$a: x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$$

b) La retta tangente nell'origine alla circonferenza generica del fascio, determinata per esempio mediante la formula di sdoppiamento (vedi *Osservazione 3*, par. 3), ha equazione:

$$3x + (1 + k)y = 0$$

quindi deve essere $1 + k = 2$, cioè $k = 1$ affinché coincida con la retta $r: 3x + 2y = 0$. Sostituendo tale valore di k nell'equazione [*], si ottiene la circonferenza:

$$b: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

c) Imponiamo che il centro della circonferenza del fascio di coordinate:

$$C\left(\frac{6}{1+k}; 2\right) \quad (k \neq -1)$$

appartenga alla retta $s: x + y + 4 = 0$, cioè che risulti:

$$\frac{6}{1+k} + 2 + 4 = 0 \Rightarrow k = -2$$

La circonferenza corrispondente ha equazione:

$$c: x^2 + y^2 + 12x - 4y = 0$$

d) Imponiamo che il raggio della circonferenza generica sia uguale a $\sqrt{5}$, ottenendo:

$$\sqrt{\left(\frac{6}{1+k}\right)^2 + 4} = \sqrt{5}$$

Elevando al quadrato e svolgendo i calcoli, l'equazione diventa $(1+k)^2 = 36$, da cui i due casi:

- $1 + k = 6 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow d_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
- $1 + k = -6 \Rightarrow k = -7 \Rightarrow d_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

L'Elisse

ellipse: $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

r: $y = 2x + 1$

$$A \cap B: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + 4(4x^2 + 4x + 1) - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + 16x^2 + 16x + 4 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 17x^2 + 16x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{16}{17} \\ y_2 = -\frac{15}{17} \end{cases}$$

vertex A_1 :

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$a^2 = 4$$

$$b^2 = 1$$

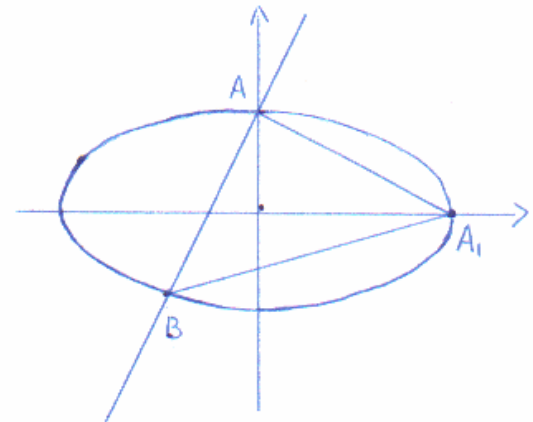
$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$A(0; 1)$$

$$B(-\frac{16}{17}; -\frac{15}{17})$$

$$A_1(2; 0)$$



Area ABA_1 :

$$\overline{AB} = \frac{16}{17}\sqrt{5}$$

$$d(A_1, r) = \frac{|4+1|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot d(A_1, r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{17} \sqrt{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{40}{17}$$

ellisse riferita al centro e agli assi

$$P(-2; 3)$$

tangente in P alla retta // a

quella di equazione $2x - y + 4325 = 0$

$$y = 2x + K$$

$$3 = -4 + K \rightarrow K = 7$$

$y = 2x + 7$ retta tangente all'ellisse
in P

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{-2x}{a^2} + \frac{3y}{b^2} = 1$$

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{3y}{b^2} + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} = \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{b^2} = -\frac{1}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 21 \end{cases}$$

$$y = 2x + 7$$

$$2x - y + 7 = 0$$

$$\frac{2}{7}x - \frac{y}{7} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{21} = 1 \rightarrow 3x^2 + y^2 - 21 = 0$$

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3-m} = 1 \quad m \in \mathbb{R}$$

a)

$$\begin{aligned} a^2 &= m & a^2 > 0 &\rightarrow m > 0 \\ b^2 &= 3-m & b^2 > 0 &\rightarrow 3-m > 0 \rightarrow m < 3 \end{aligned}$$

l'equazione rappresenta un'ellisse per $0 < m < 3$

$$a^2 = b^2 \quad m = 3-m \rightarrow 2m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

Si ha una circonferenza per $m = \frac{3}{2}$

b)

$$\begin{cases} a^2 > 0 \\ b^2 > 0 \\ b^2 > a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 3-m > 0 \\ 3-m > m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 3 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$$

L'ellisse ha i fuochi sull'asse y per $0 < m < \frac{3}{2}$

c)

$$F(0;1)$$

$$c^2 = b^2 - a^2 = 3-m-m = 3-2m$$

$$c=1 \rightarrow c^2=1 \rightarrow 3-2m=1 \rightarrow -2m=-2 \rightarrow m=1$$

L'ellisse ha un fuoco nel punto $F(0;1)$ per $m=1$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 16 - 4y^2 \\ 16 - 3y^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 16 - 4y^2 \\ 3y^2 = \frac{39}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 16 - 4 \cdot \frac{13}{4} \\ y^2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\left(\pm \sqrt{3}; \frac{\sqrt{13}}{2} \right) \text{ e } \left(\pm \sqrt{3}; -\frac{\sqrt{13}}{2} \right)$$

ellisse

$$F_1 (6;0)$$

$$F_2 (0;0)$$

$$a = 4$$

$$2c = \overline{F_1 F_2} = 6$$

$$c = 3$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 7$$

$C (3;0)$ il centro dell'ellisse
è il punto medio
di $F_1 F_2$

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

$$7(x^2 - 6x + 9) + 16y^2 = 112$$

$$7x^2 + 16y^2 - 42x - 49 = 0$$

ellisse riferita al centro e agli assi

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 15$$

focchi sull'asse x

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow c^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{2}a^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}a^2 \\ a^2 + b^2 = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{3}{2}a^2 = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 5 \\ a^2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{equazione dell'ellisse: } \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1 \rightarrow x^2 + 2y^2 = 10$$

retta tangente all'ellisse nel suo punto di ascissa 2 appartenente al 1° quadrante

$$\begin{cases} x=2 \\ x^2 + 2y^2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \quad T(2; \sqrt{3})$$

formule di sdoppiamento

$$x^2 \rightarrow x_0 x = 2x$$

$$y^2 \rightarrow y_0 y = \sqrt{3} y$$

$$\text{tangente: } 2x + 2\sqrt{3}y - 10 = 0$$

$$x + y\sqrt{3} - 5 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$P(3;2) \in \text{ellisse}$

l'ellisse è tangente in P

alla retta di coefficiente
angolare $-\frac{3}{8}$

retta tangente in P :

$$y - y_p = -\frac{3}{8} (x - x_p)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{8} (x - 3)$$

$$8y - 16 = -3x + 9$$

$$3x + 8y - 25 = 0 \quad (*)$$

formule di sdoppiamento:

$$x^2 \rightarrow x_0 x = 3x$$

$$y^2 \rightarrow y_0 y = 2y$$

$$\text{tangente in } P: \quad \frac{3}{a^2} x + \frac{2}{b^2} y = 1 \quad (**)$$

$(*)$ e $(**)$ sono rette coincidenti

$$(*) \quad 3x + 8y = 25 \rightarrow \frac{3}{25} x + \frac{8}{25} y = 1$$

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} = \frac{3}{25} \\ \frac{2}{b^2} = \frac{8}{25} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 35 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3(4x^2 - 28x + 49) - 35 = 0 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 12x^2 - 84x + 147 - 35 = 0 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x^2 - 84x + 112 = 0 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Area del triangolo avente per vertici:

$$A(2;3)$$

$$B(4;-1)$$

$$O(0;0)$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det M = -2 - 12 = -14$$

$$S = \frac{1}{2} |\det M| = 7$$

ellisse

C (-1;2) centro

A (3;2)
B (-1;4) } vertici

$$a = \overline{AC} = 4$$

$$b = \overline{BC} = 2$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4(y^2 - 4y + 4) = 16$$

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1 = 0$$

ellisse

assi di simmetria $\begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$

eccentricità $e = \frac{4}{5}$

B (-2;3) estremo dell'asse
minore

C (-2;0) centro dell'ellisse

b = $\overline{BC}$ = 3 semiasse minore

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = e \\ a^2 - c^2 = b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \\ a^2 - c^2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = \frac{4}{5}a \\ a^2 - \frac{16}{25}a^2 = 9 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c = \frac{4}{5}a \\ \frac{9}{25}a^2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = \frac{4}{5}a \\ a^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$9(x^2 + 4x + 4) + 25y^2 = 225$$

$$9x^2 + 25y^2 + 36x - 189 = 0$$

ellisse

$$F_1(-3; -1)$$

$$F_2(5; -1)$$

A(4; 0) punto dell'ellisse

retta tangente all'ellisse
nel punto A ?

C(1; -1) centro

$$c = \overline{CF_1} = 4 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1 \quad A \in \text{ellisse} \rightarrow \frac{3^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 + b^2 \\ 9b^2 + 16 + b^2 = 16b^2 + b^4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 + b^2 \\ b^4 + 6b^2 - 16 = 0 \end{cases} \rightarrow b^2 = -3 \pm 5 = \begin{matrix} -8 \\ 2 \end{matrix} \text{ non accett.}$$

$$\begin{cases} a^2 = 18 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + 9(y^2 + 2y + 1) = 18$$
$$x^2 + 9y^2 - 2x + 18y - 8 = 0$$

formule di sviluppo

$$x^2 \rightarrow x_0 x = 4x$$

$$y^2 \rightarrow y_0 y = 0$$

$$x \rightarrow \frac{x+x_0}{2} = \frac{x+4}{2}$$

$$y \rightarrow \frac{y+y_0}{2} = \frac{y}{2}$$

$$A(4; 0) \quad x_0 = 4 \quad y_0 = 0$$

retta tangente in A:

$$4x - x - 4 + 9y - 8 = 0$$

$$3x + 9y - 12 = 0$$

$$x + 3y - 4 = 0$$

L'iperbole

$$P(2;3)$$

$$Q(1;-1)$$

equazione iperbole?

$$y = K$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{41}{2}}$$

$$K = ?$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} = \alpha$$

$$\frac{1}{b^2} = \beta$$

equazione di un'iperbole riferita al centro e agli assi di simmetria con i fuochi sull'asse x

$$\begin{cases} 4\alpha - 9\beta = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\beta + 4 - 9\beta = 1 \\ \alpha = \beta + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5\beta = -3 \\ \alpha = \beta + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{3}{5} \\ \alpha = \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\frac{8}{5}x^2 - \frac{3}{5}y^2 = 1$$

$$8x^2 - 3y^2 = 5$$

$$\begin{cases} y = K \\ 8x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = K \\ 8x^2 = 3K^2 + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = K \\ x^2 = \frac{3K^2 + 5}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = K \\ x = \pm \sqrt{\frac{3K^2 + 5}{8}} \end{cases}$$

$$A\left(-\sqrt{\frac{3K^2 + 5}{8}}; K\right)$$

$$B\left(\sqrt{\frac{3K^2 + 5}{8}}; K\right)$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{\frac{3K^2 + 5}{8}} = \sqrt{\frac{3K^2 + 5}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3K^2 + 5}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}} \rightarrow 3K^2 + 5 = 41 \rightarrow 3K^2 = 36 \rightarrow K^2 = 12 \rightarrow K = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ asintoti}$$

$$\overline{P_1 P_2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \rightarrow a^2 = 3b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow x^2 - 3y^2 = 3b^2$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 3b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 + 6y + 9 - 3y^2 = 3b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3y^2 - y^2 - 6y + 3b^2 - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 2y^2 - 6y + 3b^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$P_1 \left(\frac{9 - \sqrt{27 - 6b^2}}{2}; \frac{3 - \sqrt{27 - 6b^2}}{2} \right)$$

$$P_2 \left(\frac{9 + \sqrt{27 - 6b^2}}{2}; \frac{3 + \sqrt{27 - 6b^2}}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 6b^2 + 18 = 27 - 6b^2$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{27 - 6b^2}}{2}$$

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{2} \sqrt{27 - 6b^2} \rightarrow \cancel{\sqrt{2}} \sqrt{27 - 6b^2} = 5\cancel{\sqrt{2}}$$

$$27 - 6b^2 = 25$$

$$6b^2 = 2 \rightarrow b^2 = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \boxed{x^2 - 3y^2 = 1}$$

circonferenza $\begin{cases} C(0;0) \\ r=8\sqrt{10} \end{cases}$

iperbole: $16x^2 - 25y^2 = 400$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 640 \\ 16x^2 - 25y^2 = 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 640 - x^2 \\ 16x^2 - 16000 + 25x^2 = 400 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y^2 = 640 - x^2 \\ 41x^2 = 16400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 240 \\ x^2 = 400 \end{cases}$$

$$(\pm 20; 4\sqrt{15}) \quad \text{e} \quad (\pm 20; -4\sqrt{15})$$

iperbole $5x^2 - 3y^2 = 15$

$P(0; -1)$

fascio proprio di centro P : $y + 1 = mX \rightarrow y = mX - 1$

$$\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = 15 \\ y = mX - 1 \end{cases} \rightarrow \text{eq. risolvibile}$$

$$5x^2 - 3(m^2x^2 - 2mx + 1) = 15$$

$$5x^2 - 3m^2x^2 + 6mx - 3 - 15 = 0$$

$$(5 - 3m^2)x^2 + 6mx - 18 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 9m^2 + 90 - 54m^2 = 0 \rightarrow 45m^2 = 90$$

$$m^2 = 2 \rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

$$y = \pm\sqrt{2}x - 1 \quad \text{rette tangenti}$$

iperbole $3x^2 - 4y^2 = 12$

t: $x + y = 2$

tangenti all'iperbole
// alla retta t

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 12 \\ x + y = K \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y^2 - 6Ky + 3K^2 - 4y^2 - 12 = 0 \\ x = -y + K \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -y^2 - 6Ky + 3K^2 - 12 = 0 \\ x = -y + K \end{cases}$$

eq. risolvente: $y^2 + 6Ky + 12 - 3K^2 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 9K^2 - 12 + 3K^2 = 0$$

$$12K^2 = 12$$

$$K^2 = 1$$

$$K = \pm 1$$

$$x + y = \pm 1 \quad \text{rette tangenti}$$

eq. iperbole riferita agli assi e al centro

$4x - y - 3 = 0$ retta tangente all'iperbole nel punto di ascissa 1

$$x=1 \quad y=4-3=1 \quad T(1;1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formule di sdoppiamento $x^2 \rightarrow x_0 x = x$
 $y^2 \rightarrow y_0 y = y$

retta tangente in T all'iperbole: $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$

$$4x - y - 3 = 0 \rightarrow 4x - y = 3 \rightarrow \frac{4}{3}x - \frac{y}{3} = 1$$

le equazioni $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$ e $\frac{4}{3}x - \frac{y}{3} = 1$ devono rappresentare due rette coincidenti:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{3} \quad , \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{3}{4} \quad b^2 = 3$$

eq. iperbole $\frac{4x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1 \rightarrow 4x^2 - y^2 = 3$

eq. iperbole riferita agli assi e al centro

$$2a=2 \rightarrow a=1$$

$$2x-y-1=0 \text{ retta tangente}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 x^2 - y^2 = b^2$$

$$\begin{cases} b^2 x^2 - y^2 = b^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 x^2 - 4x^2 + 4x - 1 - b^2 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

eq. risolvente:

$$(b^2 - 4)x^2 + 4x - 1 - b^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 4 + b^2 + b^4 - 4 - 4b^2 = 0$$

$$b^4 - 3b^2 = 0 \rightarrow b^2 = 0 \quad \vee \quad b^2 = 3$$

non accett. accett.

eq. iperbole: $3x^2 - y^2 = 3$

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \quad \text{iperbole}$$

$$P\left(5; \frac{8}{3}\right)$$

$$4 \cdot 25 - \cancel{9} \cdot \frac{64}{\cancel{9}} = 36 \rightarrow 100 - 64 = 36 \rightarrow P \in \text{iperbole}$$

$$x^2 \rightarrow x_0 x = 5x$$

$$y^2 \rightarrow y_0 y = \frac{8}{3} y$$

formule di sdoppiamento

$$20x - 9 \cdot \frac{8}{3} y = 36$$

$$20x - 24y = 36$$

$$5x - 6y = 9 \quad \text{retta tangente}$$

eq. iperbole?

$F_1(2\sqrt{5}; 0)$

$y = \pm 2x$ asintoti

$$c = 2\sqrt{5} \rightarrow c^2 = 20$$

$$\frac{b}{a} = 2$$

$y = \pm \frac{b}{a}x$ eq. asintoti

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 20 \\ b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + 4a^2 = 20 \\ b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a^2 = 20 \\ b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow 4x^2 - y^2 = 16$$

eq. della tangente t all'iperbole
nel punto del primo quadrante
di ascissa uguale a $\sqrt{5}$

$$x = \sqrt{5}$$

$$20 - y^2 = 16 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$P(\sqrt{5}; 2)$

tangente in P :

$$4\sqrt{5}x - 2y = 16 \rightarrow 2\sqrt{5}x - y - 8 = 0 \quad (\text{retta } t)$$

misura dell'area del triangolo limitato dalla retta t e dagli asintoti:

continua

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2\sqrt{5}x - y - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 2\sqrt{5}x + 2x = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{8}{\sqrt{5}+1} \\ x = \frac{4}{\sqrt{5}+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2\sqrt{5}x - y - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2\sqrt{5}x - 2x = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{\sqrt{5}-1} \\ x = \frac{4}{\sqrt{5}-1} \end{cases}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}+1} & -\frac{8}{\sqrt{5}+1} & 1 \\ \frac{4}{\sqrt{5}-1} & \frac{8}{\sqrt{5}-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{32}{5-1} + \frac{32}{5-1} = 16$$

$$S = \frac{1}{2} |\det M| = 8$$

iperbole $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

$P(1;1)$

fascio proprio di centro P

$$y-1=m(x-1) \rightarrow y=mx-m+1$$

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2 = 0 \\ y = mx - m + 1 \end{cases}$$

eq. risolvente:

$$2x^2 - (m^2x^2 + m^2 + 1 - 2mx^2 + 2mx - 2m) - 2 = 0$$

$$(2-m^2)x^2 + 2x(m^2-m) - m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow \cancel{m^4} - 2\cancel{m^3} + m^2 - \cancel{m^4} + 2\cancel{m^3} - 3m^2 + 2m^2 - 4m + 6 = 0$$
$$-4m + 6 = 0 \quad m = \frac{3}{2}$$

continua

rette tangenti:

$$x=1$$

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2 = 0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y^2 = 0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$T_1(1;0)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$-(x-3)^2 = 0 \quad x=3$$

$$y = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$T_2(3;4)$$

$$xy = -3$$

equazioni delle tangenti // $y = x$

$$\begin{cases} xy = -3 \\ y = x + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0 \\ y = x + q \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow q^2 - 12 = 0 \rightarrow q = \pm 2\sqrt{3}$$

$$y = x \pm 2\sqrt{3}$$

$$xy+2=0$$

$$x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}y=-2 \rightarrow y=-4$$

$$P\left(\frac{1}{2}; -4\right)$$

Tangente in P all'iperbole:

$$xy \rightarrow \frac{1}{2}(x_0y + xy_0)$$

formula di sdoppiamento

$$x_0=\frac{1}{2} \quad y_0=-4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y - 4x\right) + 2 = 0$$

$$y - 8x + 8 = 0$$

$$8x - y - 8 = 0$$

iperbole equilatera

$$y = \frac{Ax+B}{x-2}$$

A, B ?

$y=2$ asintoto

$P(1; -1)$

$2c = ?$

$C(2; A)$ centro

$\left. \begin{array}{l} x=2 \\ y=A \end{array} \right\}$ asintoti

$$A=2 \rightarrow y = \frac{2x+B}{x-2}$$

$$P(1; -1) \in \text{iperbole} \rightarrow -1 = \frac{2+B}{-1} \rightarrow 1 = 2+B \rightarrow B = -1$$

$$y = \frac{2x-1}{x-2}$$

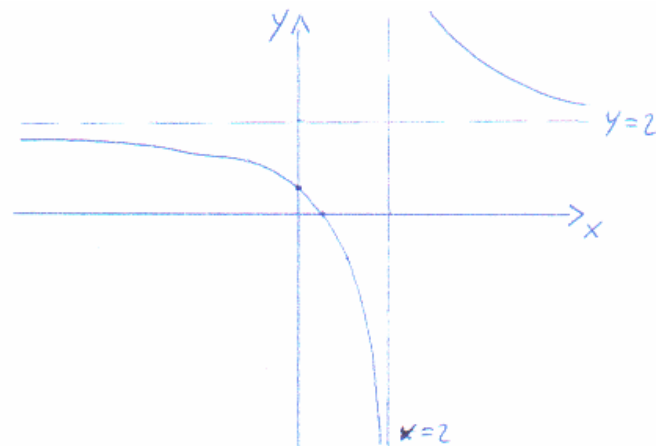
$C(2; 2)$

$$\begin{cases} x=2+X \\ y=2+Y \end{cases}$$

$$2+Y = \frac{4+2X-1}{2+X-2} \rightarrow 2X+XY = 2X+3 \rightarrow XY=3$$

$$\frac{a^2}{2} = 3 \rightarrow a^2 = 6 \rightarrow c^2 = 2a^2 = 12 \rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$2c = 4\sqrt{3}$$



iperbole $y = \frac{x-1}{x+2}$

$$\begin{cases} y=0 \\ y = \frac{x-1}{x+2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

A(1;0)

$x \neq -2$

$$xy + 2y = x - 1$$

$$xy - x + 2y + 1 = 0$$

A(1;0)

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0$$

formule di sdoppiamento

$$xy \rightarrow \frac{1}{2}(xy_0 + x_0y) = \frac{1}{2}y$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}(x+x_0) = \frac{x+1}{2}$$

$$y \rightarrow \frac{1}{2}(y+y_0) = \frac{1}{2}y$$

equazione della retta tangente all'iperbole in A :

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y + 1 = 0$$

$$y - x - 1 + 2y + 2 = 0$$

$$-x + 3y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 3y - 1 = 0$$

Problemi con
più coniche

Scrivere l'equazione della parabola λ con asse di simmetria parallelo all'asse delle y sapendo che ha vertice $V(2;-1)$, e passa per il punto $A(1,0)$.

Indicare con B l'ulteriore punto di intersezione della parabola con l'asse delle x .

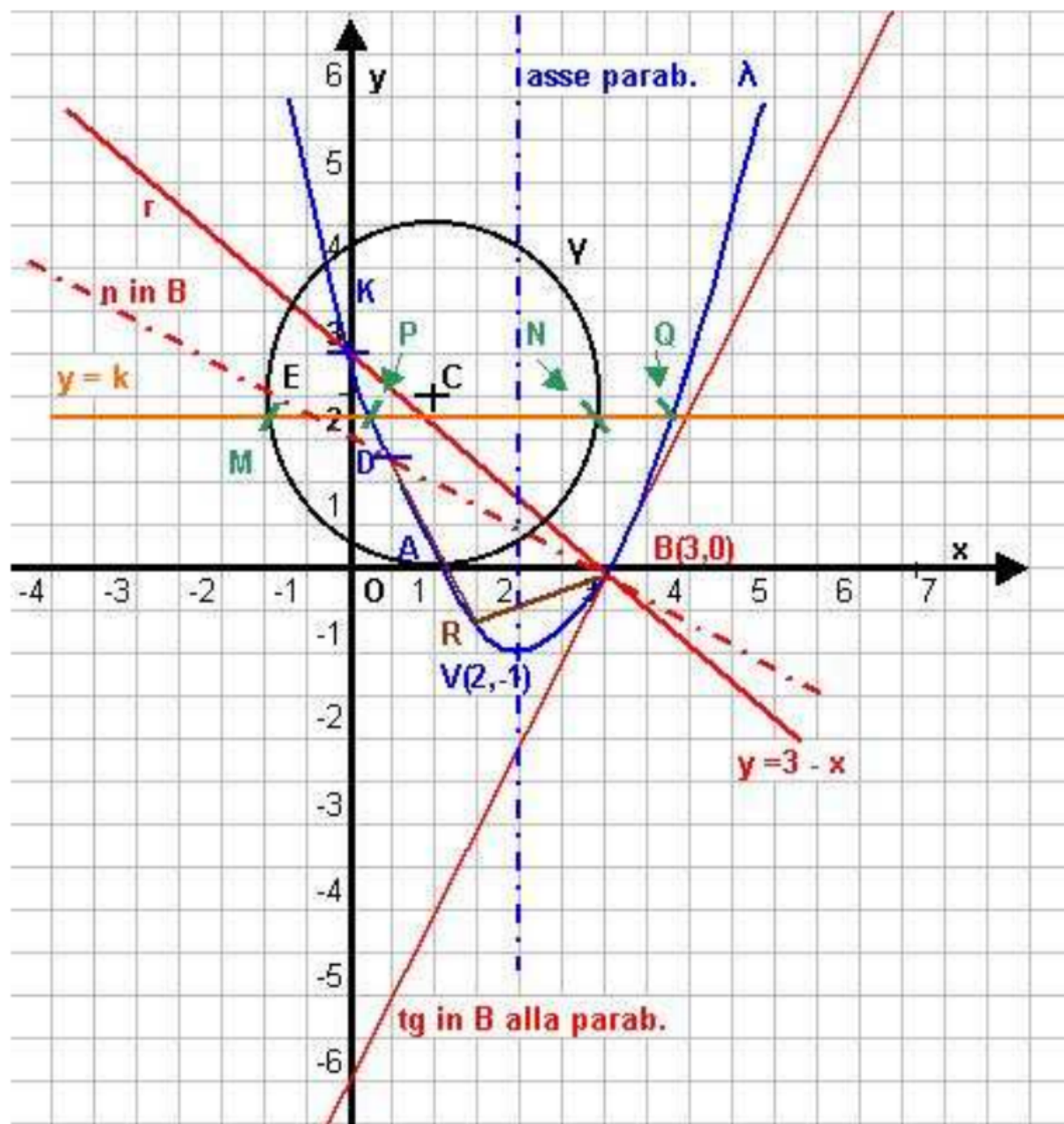
Condurre la normale n (cioè la perpendicolare alla tangente) in B alla curva, indicando con D l'ulteriore intersezione di n con la parabola.

Determinare sull'arco BD un punto R in modo che sia $\frac{15}{8}$ l'area del triangolo RBD .

Scrivere l'equazione della circonferenza γ sapendo che è tangente all'asse delle x , passa per $E(-1;2)$ e il suo centro appartiene alla retta di equazione $x + y - 3 = 0$.

Esistono due circonferenze che soddisfano queste condizioni: scegliere quella che giace nel semipiano positivo delle ordinate.

Una retta del tipo $y = k$ interseca λ in P e Q e γ in M ed N . Determinare k in modo che sia $MN = PQ$.



- Ricerchiamo la parabola che è del tipo $y = ax^2 + bx + c$, lo faremo imponendo il passaggio per il vertice e il punto A dati, da cui il sistema:

$$\begin{cases} A & a + b + c = 0 \\ V_x & -\frac{b}{2a} = 2 \\ V_y & -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b = -4a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ a - 4a + c = 0 \\ 16a^2 - 4ac = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ 16a^2 - 4a(3a) = 4a \end{cases}$$

Elaboriamo la terza

$$16a^2 - 12a^2 - 4a = 0$$

$$4a^2 - 4a = 0$$

$$a(a - 1) = 0 \begin{cases} \nearrow a = 0 \\ \searrow a = 1 \end{cases}$$

ne consegue

per $a = 0$ $c = 0$ $b = 0$

per $a = 1$ $c = 3$ $b = -4$

da cui l'equazione della parabola $y = x^2 - 4x + 3$

Determiniamo il punto **B** d'intersezione della parabola con l'asse delle x :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} x_1 = 1 & \text{da cui ritroviamo } A(1;0) \\ x_2 = 3 & \textbf{B(3;0)} \text{ punto cercato} \end{cases}$$

Ricerca tangente in B(3,0) dall'equaz. $y - y_0 = m(x - x_0)$ da cui:

$$y - 0 = m(x - 3)$$

$$y = m(x - 3)$$

Impostiamo il sistema con la parabola trovata

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = m(x - 3) \end{cases}$$

sostituiamo la seconda nella prima
ed elaboriamo quest'ultima

$$x^2 - 4x + 3 = m(x - 3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = mx - 3m$$

$$x^2 - 4x + 3 - mx + 3m = 0$$

$$x^2 - x(4 + m) + 3 + 3m = 0$$

La cond. di tangenza è $\Delta = 0$

cioè $b^2 - 4ac = 0$ quindi

$$(4+m)^2 + 4(3+3m) = 0$$

$$16 + 8m + m^2 - 12 - 12m = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m - 2)^2 = 0$$

$$\mathbf{m = 2}$$

Concludendo dall'equaz. generica
 $y = m(x - 3)$ abbiamo :

$$y = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 6$$

$$\mathbf{y - 2x + 6 = 0}$$

La normale n in $B(3,0)$ avrà il coefficiente angolare pari all'antireciproco cioè $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$

Conseguentemente l'equazione della normale cercata ha espressione:

$$y = -\frac{1}{m}(x-3)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-3)$$

$$2y = -x + 3$$

$$2y + x - 3 = 0$$

Ricerca del punto D , intersezione della normale n con la parabola λ , mettiamole a sistema :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ 2y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 2x^2 - 8x + 6 \\ 2y = -x + 3 \end{cases}$$

sostituiamo la seconda nella prima ed elaboriamo quest'ultima:

$$2x^2 - 8x + 6 = -x + 3$$

$$2x^2 - 8x + 6 + x - 3 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \end{cases}$$

Per $x_2 = 3$ ritroviamo il punto $B(3,0)$

Per $x_2 = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$y = \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + 3 = \frac{1-8+12}{4} = \frac{5}{4}$$

Conseguentemente le coordinate del punto

sono $D(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$

Determiniamo ora il punto R di ascissa generica z appartenente all'arco BD della parabola λ e quindi di ordinata che gli compete $y_z = z^2 - 4z + 3$, i punti del triangolo hanno coordinate:

$$R(z; z^2 - 4z + 3) \quad B(3;0) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

Gli estremi dell'arco ci impongono le limitazioni $\frac{1}{2} < z < 3$ e $\frac{5}{4} < y_z < -1$

Dall'applicazione della condizione richiesta avremo $A_s(RBD) = \frac{15}{8}$

applicazione della formula matriciale di Sarrus:

Inserite le tre coordinate dei vertici del triangolo per righe, inserire una colonna di termini unitari, ripetendo quindi le tre coordinate dei punti, e procedere come nello schema sottostante:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3) - (1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1)]$$

- - - + + +

Da cui nel nostro caso:

$$A_s(\text{RBD})=$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ z & z^2 - 4z + 3 & 1 & z & z^2 - 4z + 3 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{15}{4} + 0 + \frac{z^2 - 4z + 3}{2} \right] - \left[\frac{5z}{4} + 3(z^2 - 4z + 3) + 0 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{15}{4} + \frac{z^2 - 4z + 3}{2} - \frac{5z}{4} - 3(z^2 - 4z + 3) \right]$$

Da cui:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{15}{4} + \frac{z^2 - 4z + 3}{2} - \frac{5z}{4} - 3(z^2 - 4z + 3) \right] = \frac{15}{8}$$

$$\frac{15}{4} + \frac{z^2 - 4z + 3}{2} - \frac{5z}{4} - 3(z^2 - 4z + 3) = \frac{15}{4}$$

$$\frac{z^2 - 4z + 3}{2} - \frac{5z}{4} - 3(z^2 - 4z + 3) = 0$$

$$2z^2 - 8z + 6 - 5z - 12z^2 + 48z - 36 = 0$$

$$-10z^2 + 35z - 30 = 0$$

$$2z^2 - 7z + 6 = 0$$

$$z_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \begin{cases} z_1 = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ z_2 = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Per $z_1 = \frac{3}{2}$ si ha $y_z = z^2 - 4z + 3 = \frac{9}{4} - 4 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{9 - 24 + 3}{4} = -\frac{12}{4} = -3$

Per $z_2 = 2$ si ha $y_z = z^2 - 4z + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Concludendo:

$R_1(\frac{3}{2}; -3)$ non accettabile per la condizione $\frac{5}{4} < y_z < -1$

$R_2(2; -1)$ accettabile coincidente con il vertice della parabola.

Ricerchiamo l'equazione della circonferenza del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Per impostare il sistema risolvante di tre incognite in tre equazioni avremo

a) imporre il passaggio per $E(-1;2)$

la circonferenza è tangente all'asse delle x di equazione $y = 0$

l'ultima condizione ci è data dal fatto che C appartiene alla retta $x + y - 3 = 0$. E' chiaro altresì che il centro giace anche sulla perpendicolare al punto di tangenza sull'asse x (coincidente con il raggio).

a) I^a equaz. passaggio per $E(-1;2)$: $1 + 4 - a + 2b + c = 0$ cioè **$5 - a + 2b + c = 0$**

b) II^a equaz. ; sappiamo che la circonferenza γ è tangente all'asse delle x di eq. $y = 0$ quindi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui dopo la sostituzione

$x^2 + ax + c = 0$ e dalla condizione di tangenza $\Delta = 0$ cioè $b^2 - 4ac = 0$ si ha

$a^2 - 4c = 0$ quindi : $a = \pm 2\sqrt{c}$

c) Infine l'ultima condizione ci è data dal fatto che il centro C appartiene alla retta $x + y - 3 = 0$.

È, altresì, chiaro che il centro giace anche sulla perpendicolare al punto di tangenza sull'asse x .

Il punto generico di contatto avrà coordinate $S(x_S, 0)$, ed il centro sarà dato dall'intersezione delle due rette

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x = x_S \text{ retta // alla } y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_S \\ y_S = 3 - x_S \end{cases} \quad \text{da cui le coordinate generiche del centro } C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (x_S; 3 - x_S)$$

Inoltre l'eq. generica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ essendo noto il valore di $a \pm 2\sqrt{c} = 0$, cioè per la parte negativa $a - 2\sqrt{c} = 0$ e per quella positiva $a + 2\sqrt{c} = 0$ quindi $a = -2\sqrt{c}$ e avremo

$$\begin{cases} a = -2\sqrt{c} \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ sostituendo} \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{c}x + by + c = 0$ imponendo il passaggio per il punto $S(x_S, 0)$,

$$x_S^2 - 2\sqrt{c}x_S + c = 0$$

$$x_{S12} = \sqrt{c} \pm \sqrt{c - c} = \sqrt{c}$$

Se ne deduce che $C(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}) = (x_s; 3 - x_s) = (\sqrt{c}; 3 - \sqrt{c})$ da cui il sistema risolvante

$$\begin{cases} 5 - a + 2b + c = 0 \\ a = -2\sqrt{c} \text{ già utilizzata e ritrovata} \\ -\frac{b}{2} = 3 - \sqrt{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - a + 2b + c = 0 \\ a = -2\sqrt{c} \\ \frac{b}{2} = \sqrt{c} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2\sqrt{c} \\ b = 2\sqrt{c} - 6 \\ 5 - a + 2b + c = 0 \text{ sostituiamo ed elaboriamo l'ultima} \end{cases}$$

$$5 + 2\sqrt{c} + 2(2\sqrt{c} - 6) + c = 0$$

$$5 + 2\sqrt{c} + 4\sqrt{c} - 12 + c = 0$$

$$6\sqrt{c} + c - 7 = 0$$

$$(6\sqrt{c})^2 = (7 - c)^2$$

$$36c = 49 - 14c + c^2$$

$$49 - 14c + c^2 - 36c = 0$$

$$c^2 - 50c + 49 = 0$$

$$c_{12} = 25 \pm \sqrt{625 - 49} = 25 \pm \sqrt{576} = 25 \pm 24 = \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 49 \end{cases}$$

Ne consegue:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \quad \text{da cui l'eq. della circonferenza } x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \quad \text{Eq. cercata}$$

$$1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0 \quad \text{pass. per } E(-1;2)$$

$$\begin{cases} c_2 = 49 \\ a = -14 \\ b = 20 \end{cases} \quad \text{da cui l'eq. della circonferenza } x^2 + y^2 - 14x + 20y + 49 = 0$$

$$1 + 4 + 14 + 32 + 49 \neq 0 \quad \text{non pass. per } E(-1;2)$$

Basterà verificare il passaggio per E , o cercarne il centro $C(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$, solo la prima soddisfa le condizioni.

La parabola λ interseca $y = k$ in $P(x_P; k)$ e $Q(x_Q; k)$ mentre

La circonferenza γ interseca $y = k$ in $M(x_M; k)$ e $N(x_N; k)$

Dovrà essere $MN = PQ$, ed essendo i punti posti sull'orizzontale basterà fare la differenza delle ascisse. Quindi :

1) dalla parabola λ si ha:

$$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Sostituendo ed elaborando si ha

$$x^2 - 4x + 3 - k = 0$$

$$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4 - (3 - k)} = 2 \pm \sqrt{1 + k} = \begin{cases} x_P = 2 - \sqrt{1 + k} \\ x_Q = 2 + \sqrt{1 + k} \end{cases}$$

$$PQ = x_Q - x_P = 2 + \sqrt{1 + k} - 2 + \sqrt{1 + k} = 2\sqrt{1 + k}$$

2) dalla circonferenza γ si ha:

$$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 \end{cases}$$

Sostituendo ed elaborando si ha

$$x^2 + k^2 - 2x - 4k + 1 = 0$$

$$x_{12} = 1 \pm \sqrt{1 - (k^2 - 4k + 1)} = 1 \pm \sqrt{1 - k^2 + 4k - 1} = 1 \pm \sqrt{4k - k^2} = \begin{cases} x_M = 1 - \sqrt{4k - k^2} \\ x_N = 1 + \sqrt{4k - k^2} \end{cases}$$

$$MN = x_N - x_M = 1 + \sqrt{4k - k^2} - 1 + \sqrt{4k - k^2} = 2\sqrt{4k - k^2}$$

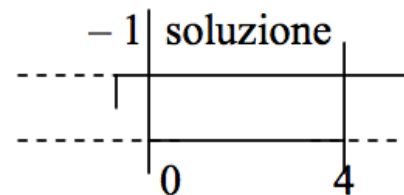
Da cui essendo $PQ = MN$ abbiamo

$$2\sqrt{1+k} = 2\sqrt{4k - k^2} \text{ equazione irrazionale}$$

prima di svolgerla vediamo le condizioni, dai radicandi abbiamo:

$$\begin{cases} 1 + k > 0 \\ -k^2 + 4k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > -1 \\ k^2 - 4k < 0 \quad a > 0 \quad f(k) < 0 \quad \Delta > 0 \text{ verificata per valori interni } 0 < k < 4 \end{cases}$$



La condizione è riscontrabile anche geometricamente in quanto $y = k$ interseca la γ fino all'ordinata massima che è pari a $y = 4$; tangente alla γ .

Risolviamo

$$(2\sqrt{1+k})^2 = (2\sqrt{4k-k^2})^2$$

$$4k - k^2 = 1 + k$$

$$4k - k^2 - 1 - k = 0$$

$$-4k + k^2 + 1 + k = 0$$

$$k^2 - 3k + 1 = 0$$

$$k_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} k_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \\ k_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,61 \end{cases}$$

Valori ambedue accettabili perchè entro i limiti.

Verifichiamolo con uno dei due valori ad esempio con k_2 .

$$(PQ)^2 = (2\sqrt{1+k})^2 = 4 \left(\frac{2+3+\sqrt{5}}{2} \right) = 10 + 2\sqrt{5}$$

$$(MN)^2 = (2\sqrt{4k - k^2})^2 = 4 \left[4 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = 4 \left[2(3+\sqrt{5}) - \left(\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} \right) \right] =$$

$$= 4 \left[\frac{24 + 8\sqrt{5} - 14 - 6\sqrt{5}}{4} \right] = 10 + 2\sqrt{5}$$

Esponenziali

Equazioni esponenziali

$$\frac{3^{1-x} \cdot 9^{2+x}}{27^x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3^{1-x} \cdot 3^{4+2x}}{3^{3x}} = 3^{-1}$$

$$3^{5+x-3x} = 3^{-1}$$

$$5-2x = -1$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{1-2x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-6x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6x-3}$$

$$x+1 = 6x-3$$

$$-5x = -4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$\frac{9^{x+1}}{27^{3-2x}} = \frac{1}{81} \cdot 3^{1+x}$$

$$\frac{3^{2x+2}}{3^{9-6x}} = \frac{3^{1+x}}{3^4}$$

$$3^{8x-7} = 3^{x-3}$$

$$8x-7 = x-3$$

$$7x = 4$$

$$x = \frac{4}{7}$$

$$\frac{(3^{x+1})^{2x-1} \cdot 27^{1-x}}{9^{2-x}} = 1$$

$$\frac{3^{2x^2+x-1} \cdot 3^{3-3x}}{3^{4-2x}} = 3^0$$

$$3^{2x^2-2x+2-4+2x} = 3^0$$

$$2x^2-2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$3^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$$

$$15^{x-2} = 15^0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 351$$

$$9 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 3^x = 351$$

$$13 \cdot 3^x = 351$$

$$3^x = \frac{351}{13}$$

$$3^x = 27 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow x = 3$$

$$3 \cdot 2^x + 2^{x+3} - 2^{x-1} - 5 \cdot 2^{x+1} = \sqrt{2}$$

$$2^x \left(3 + 8 - \frac{1}{2} - 10 \right) = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^x \cdot \frac{1}{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^x = 2^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0$$

$$t = 3^x$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

$$3^x = -2 \quad \text{impossibile}$$

$$3^x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$$t = 3^x \quad t^2 = (3^x)^2 = 3^{2x} = 9^x$$

$$t^2 + 6t - 27 = 0$$

$$t_{1,2} = -3 \pm 6 = \begin{cases} -9 \\ 3 \end{cases}$$

$$3^x = -9 \quad \text{impossibile}$$

$$3^x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$2^{2x} + 2^{x+1} - 8 = 0$$

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$$

$$t = 2^x \rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \rightarrow t_{1,2} = -1 \pm 3 = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$$

$$2^x = -4 \quad \text{impossibile}$$

$$2^x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$t = 2^x$$

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$t_{1,2} = -1 \pm 5 = \begin{cases} -6 \\ +4 \end{cases}$$

$$t = -6 \rightarrow 2^x = -6 \text{ impossibile}$$

$$t = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$$

$$9^{x+1} = \frac{3^{x+2} - 3^{x+1}}{2}$$

$$9 \cdot 3^{2x} = \frac{9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x}{2}$$

$$3^x = t$$

$$18t^2 = 6t$$

$$3t^2 - t = 0$$

$$t_1 = 0 \rightarrow 3^x = 0 \text{ impossibile}$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x = 3^{-1} \rightarrow x = -1$$

$$2 \cdot 3^x - 9^x = 1 \quad t = 3^x$$

$$-t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1 \rightarrow 3^x = 3^0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{2^{2x}}{1+2^x} = 1 - \frac{2^x}{2^x+1}$$

$$t = 2^x$$

$$\frac{t^2}{1+t} = 1 - \frac{t}{t+1}$$

$$t^2 = t + 1 - t$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$2^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$2^x = -1$ impossibile

$$(4^{x-1})^{x+1} = 8^{x^2-2}$$

$$4^{x^2-1} = 8^{x^2-2}$$

$$2^{2x^2-2} = 2^{3x^2-6}$$

$$2x^2-2 = 3x^2-6$$

$$-x^2+4=0$$

$$x = \pm 2$$

$$2^{3x+1} - 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x - 2 = 0 \quad t = 2^x$$

$$2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} +1 & 2 & -7 & 7 & -2 \\ & & +12 & -5 & 2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(t-1)(2t^2-5t+2)=0$$

$$t_1=1 \quad t_{2,3} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$2^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$2^x = \frac{1}{2} \rightarrow x = -1$$

$$2^x = 2 \rightarrow x = 1$$

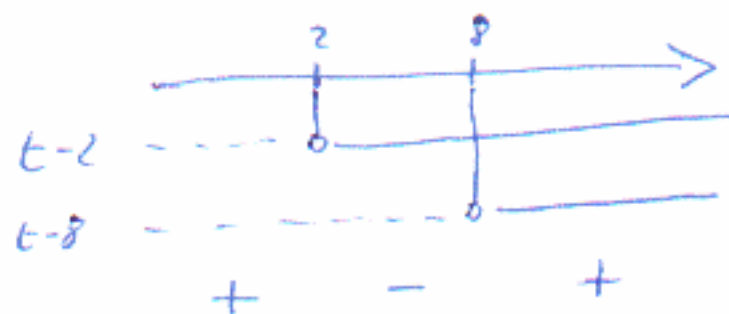
Disequazioni esponenziali

$$4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \geq 0$$

$$t = 2^x$$

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0$$

$$(t-2)(t-8) \geq 0$$



$$t \leq 2 \quad \vee \quad t \geq 8$$

$$2^x \leq 2 \quad \vee \quad 2^x \geq 2^3$$

$$x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 3$$

$$2^{x+2} + 2^x - 20 \geq 0$$

$$4 \cdot 2^x + 2^x \geq 20$$

$$5 \cdot 2^x \geq 20$$

$$2^x \geq 4$$

$$2^x \geq 2^2$$

$$x \geq 2$$

$$2^x + 2^{4-x} > 17$$

$$2^x + \frac{16}{2^x} > 17$$

$$2^{2x} + 16 - 17 \cdot 2^x > 0$$

$$t^2 - 17t + 16 > 0$$

$$(t-1)(t-16) > 0$$

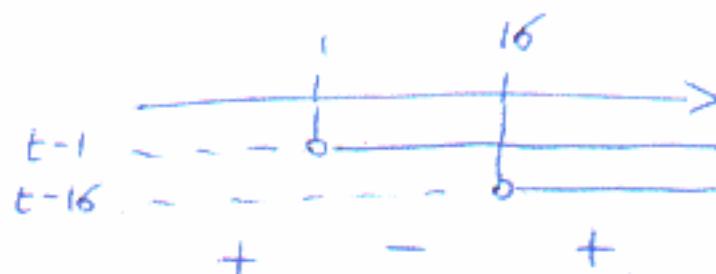
$$t < 1 \vee t > 16$$

$$2^x < 2^0 \vee 2^x > 2^4$$

$$x < 0 \vee x > 4$$

$$2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$t = 2^x$$



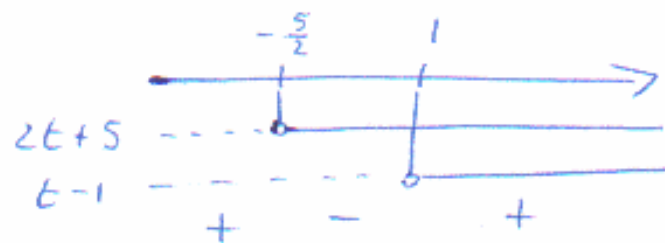
$$\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{3}{5} > \frac{2}{5^{1-x}}$$

$$\frac{1}{5^x} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \cdot 5^x > 0 \quad t = 5^x$$

$$-\frac{2}{5} 5^{2x} - \frac{3}{5} \cdot 5^x + 1 > 0$$

$$2t^2 + 3t - 5 < 0$$

$$(2t+5)(t-1) < 0$$



$$-\frac{5}{2} < t < 1$$

$$-\frac{5}{2} < 5^x < 1$$

$$5^x < 1$$

$$5^x < 5^0 \rightarrow x < 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2^x > 5^{x-2}$$

$$2^{-2} \cdot 2^x > 5^{x-2}$$

$$2^{x-2} > 5^{x-2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} > 1 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{2}{5}\right)^0 \rightarrow x-2 < 0 \rightarrow x < 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot 9^x > \frac{16^x}{4}$$

$$\left(\frac{9}{16}\right)^x > \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} > \frac{3}{4}$$

$$2x < 1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$5^x < 4^{x-1} \cdot 5$$

$$5^{x-1} < 4^{x-1}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} < \left(\frac{5}{4}\right)^0$$

$$x-1 < 0$$

$$x < 1$$

$$\frac{27}{8} \cdot 2^x < 3^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$x > 3$$

$$\frac{1+2^x}{1-2^x} \leq 1$$

$$\frac{1+2^x}{1-2^x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{1+2^x-1+2^x}{1-2^x} \leq 0$$

$$\frac{2 \cdot 2^x}{1-2^x} \leq 0$$

$$\frac{2^x}{2^x-1} \geq 0$$

$$N > 0$$

$$2^x > 0$$

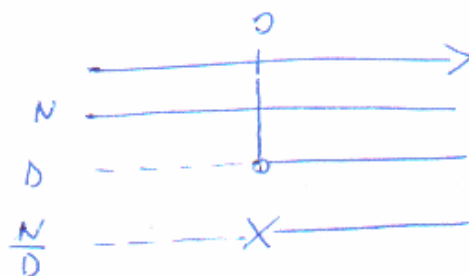
$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0$$

$$2^x - 1 > 0$$

$$2^x > 2^0$$

$$x > 0$$



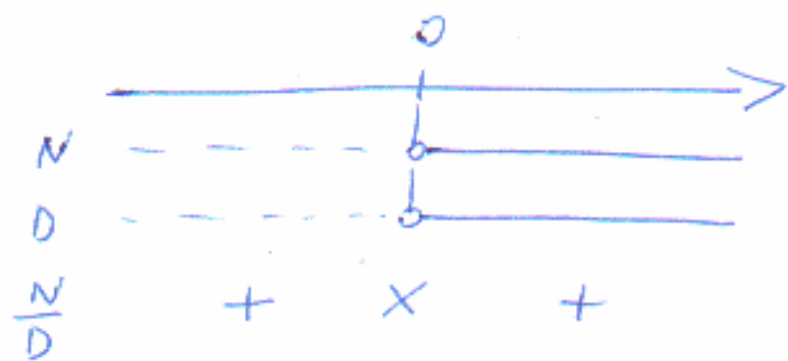
$$\boxed{x > 0}$$

$$\frac{1-3^x}{4^x+2^x-2} < 0$$

$$\frac{3^x-1}{2^{2x}+2^x-2} > 0$$

$$\begin{aligned} N: \quad & 3^x - 1 > 0 \\ & 3^x > 3^0 \\ & x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \quad & t = 2^x \\ & t^2 + t - 2 > 0 \\ & (t+2)(t-1) > 0 \\ & t < -2 \vee t > 1 \\ & t > 1 \\ & 2^x > 2^0 \\ & x > 0 \end{aligned}$$



$$S: \quad \checkmark x \neq 0$$

$$3^{4x} - 3^{3x} - 7 \cdot 3^{2x} + 3^x + 6 < 0$$

$$t = 3^x$$

$$t^4 - t^3 - 7t^2 + t + 6 < 0$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(t-1)(t^3 - 7t - 6) < 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(t-1)(t+1)(t^2 - t - 6) < 0$$

$$(t-1)(t+1)(t-3)(t+2) < 0$$

Essendo $t > 0$ i fattori

$$(t+1) \text{ e } (t+2)$$

sono sempre positivi

$$(t-1)(t-3) < 0$$

$$1 < t < 3$$

$$3^0 < 3^x < 3$$

$$0 < x < 1$$

Logaritmi

Equazioni logaritmiche

$$2 \log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$$

$$\log_{\frac{2}{3}} x^2 + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$$

$$\log_{\frac{2}{3}} 3x^2 = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$$

$$3x^2 = 5x-2$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{accett.} \\ 1 & \text{accett.} \end{cases}$$

$$\text{C.A. } \begin{cases} x > 0 \\ 5x-2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow x > \frac{2}{5}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3}; 1 \right\}$$

$$\log_3 (x^2+x) - \log_3 (x^2-x) = 1$$

$$\log_3 (x^2+x) = \log_3 3 + \log_3 (x^2-x)$$

$$\log_3 (x^2+x) = \log_3 (3x^2-3x)$$

$$x^2+x = 3x^2-3x$$

$$2x^2-4x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ non accett.}$$

$$x_2 = 2 \text{ accett.}$$

$$\text{C.A. } \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x^2-x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$
$$x < -1 \vee x > 1$$

$$S = \{2\}$$

$$2 \log x - \log(x-1) = 2 \log 2$$

$$\text{c. A. } \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow x > 1$$

$$\log x^2 = \log 4 + \log(x-1)$$

$$\log x^2 = \log 4(x-1)$$

$$x^2 = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

$$S = \{2\}$$

$$\log_6(9x^2-1) - \log_6(3x-1) = 1$$

$$\text{c. A. } \begin{cases} 9x^2-1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_6(9x^2-1) = 1 + \log_6(3x-1)$$

$$\log_6(9x^2-1) = \log_6(18x-6)$$

$$9x^2-1 = 18x-6$$

$$9x^2-18x+5=0$$

$$x_{1/2} = \frac{9 \pm 6}{9} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{non accett.} \\ \frac{5}{3} & \text{accett.} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

$$\log_2 x - \log_2 (x+4) + 1 = 0$$

$$\text{c.A. } \begin{cases} x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -4 \end{cases} \rightarrow x > 0$$

$$\log_2 x + \log_2 2 = \log_2 (x+4)$$

$$2x = x+4$$

$$x = 4 \text{ accett. } S = \{4\}$$

$$\log_2 (3x+1) - \log_2 (x+2) + 2 = \log_2 (9x-4) - \log_2 x$$

$$\log_2 (3x+1) + \log_2 4 + \log_2 x = \log_2 (x+2) + \log_2 (9x-4)$$

$$\log_2 (12x^2 + 4x) = \log_2 (9x^2 + 14x - 8)$$

$$12x^2 + 4x = 9x^2 + 14x - 8$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{3} = \begin{cases} \frac{4}{3} \text{ accett.} \\ 2 \text{ accett.} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{4}{3}; 2 \right\}$$

c.A.

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ 9x-4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x > -2 \\ x > \frac{4}{9} \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow x > \frac{4}{9}$$

$$\log 3 + \frac{1}{2} \log (x^2 - 2) = \log (6 - x^2)$$

$$2 \log 3 + \log (x^2 - 2) = 2 \log (6 - x^2)$$

$$\log 9 + \log (x^2 - 2) = \log (36 - 12x^2 + x^4)$$

$$9x^2 - 18 = x^4 - 12x^2 + 36$$

$$x^4 - 21x^2 + 54 = 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 - 18) = 0$$

$$x = \begin{cases} -\sqrt{3} & \text{accett.} \\ +\sqrt{3} & \text{accett.} \\ -\sqrt{18} & \text{non accett.} \\ +\sqrt{18} & \text{non accett.} \end{cases}$$

C.A.

$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ 6 - x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{cases}$$

$$-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < \sqrt{6}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; +\sqrt{3}\}$$

$$\log (1-x) - \log (1+x) + \frac{1}{2} \{ \log (1+2x) - \log (1-2x) \} = 0$$

$$2 \log (1-x) - 2 \log (1+x) + \log (1+2x) - \log (1-2x) = 0$$

$$\log (1-x)^2 (1+2x) = \log (1+x)^2 (1-2x)$$

$$(1-x)^2 (1+2x) = (1+x)^2 (1-2x)$$

$$(x^2 - 2x + 1)(2x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(1 - 2x)$$

$$2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 - 2x^3 - 4x^2 - 2x$$

$$4x^3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{accett.}$$

$$S = \{0\}$$

C.A.

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x > 0 \\ 1+2x > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log(1+5x) = \log(1+\sqrt{3x})$$

$$\text{C.A.} \quad \begin{cases} 1+5x > 0 \\ 1+\sqrt{3x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \geq 0$$

$$1+5x = 1+3x+2\sqrt{3x}$$

$$2x = 2\sqrt{3x}$$

$$x = \sqrt{3x}$$

$$x^2 = 3x$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{accett.}$$

$$x_2 = 3 \quad \text{accett.}$$

$$S = \{0, 3\}$$

$$\log_3 (x-2) + 2 = \log_3 6x$$

C.A.

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ 6x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow x > 2$$

$$\log_3 (x-2) + \log_3 9 = \log_3 6x$$

$$\log_3 (9x-18) = \log_3 6x$$

$$9x-18 = 6x$$

$$3x = 18$$

$$x = 6 \quad \text{accept.}$$

$$\log(1-\sqrt{x+2}) = \frac{1}{2} \log(3x+7)$$

$$2 \log(1-\sqrt{x+2}) = \log(3x+7)$$

$$\log(1-\sqrt{x+2})^2 = \log(3x+7)$$

$$1+x+2-2\sqrt{x+2} = 3x+7$$

$$-2\sqrt{x+2} = 2x+4$$

$$\sqrt{x+2} = -x-2$$

$$\begin{cases} -x-2 \geq 0 \\ x+2 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 & \text{accett.} \\ -1 & \text{non accett.} \end{cases} \end{cases}$$

$$x = -2 \text{ accett.}$$

C.A.

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x+2} > 0 \\ 3x+7 > 0 \end{cases}$$

1^a diseq.

$$1-\sqrt{x+2} > 0$$

$$\sqrt{x+2} < 1$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$-2 \leq x < -1$$

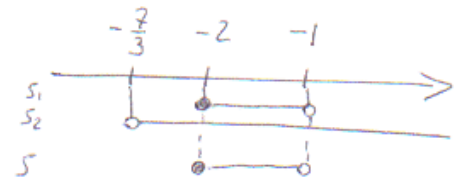
2^a diseq.

$$3x+7 > 0$$

$$3x > -7$$

$$x > -\frac{7}{3}$$

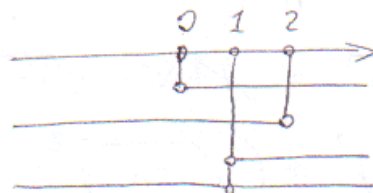
$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ x > -\frac{7}{3} \end{cases}$$



$$-2 \leq x < -1$$

$$\log 2 + \frac{1}{2} [\log x + \log (2-x)] - 2 \log (x-1) = \frac{1}{2} \log 3 - \log (1-x)^2$$

c. A. $\begin{cases} x > 0 \\ 2-x > 0 \\ x-1 > 0 \\ (1-x)^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \\ x > 1 \\ \forall x \neq 1 \end{cases}$



$$1 < x < 2$$

$$\log 2 + \frac{1}{2} \log (2x-x^2) - 2 \log (x-1) = \frac{1}{2} \log 3 - 2 \log (x-1)$$

$$2 \log 2 + \log (2x-x^2) = \log 3$$

$$\log 4 + \log (2x-x^2) = \log 3$$

$$\log (8x-4x^2) = \log 3$$

$$8x-4x^2 = 3$$

$$4x^2-8x+3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{4} = \begin{cases} - & \frac{1}{2} \text{ non accett.} \\ + & \frac{3}{2} \text{ accett.} \end{cases}$$

$$(1-x)^2 = (x-1)^2$$

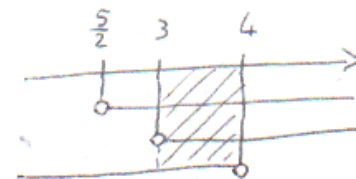
$$\begin{aligned} \log (1-x)^2 &= \\ &= \log (x-1)^2 = \\ &= 2 \log (x-1) \end{aligned}$$

Disequazioni logaritmiche

$$\log_3 \log_3 (2x-5) < 0$$

$$\begin{cases} \log_3 (2x-5) > 0 \\ \log_3 \log_3 (2x-5) < \log_3 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-5 > 0 \\ \log_3 (2x-5) > \log_3 1 \\ \log_3 (2x-5) < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x-5 > 1 \\ \log_3 (2x-5) < \log_3 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x > 6 \\ 2x-5 < 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x > 3 \\ 2x < 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x > 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

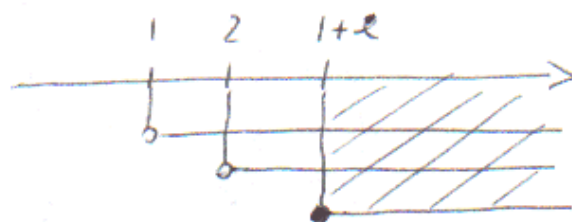


$$S: 3 < x < 4$$

$$\log \log (x-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} \log (x-1) > 0 \\ \log \log (x-1) \geq \log 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log (x-1) > \log 1 \\ \log (x-1) \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 > 1 \\ \log (x-1) \geq \log e \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x-1 \geq e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x \geq 1+e \end{cases}$$



$$S: \quad x \geq 1+e$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2) + \log_2(x-2) \leq -2 \log_4(x+1)$$

$$\frac{\log_2(x^2+2)}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_2(x-2) \leq -2 \frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}$$

$$-\log_2(x^2+2) + \log_2(x-2) \leq -\log_2(x+1)$$

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+1) \leq \log_2(x^2+2)$$

$$\log_2(x^2-x-2) \leq \log_2(x^2+2)$$

$$x^2-x-2 \leq x^2+2$$

$$x \geq -4 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x > 2 \\ x \geq -4 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x > 2}$$

C.A.

$$\begin{cases} x^2+2 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow x > 2$$

$$\begin{cases} \frac{\log_2(x+2)}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)} \leq 0 \\ \log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 > 0 \end{cases}$$

1° diseq. $\frac{\log_2(x+2)}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)} \leq 0$

$$N > 0$$

C.A.

$$\log_2(x+2) > 0$$

$$x > -2$$

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow x > -1$$

$$D > 0$$

C.A.

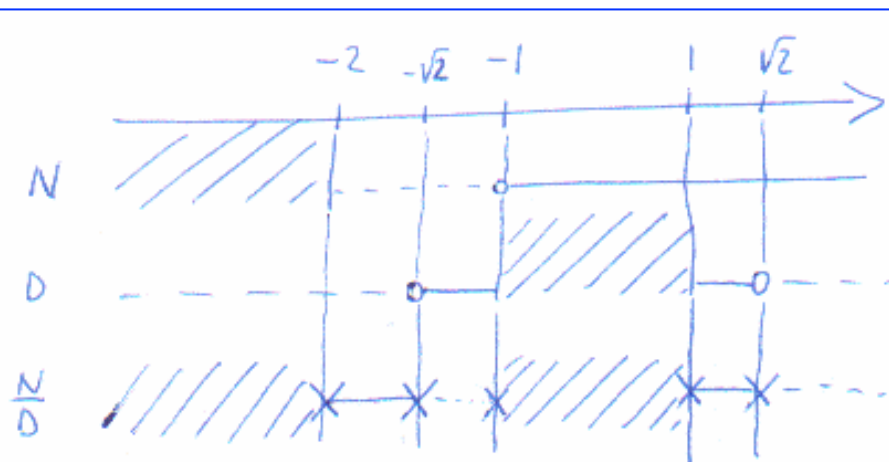
$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) > 0$$

$$x < -1 \vee x > 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$-\sqrt{2} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{2}$$



$$-\sqrt{2} < x < -1 \vee x > \sqrt{2}$$

2^a diseq. $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 > 0$

$t = \log_2 x$

$t^2 - 3t + 2 > 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$t < 1 \quad \vee \quad t > 2$

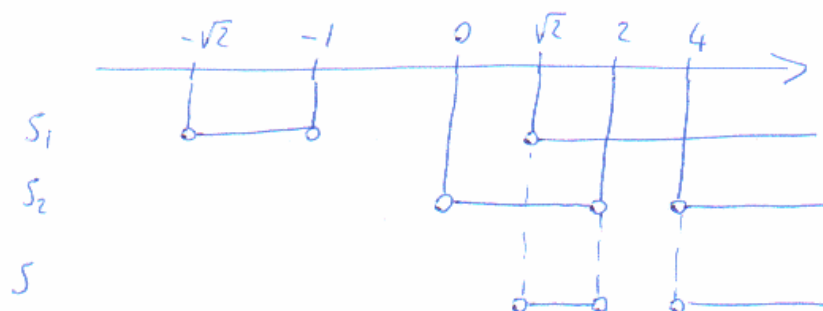
$\log_2 x < 1 \quad \vee \quad \log_2 x > 2$

$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < \log_2 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > \log_2 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \end{cases}$

$0 < x < 2 \quad \vee \quad x > 4$

Soluzioni del sistema:



$\sqrt{2} < x < 2 \quad \vee \quad x > 4$

$$\begin{cases} \frac{2 - \log_{\frac{1}{2}} x}{3 + \log_2 x} \leq 0 \\ \log_{16} \frac{x+1}{2x-1} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1ª diseq.

$$\frac{2 + \log_2 x}{3 + \log_2 x} \leq 0$$

C.A. $x > 0$

$$N > 0$$

$$2 + \log_2 x > 0$$

$$\log_2 x > \log_2 2^{-2}$$

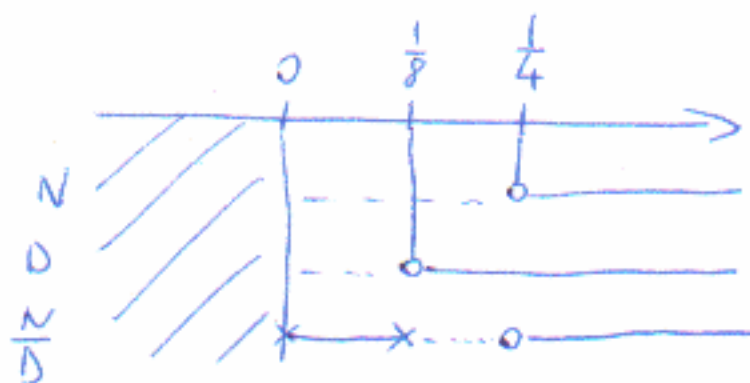
$$x > \frac{1}{4}$$

$$D > 0$$

$$3 + \log_2 x > 0$$

$$\log_2 x > \log_2 2^{-3}$$

$$x > \frac{1}{8}$$



$$\frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4}$$

2° diseq.

$$\log_{16} \frac{x+1}{2x-1} > \frac{1}{2}$$

$$\text{C.A.} \quad \frac{x+1}{2x-1} > 0 \quad x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2}$$

$$\log_{16} \frac{x+1}{2x-1} > \log_{16} 4$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{x+1}{2x-1} - 4 > 0 \end{cases}$$

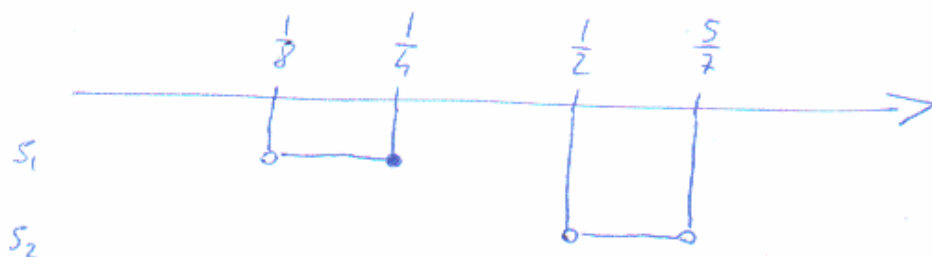
$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{-7x+5}{2x-1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{7x-5}{2x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{7} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$$

Soluzioni del sistema:



$$S = \emptyset$$

$$\frac{\log_3 X + 1}{\log_3 X - 1} - \frac{\log_3 X + 2}{\log_3 X - 2} + 3 \leq 0$$

$$t = \log_3 X$$

$$\frac{t+1}{t-1} - \frac{t+2}{t-2} + 3 \leq 0$$

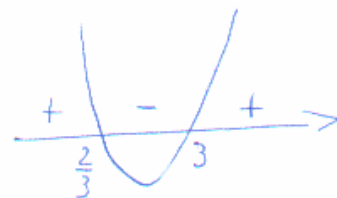
$$\frac{\cancel{t^2} - 2t + t - 2 - \cancel{t^2} - 2t + t + 2 + 3t^2 - 6t - 3t + 6}{(t-1)(t-2)} \leq 0$$

$$\frac{3t^2 - 11t + 6}{(t-1)(t-2)} \leq 0$$

$$N > 0$$

$$3t^2 - 11t + 6 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm 7}{6} = \begin{matrix} - & \frac{2}{3} \\ + & 3 \end{matrix}$$

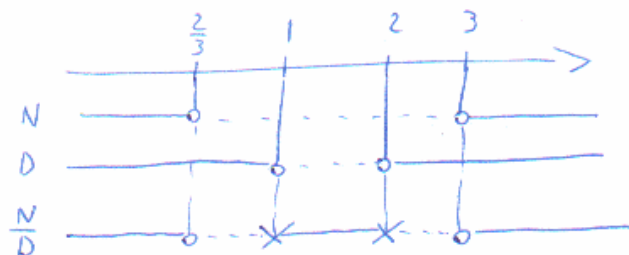


$$t < \frac{2}{3} \quad \vee \quad t > 3$$

$$D > 0$$

$$(t-1)(t-2) > 0$$

$$t < 1 \quad \vee \quad t > 2$$



$$\frac{2}{3} \leq t < 1 \quad \vee \quad 2 < t \leq 3$$

$$\frac{2}{3} \leq \log_3 x < 1 \quad \vee \quad 2 < \log_3 x \leq 3$$

$$\text{c.A. } x > 0$$

$$\log_3 3^{\frac{2}{3}} \leq \log_3 x < \log_3 3 \quad \vee \quad \log_3 9 < \log_3 x \leq \log_3 27$$

$$\boxed{\sqrt[3]{9} \leq x < 3 \quad \vee \quad 9 < x \leq 27}$$

Equazioni esponenziali
risolubili con i logaritmi

$$1 + 9^{x-1} = \frac{8}{3} + 3^{x-1} - 3^{x-2}$$

$$1 + \frac{1}{9} \cdot 3^{2x} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x - \frac{1}{9} \cdot 3^x \quad t = 3^x$$

$$1 + \frac{1}{9} t^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} t - \frac{1}{9} t$$

$$9 + t^2 = 24 + 3t - t$$

$$t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16} = 1 \pm 4 = \begin{matrix} -3 \\ 5 \end{matrix}$$

$$t = -3 \rightarrow 3^x = -3 \text{ impossibile}$$

$$t = 5 \rightarrow 3^x = 5 \rightarrow x = \log_3 5$$

$$\frac{1}{7^x + 1} + \frac{7^x}{49^x - 1} = \frac{2 \cdot 7^x - 1}{7^x - 1}$$

$$t = 7^x$$

$$\frac{1}{t+1} + \frac{t}{t^2-1} = \frac{2t-1}{t-1}$$

$$t \neq -1 \quad t \neq 1$$

$$\frac{t-1+t}{(t+1)(t-1)} = \frac{2t^2-t+2t-1}{(t+1)(t-1)}$$

$$\cancel{2t-x} = 2t^2 - t + \cancel{2t-x}$$

$$t(2t-1) = 0$$

$$t_1 = 0 \rightarrow 7^x = 0 \text{ impossibile}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \rightarrow 7^x = \frac{1}{2} \rightarrow \log 7^x = \log \frac{1}{2}$$

$$x \log 7 = -\log 2$$

$$x = -\frac{\log 2}{\log 7}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{x-1} - \left(\frac{4}{9} \right)^{x+1} \right] \cdot \frac{27}{2} = \frac{4^{x-1}}{9^x}$$

$$\left[\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x - \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} \right] \cdot \frac{27}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} \quad t = \left(\frac{2}{3} \right)^x$$

$$\left[\frac{3}{2} t - \frac{4}{9} t^2 \right] \cdot \frac{27}{2} = \frac{1}{4} t^2$$

$$\frac{81}{4} t - 6 t^2 - \frac{1}{4} t^2 = 0$$

$$81t - 25t^2 = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{81}{25}$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^x = 0 \quad \text{impossibile}$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^x = \frac{81}{25}$$

$$\log \left(\frac{2}{3} \right)^x = \log \frac{81}{25}$$

$$x \log \frac{2}{3} = \log \frac{81}{25}$$

$$x = \frac{\log \frac{81}{25}}{\log \frac{2}{3}} = \frac{\log 81 - \log 25}{\log 2 - \log 3}$$

$$3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 2^{2x-1}$$

$$3^x + 15 \cdot 3^x = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x}$$

$$16 \cdot 3^x = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x}$$

$$32 \cdot 3^x = 2^{2x}$$

$$\log(32 \cdot 3^x) = \log 2^{2x}$$

$$\log 32 + \log 3^x = 2x \log 2$$

$$\log 2^5 + x \log 3 = 2x \log 2$$

$$5 \log 2 = x (2 \log 2 - \log 3)$$

$$x = \frac{5 \log 2}{2 \log 2 - \log 3}$$

$$2 \cdot 3^{1-x} + 2^{x+2} = \sqrt{3^{1-2x}} + 10 \sqrt{4^{x-1}}$$

$$6 \cdot 3^{-x} + 4 \cdot 2^x = 3^{\frac{1-2x}{2}} + 10 \cdot 2^{2 \cdot \frac{x-1}{2}}$$

$$6 \cdot 3^{-x} + 4 \cdot 2^x = \sqrt{3} \cdot 3^{-x} + 10 \cdot 2^{x-1}$$

$$(6-\sqrt{3}) \cdot 3^{-x} = (5-4) \cdot 2^x$$

$$6-\sqrt{3} = 2^x \cdot 3^x$$

$$6-\sqrt{3} = 6^x \rightarrow \log 6^x = \log(6-\sqrt{3}) \rightarrow x \log 6 = \log(6-\sqrt{3}) \rightarrow x = \frac{\log(6-\sqrt{3})}{\log 6}$$

$$8^x = 4^{x-3} \cdot 3$$

$$2^{3x} = \frac{3}{64} 2^{2x}$$

$$2^{2x} \left(2^x - \frac{3}{64} \right) = 0$$

$$2^{2x} = 0 \quad \text{impossibile}$$

$$2^x = \frac{3}{64}$$

$$\rightarrow x \log 2 = \log 3 - \log 64$$

$$x = \frac{\log 3 - 6 \log 2}{\log 2}$$

$$9^{x-1} + 2 \cdot 5^{1-2x} = 3^{2x-3} + 25^{1-x}$$

$$3^{2x-2} + 10 \cdot 5^{-2x} = \frac{1}{27} \cdot 3^{2x} + 5^{2-2x}$$

$$\frac{1}{9} \cdot 3^{2x} + 10 \cdot 5^{-2x} = \frac{1}{27} \cdot 3^{2x} + 25 \cdot 5^{-2x}$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right) \cdot 3^{2x} = 15 \cdot 5^{-2x}$$

$$\frac{2}{27} \cdot 3^{2x} = 15 \cdot 5^{-2x}$$

$$3^{2x} \cdot 5^{2x} = 81 \cdot \frac{5}{2}$$

$$15^{2x} = 81 \cdot \frac{5}{2}$$

$$\log 15^{2x} = \log 81 \cdot \frac{5}{2}$$

$$2x \log 15 = \log 81 + \log 5 - \log 2$$

$$x = \frac{\log 81 + \log 5 - \log 2}{2 \log 15}$$

$$3 \cdot 8^x = 3^x$$

$$\log(3 \cdot 8^x) = \log 3^x$$

$$\log 3 + \log 8^x = x \log 3$$

$$\log 3 + x \log 8 = x \log 3$$

$$\log 3 = x (\log 3 - \log 8)$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 8}$$

$$\frac{5^x - 4}{5^x - 1} + \frac{4}{25^x - 5^x} = 0$$

$$t = 5^x$$

$$\frac{t-4}{t-1} + \frac{4}{t^2-t} = 0$$

$$t \neq 0 \quad t \neq 1$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0$$

$$t = 2 \rightarrow 5^x = 2 \rightarrow x = \log_5 2$$

$$4^{2-x} - 5^{x-1} = 5^{x+1} - \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$16 \cdot 2^{-2x} - \frac{1}{5} \cdot 5^x = 5 \cdot 5^x - \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x}$$

$$\left(16 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-2x} = \left(5 + \frac{1}{5}\right) \cdot 5^x$$

$$\frac{33}{2} \cdot 2^{-2x} = \frac{26}{5} \cdot 5^x$$

$$\frac{165}{52} = 20^x \rightarrow \log 20^x = \log \frac{165}{52} \rightarrow x \log 20 = \log \frac{165}{52}$$

$$x = \frac{\log 165 - \log 52}{\log 20} = \frac{\log 165 - \log 52}{\log 5 + \log 4}$$

$$\sqrt{49^{x+1}} + 7^{x-1} = 5^x$$

$$7^{2 \cdot \frac{x+1}{2}} + 7^{x-1} = 5^x$$

$$7 \cdot 7^x + \frac{1}{7} \cdot 7^x = 5^x$$

$$\frac{50}{7} \cdot 7^x = 5^x$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = \frac{7}{50}$$

$$\log\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log \frac{7}{50} \quad \rightarrow \quad x \log \frac{7}{5} = \log \frac{7}{50}$$

$$x = \frac{\log 7 - \log 50}{\log 7 - \log 5} = \frac{\log 7 - \log 5 - 1}{\log 7 - \log 5}$$

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad t = 2^x$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$t_{1,2} = 4 \pm 1 = \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$$

$$2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3$$

$$2^x = 5 \rightarrow x = \log_2 5$$

$$9^x - 11 \cdot 3^x + 28 = 0$$

$$3^x = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 4 \\ 7 \end{matrix}$$

$$3^x = 4 \rightarrow x = \log_3 4$$

$$3^x = 7 \rightarrow x = \log_3 7$$

Disequazioni esponenziali
risolubili con i logaritmi

$$2^{x+1} \geq 5^{1-x}$$

$$\log 2^{x+1} \geq \log 5^{1-x}$$

$$(x+1) \log 2 \geq (1-x) \log 5$$

$$x \log 2 + \log 2 \geq \log 5 - x \log 5$$

$$x (\log 2 + \log 5) \geq \log 5 - \log 2$$

$$x \log 10 \geq \log \frac{5}{2}$$

$$x \geq \log \frac{5}{2}$$

$$3^{x+2} < 4^{2x+1}$$

$$9 \cdot 3^x < 4 \cdot 16^x$$

$$\log (9 \cdot 3^x) < \log (4 \cdot 16^x)$$

$$\log 9 + x \log 3 < \log 4 + x \log 16$$

$$x (\log 3 - \log 16) < \log 4 - \log 9$$

$$x (\log 16 - \log 3) > \log 9 - \log 4$$

$$x > \frac{\log 9 - \log 4}{\log 16 - \log 3}$$

$$\frac{2^{x-1} \cdot 4^{1+x}}{6^{1-x}} < 3$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 2^x \cdot 4 \cdot 4^x}{6 \cdot \frac{1}{6^x}} < 3$$

$$\frac{1}{3} \cdot 48^x < 3$$

$$48^x < 9$$

$$\log 48^x < \log 9$$

$$x \log 48 < \log 9$$

$$x < \frac{\log 9}{\log 48}$$

$$5^{2x} > 10^{x+1}$$

$$\log 5^{2x} > \log 10^{x+1}$$

$$2x \log 5 > x+1$$

$$x(2 \log 5 - 1) > 1$$

$$x > \frac{1}{2 \log 5 - 1}$$

$$2^{2x+1} \geq 5^{1-x}$$

$$(2x+1) \log 2 \geq (1-x) \log 5$$

$$x(2 \log 2 + \log 5) \geq \log 5 - \log 2$$

$$x \geq \frac{\log 5 - \log 2}{\log 5 + \log 4}$$

$$3^{x+1} - 2^{x-1} > 3^x$$

$$3 \cdot 3^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x > 3^x$$

$$2 \cdot 3^x > \frac{1}{2} \cdot 2^x$$

$$4 \cdot 3^x > 2^x$$

$$\log 4 + x \log 3 > x \log 2$$

$$x(\log 3 - \log 2) > -\log 4$$

$$x > \frac{-\log 4}{\log 3 - \log 2}$$

$$x > \frac{\log 4}{\log 2 - \log 3}$$

$$64 - 2 \cdot 3^x > 45 + 3^{2-x} \quad t = 3^x$$

$$64 - 2t > 45 + \frac{9}{t}$$

$$19t - 2t^2 - 9 > 0$$

$$2t^2 - 19t + 9 < 0$$

$$\Delta = 289 = 17^2$$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm 17}{4} = \left\langle \frac{1}{2} \right.$$

$$\frac{1}{2} < t < 9$$

$$\frac{1}{2} < 3^x < 3^2$$

$$\log \frac{1}{2} < x \log 3 < 2 \log 3$$

$$-\frac{\log 2}{\log 3} < x < 2$$

$$5 \cdot 3^{1+x} + 6^{1-x} > 0$$

$$15 \cdot 3^x + \frac{6}{6^x} > 0$$

$$18^x + \frac{6}{15} > 0$$

$$18^x > -\frac{2}{5}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$2 \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{3-x} < 205 \quad t = 5^x$$

$$2t + \frac{500}{t} - 205 < 0$$

$$2t^2 - 205t + 500 < 0 \quad \Delta = 195^2$$

$$t_{1,2} = \frac{205 \pm 195}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{5}{2} \\ 100 \end{array} \right.$$

$$\frac{5}{2} < t < 100 \rightarrow \frac{5}{2} < 5^x < 100 \rightarrow \log 5 - \log 2 < x \log 5 < 2$$

$$1 - \frac{\log 2}{\log 5} < x < \frac{2}{\log 5}$$

$$\frac{5^x - 10}{5^x - 5} > 0$$

$$N > 0$$

$$5^x - 10 > 0$$

$$5^x > 10$$

$$x \log 5 > 1$$

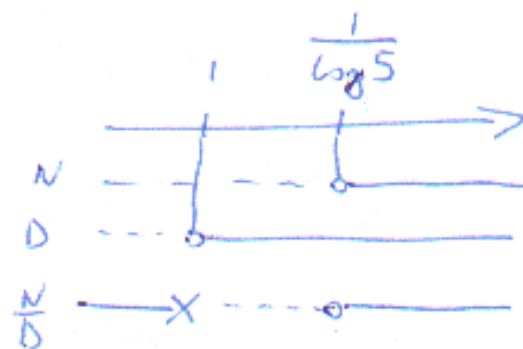
$$x > \frac{1}{\log 5} \approx 1,43$$

$$D > 0$$

$$5^x - 5 > 0$$

$$5^x > 5$$

$$x > 1$$



$$x < 1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{\log 5}$$

$$\frac{2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2}{1 - 3^x} > 0$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2}{1 - 3^x} > 0$$

$$N > 0 \quad t = 2^x$$

$$3t^2 - 5t + 2 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \frac{2}{3} \quad 1$$

$$t < \frac{2}{3} \quad \vee \quad t > 1$$

$$2^x < \frac{2}{3} \quad \vee \quad 2^x > 2^0$$

$$x < \log_2 \frac{2}{3} \quad \vee \quad x > 0$$

$$x < 1 - \log_2 3 \quad \vee \quad x > 0$$

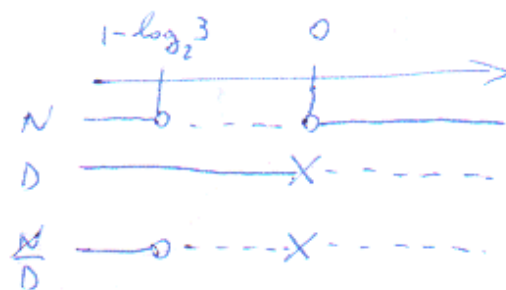
$$D > 0$$

$$1 - 3^x > 0$$

$$-3^x > -1$$

$$3^x < 3^0$$

$$x < 0$$



$$x < 1 - \log_2 3$$

$$\frac{5^x - 10}{5^x - 5} > 0$$

$$N > 0$$

$$5^x - 10 > 0$$

$$5^x > 10$$

$$x \log 5 > 1$$

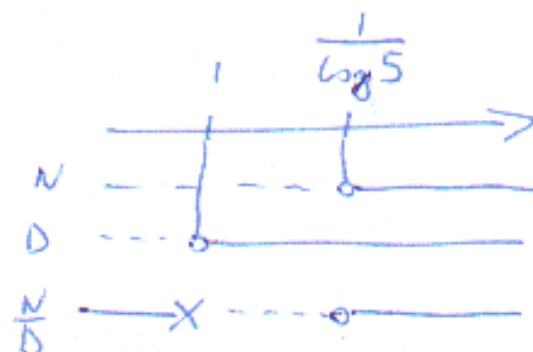
$$x > \frac{1}{\log 5} \approx 1,43$$

$$D > 0$$

$$5^x - 5 > 0$$

$$5^x > 5$$

$$x > 1$$



$$x < 1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{\log 5}$$

$$6^{x+1} + 6^x + 6^{x-1} < 6$$

$$\left(6 + 1 + \frac{1}{6}\right) 6^x < 6$$

$$6^x < \frac{36}{43}$$

$$x < 2 - \log_6 43$$

$$9^x - 10 \cdot 3^x + 25 \geq 0$$

$$(3^x - 5)^2 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{2^x - 4^x - 1}{3^{-x} - 25 \cdot 3^x} < 0$$

$$N > 0$$

$$-4^x + 2^x - 1 > 0$$

$$t = 2^x$$

$$-t^2 + t - 1 > 0$$

$$t^2 - t + 1 < 0$$

ϕ

$$D > 0$$

$$3^{-x} - 25 \cdot 3^x > 0$$

$$t = 3^x$$

$$\frac{1}{t} - 25t > 0$$

$$1 - 25t^2 > 0$$

$$t^2 < \frac{1}{25}$$

$$-\frac{1}{5} < t < \frac{1}{5}$$

$$t < \frac{1}{5}$$

$$3^x < \frac{1}{5}$$

$$x < -\frac{\log 5}{\log 3}$$

