

Matematica

Geometria Analitica

La retta

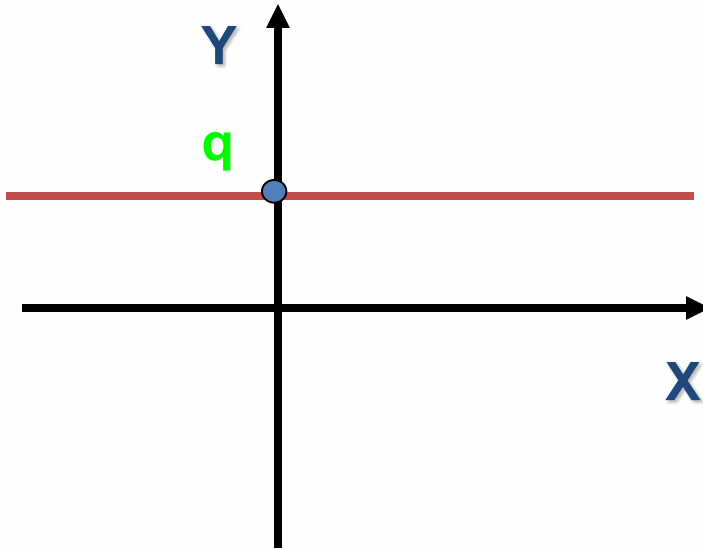
Autore: prof. **Pappalardo Vincenzo**

docente di **Matematica e Fisica**



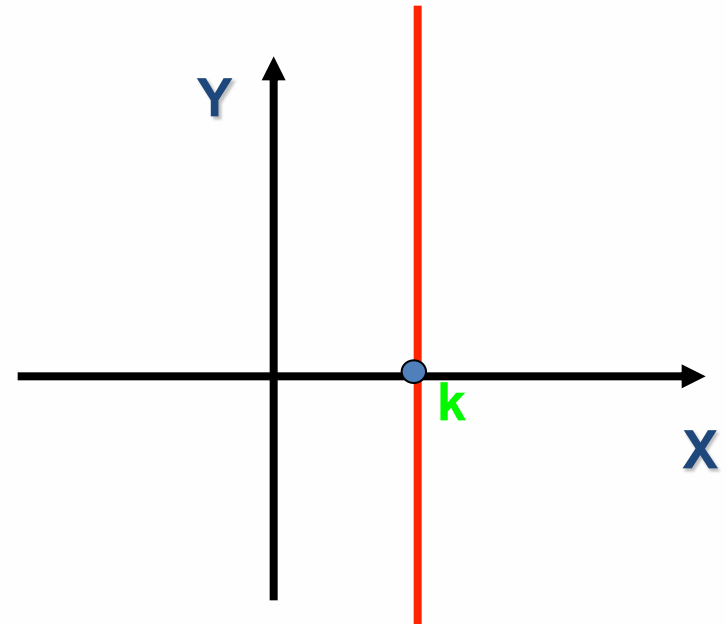
EQUAZIONE DELLA RETTA

✧ Rette parallele agli assi cartesiani



EQUAZIONE DELLA RETTA
PARALLELA ALL' ASSE X

$$y = q$$



EQUAZIONE DELLA RETTA
PARALLELA ALL' ASSE Y

$$x = k$$

Da queste prime considerazioni, deduciamo subito la seguente definizione:

DICESI **LUOGO GEOMETRICO** UN INSIEME DI
PUNTI CHE GODONO TUTTI DI UNA STESSA
PROPRIETA' .

Pertanto:

- ❖ Tutti i punti appartenenti alla retta $y=q$ hanno la stessa ordinata
- ❖ Tutti i punti appartenenti alla retta $x=k$ hanno la stessa ascissa.

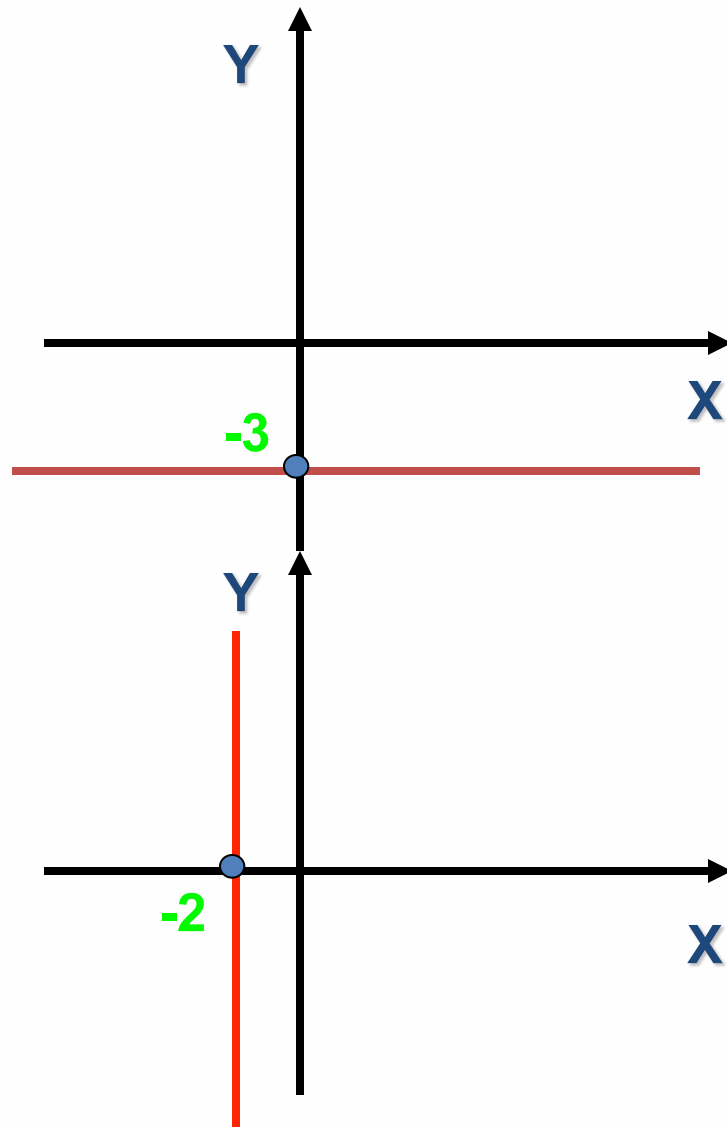
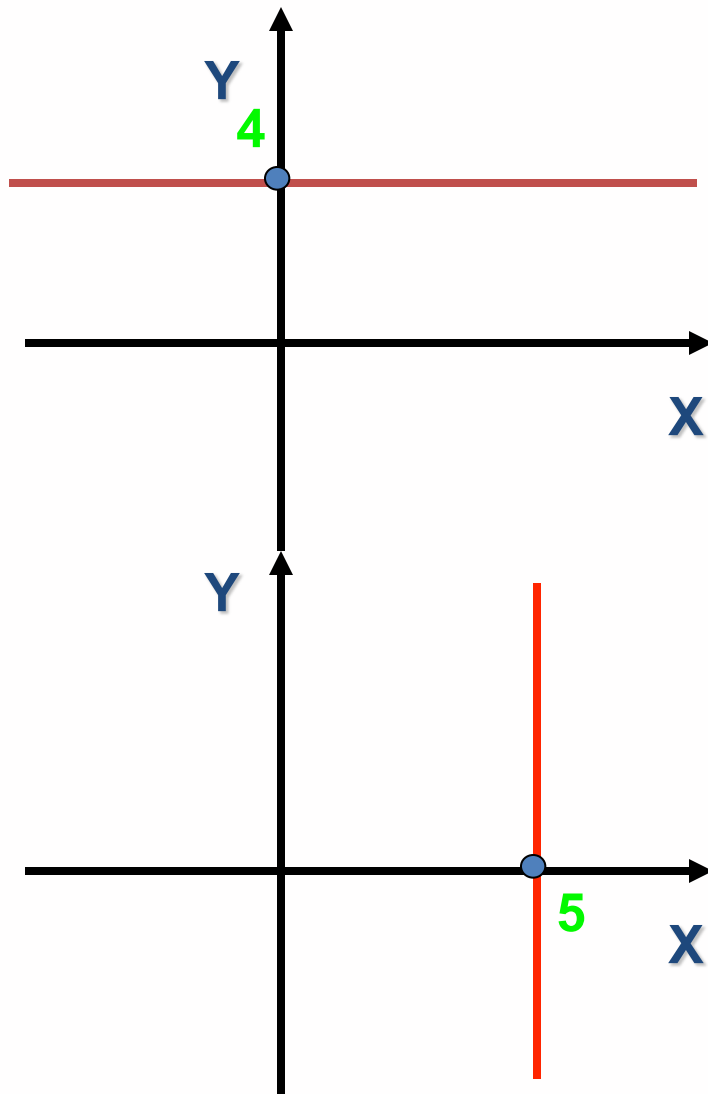
Disegnare le rette descritte dalle seguenti equazioni:

$$y = 4$$

$$y = -3$$

$$x = 5$$

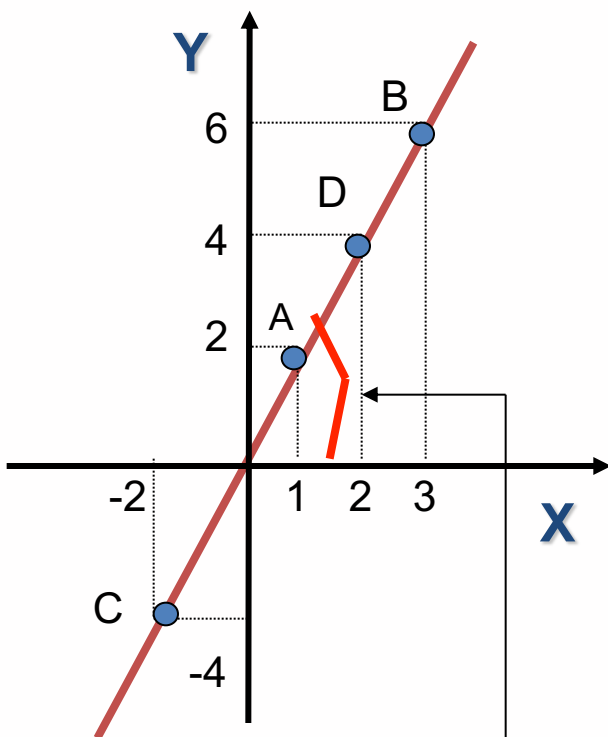
$$x = -2$$



➤ Retta passante per l'origine

Se rappresentiamo i seguenti punti su un sistema di assi cartesiani: $A = (1; 2)$ $B = (3; 6)$ $C = (-2; -4)$ $D = (2; 4)$

Notiamo che appartengono tutti alla stessa retta.



In base alla definizione di luogo geometrico, questi punti devono godere tutti di una stessa proprietà.

PROPRIETA': il rapporto tra ordinata ed ascissa di ogni punto appartenente alla retta è costante:

$$\frac{y}{x} = m$$

VERIFICATE che $m = 2$

Dalla proprietà si ricava che:

$$y = mx$$



EQUAZIONE DI UNA RETTA
PASSANTE PER L'ORIGINE

Significato geometrico del coefficiente angolare m:

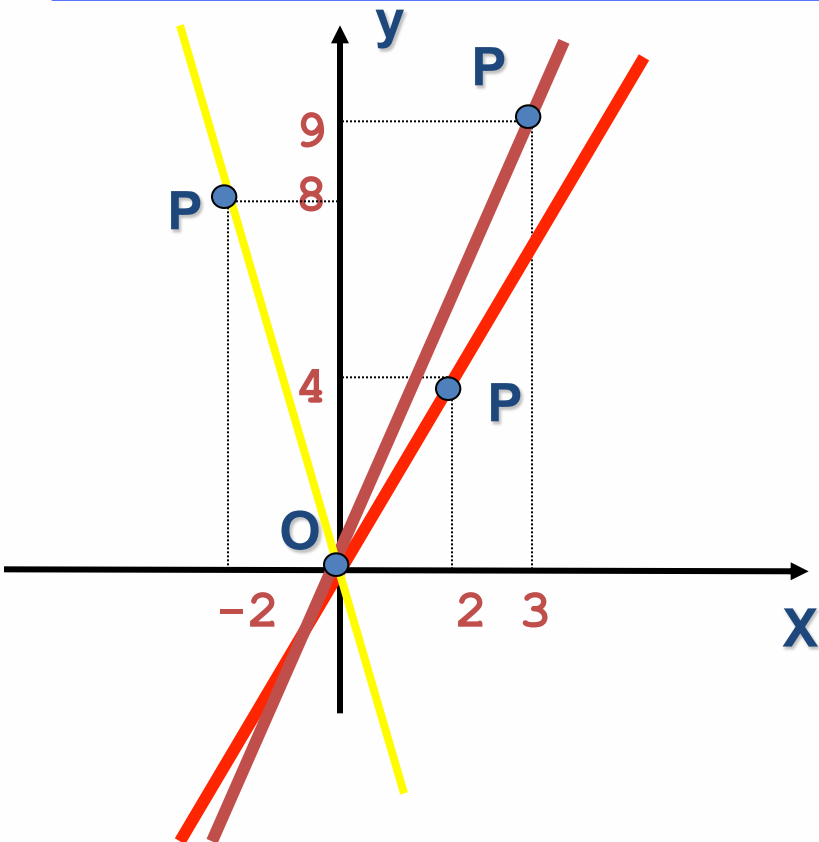
RAPPRESENTA LA PENDENZA DELLA RETTA

CONCLUSIONE

I punti appartenenti ad una stessa retta passante per l'origine, soddisfano tutti la stessa equazione $y = mx$

Notare

- ✓ Quanto maggiore è m tanto maggiore è la pendenza della retta
- ✓ Quando $m > 0$ la retta si trova tra il 1° e 3° quadrante;
Quando $m < 0$ la retta si trova tra il 2° e 4° quadrante



Procedura

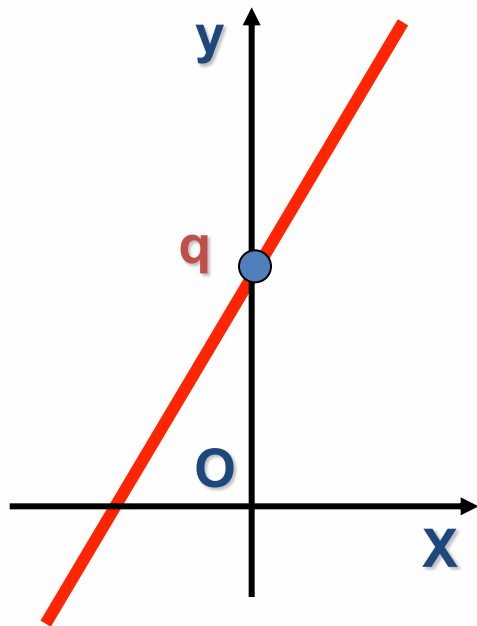
- ❑ Per disegnare una retta abbiamo bisogno di due punti
- ❑ Poiché la retta passa per l'origine, un punto è proprio l'origine degli assi $O=(0;0)$
- ❑ Il secondo punto viene determinato assegnando alla variabile indipendente x un valore arbitrario che va sostituito nell'equazione della retta determinando così il valore della variabile dipendente y . In questo modo otteniamo le coordinate del secondo punto $P = (x; y)$
- ❑ Si individua sul piano cartesiano il punto $P=(x; y)$
- ❑ Si disegna la retta passante per $O=(0;0)$ e $P=(x; y)$

Esempio

Disegnare le rette che hanno come equazione:

$$y = 2x \quad y = 3x \quad y = -4x$$

❖ Retta generica



EQUAZIONE DI UNA RETTA GENERICA in
forma esplicita

$$y = mx + q$$

q=intercetta perché rappresenta
l'intersezione della retta con l'asse y.

m=coefficiente angolare della retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ sono le coordinate di
due punti qualsiasi della retta.

EQUAZIONE DI UNA RETTA GENERICA in
forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

Rendiamo esplicita questa equazione, cioè risolviamola rispetto alla y:

$$by = -ax - c \implies y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \implies y = mx + q$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$q = -\frac{c}{b}$$

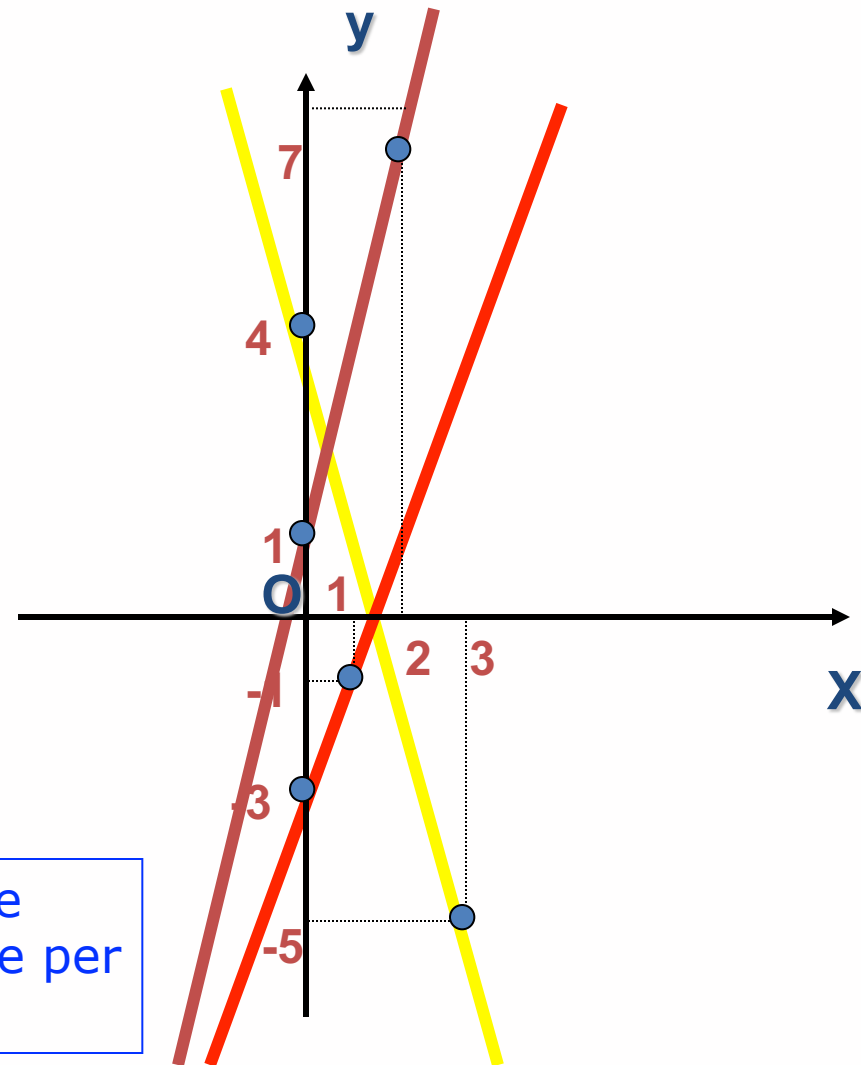
Disegnare le rette rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$y = 2x - 3 \quad y = 3x + 1 \quad y = -3x + 4$$

Procedura

- ❑ Per disegnare una retta abbiamo bisogno di due punti
- ❑ Poiché la retta interseca l'asse y in q , un punto è proprio q
- ❑ Il secondo punto viene determinato assegnando alla variabile indipendente x un valore arbitrario che va sostituito nell'equazione della retta determinando così il valore della variabile dipendente y . In questo modo otteniamo le coordinate del secondo punto $P = (x; y)$
- ❑ Si individuano sul piano cartesiano q e P
- ❑ Si disegna la retta passante per q e P

Per il coeff. ang. m valgono le stesse considerazioni fatte per la retta passante per l'origine.



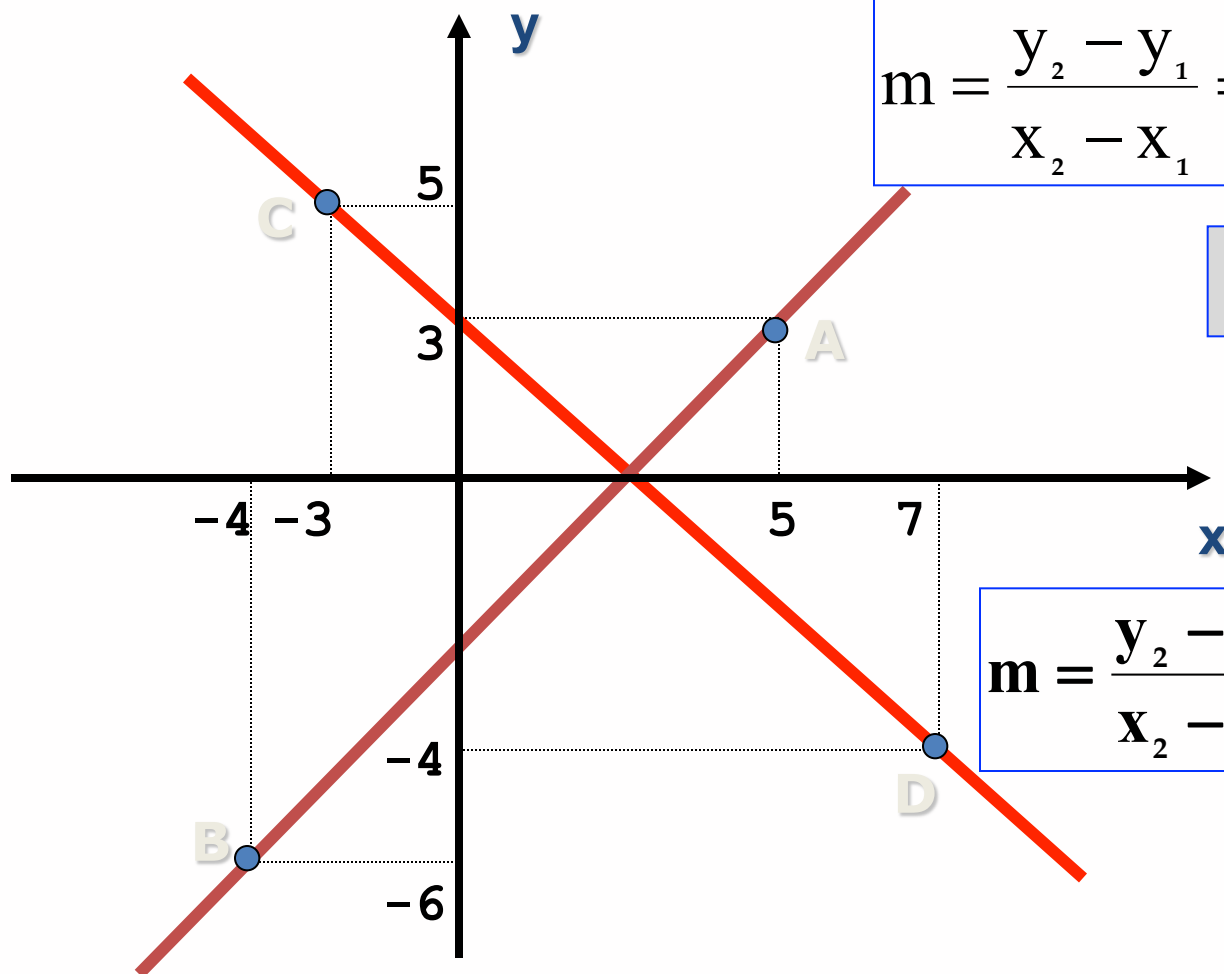
Calcolare la pendenza delle rette passanti
per i punti:

A=(5; 3) e B=(-4; -6)

C=(-3; 5) e D=(7; -4)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 3}{-4 - 5} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$m > 0$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 5}{7 - (-3)} = -\frac{9}{10}$$

$$m < 0$$

Calcolare il coefficiente angolare e l'intercetta delle seguenti rette in forma implicita.

$$2x + 3y - 4 = 0$$



$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = -4$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$$

$$q = -\frac{c}{b} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$5x - 3y + 3 = 0$$

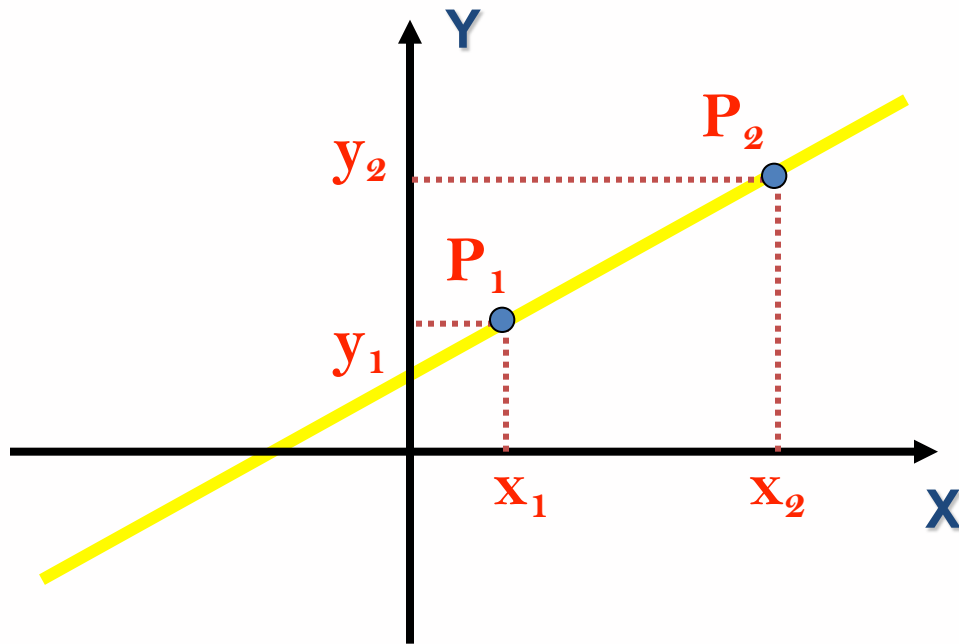


$$a = 5 \quad b = -3 \quad c = 3$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$q = -\frac{c}{b} = -\frac{3}{-3} = 1$$

DETERMINAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA RETTA



Disegniamo la retta
passante per due punti
noti

$$P_1 = (x_1; y_1) \text{ e } P_2 = (x_2; y_2)$$

EQUAZIONE DI UNA RETTA PASSANTE PER
DUE PUNTI

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Determinare l'equazione della retta passante per i seguenti punti: $P_1=(5; 3)$ $P_2=(-2; -5)$

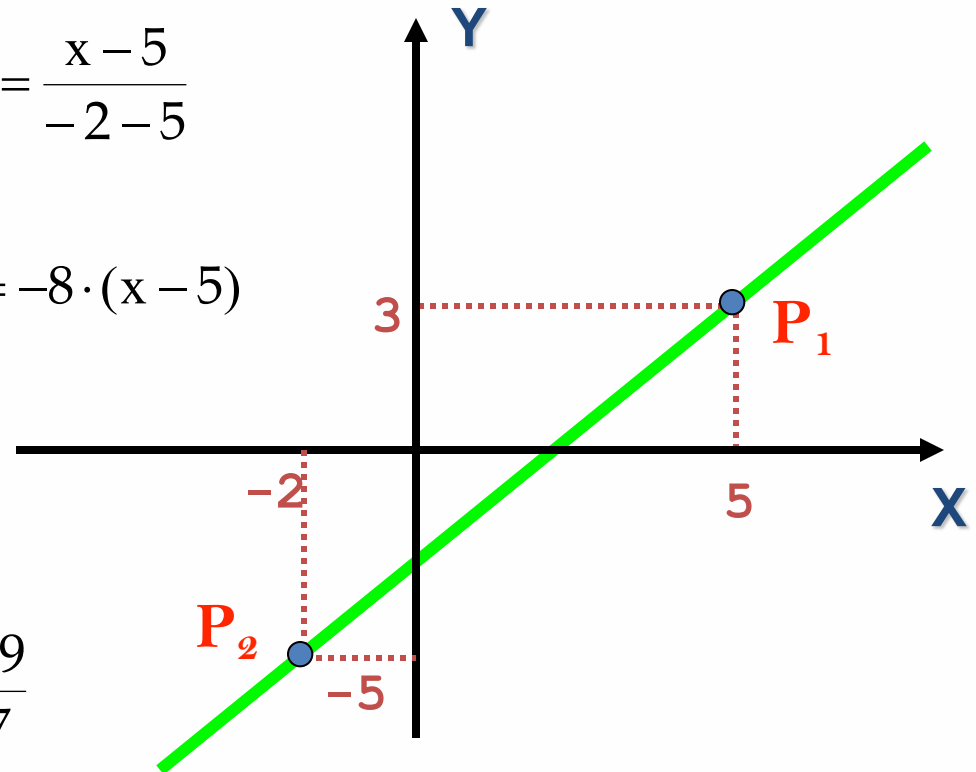
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \implies \frac{y - 3}{-5 - 3} = \frac{x - 5}{-2 - 5}$$

$$\frac{y - 3}{-8} = \frac{x - 5}{-7} \implies -7 \cdot (y - 3) = -8 \cdot (x - 5)$$

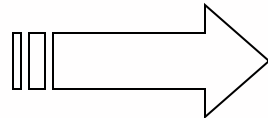
$$-7y + 21 = -8x + 40$$

$$7y = 8x - 40 + 21$$

$$7y = 8x - 19 \implies \frac{7y}{7} = \frac{8}{7}x - \frac{19}{7}$$



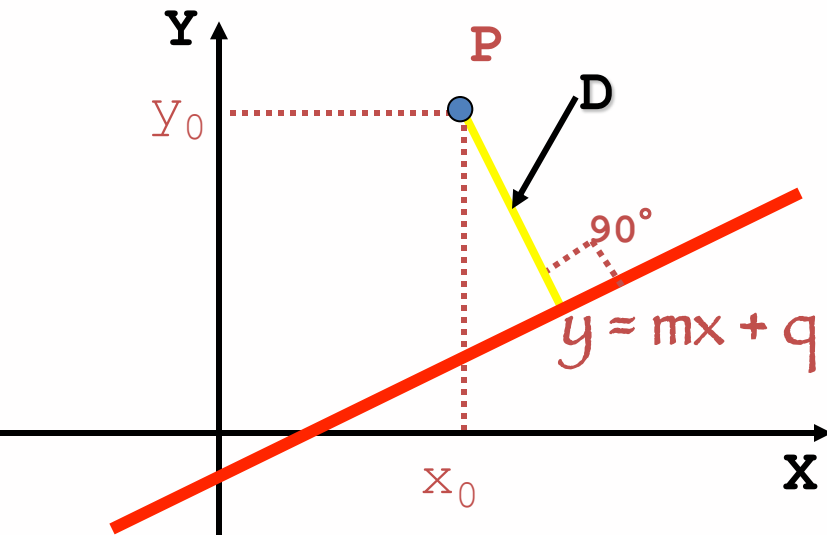
$$y = \frac{8}{7}x - \frac{19}{7}$$



EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE
PER I PUNTI P_1 E P_2

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Siano dati un punto $P=(x_0;y_0)$ e una retta di equazione $y=mx+q$



Definizione

Per distanza di un punto da una retta s' intende la perpendicolare condotta dal punto verso la retta.

$$D = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1 + m^2}}$$



DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA
ESPRESSA IN FORMA ESPlicita

$$y = mx + q$$

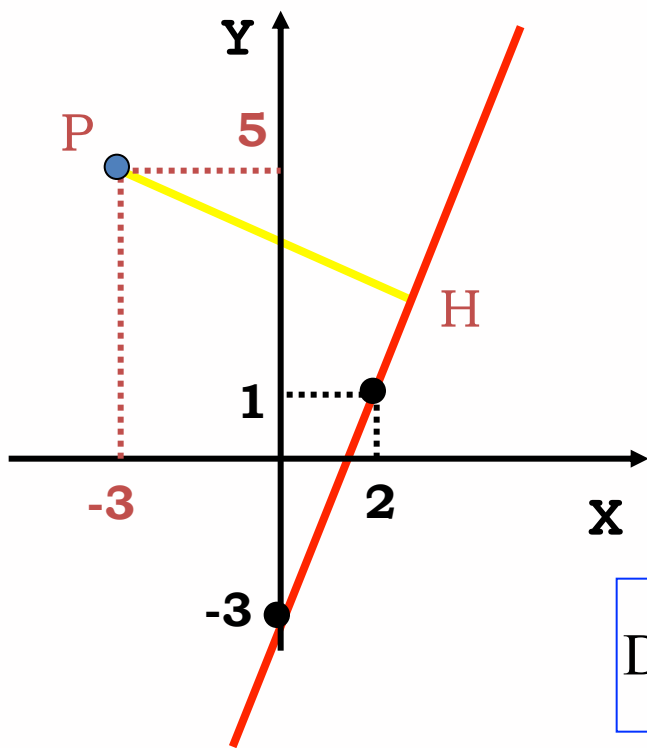
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA
ESPRESSA IN FORMA IMPLICITa

$$ax + by + c = 0$$

Sia dato il punto $P = (-3; 5)$ e la retta: $y = 2x - 3$ (forma esplicita),
 $2x - y - 3 = 0$ (stessa retta in forma implicita).
 Calcolare la distanza del punto dalla retta.



Rappresentiamo sugli assi cartesiani il punto $P = (-3; 5)$ e la retta $y = 2x - 3$

$$D = PH = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m &= 2 & q &= -3 \\ x_0 &= -3 & y_0 &= 5 \end{aligned}$$

$$D = PH = \frac{|-6 - 5 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-14|}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}} = 6,3$$

$$D = PH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a &= 2 & b &= -1 & c &= -3 \\ x_0 &= -3 & y_0 &= 5 \end{aligned}$$

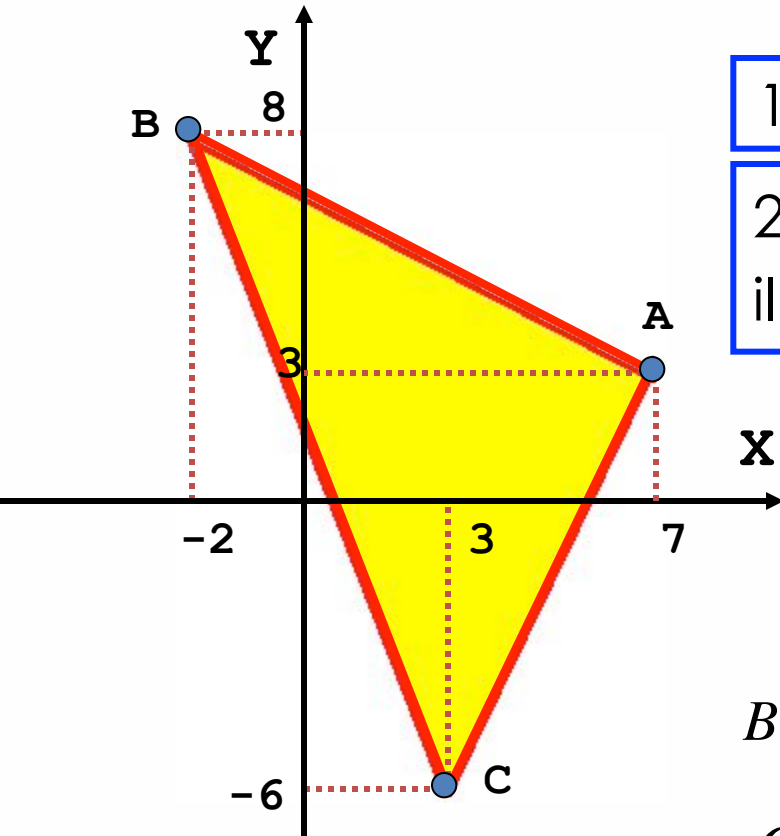
$$D = PH = \frac{|-6 - 5 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-14|}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}} = 6,3$$

Calcolare perimetro ed area del triangolo individuato dai punti
 $A=(7; 3)$ $B=(-2; 8)$ $C=(3; -6)$

Procedura

1. Disegnare il triangolo ABC

2. Calcolare i lati del triangolo e quindi il perimetro



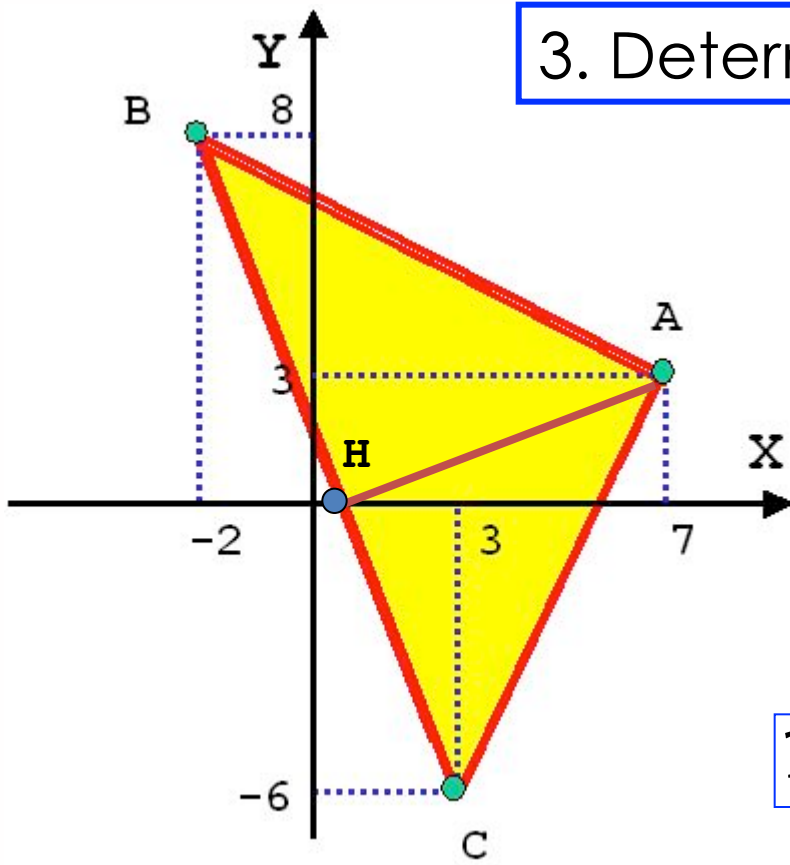
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 7)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{81 + 25} = 11,3$$

$$BC = \sqrt{(3 + 2)^2 + (-6 - 8)^2} = \sqrt{25 + 196} = 14,9$$

$$CA = \sqrt{(7 - 3)^2 + (3 + 6)^2} = \sqrt{16 + 81} = 9,8$$

$$P = AB + BC + CA = 11,3 + 14,9 + 9,8 = 36$$

3. Determinare l'equazione della retta **BC**



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 8}{-6 - 8} = \frac{x + 2}{3 + 2}$$

$$14x + 5y - 12 = 0$$

Equazione
della retta BC
in forma
implicita

4. Calcolare l'altezza **AH**

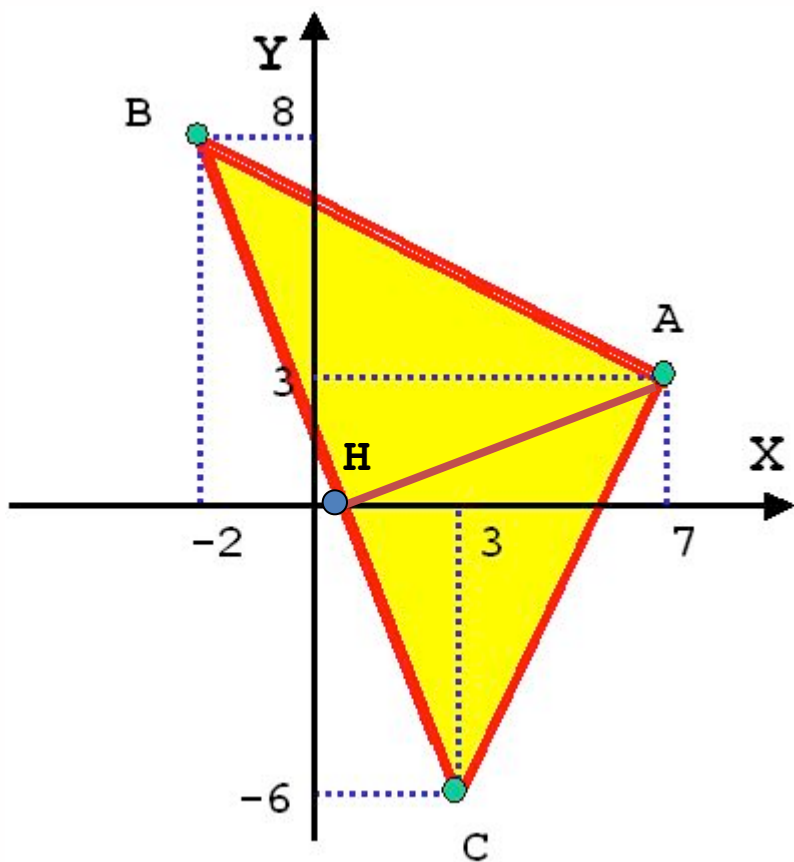
$$D = AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$AH = \frac{|98 + 15 - 12|}{\sqrt{14^2 + 5^2}} = \frac{|101|}{\sqrt{196 + 25}} = \frac{101}{\sqrt{221}} = 6,8$$

$$a=14 \quad b=5 \quad c=-12$$
$$x_0=7 \quad y_0=3$$

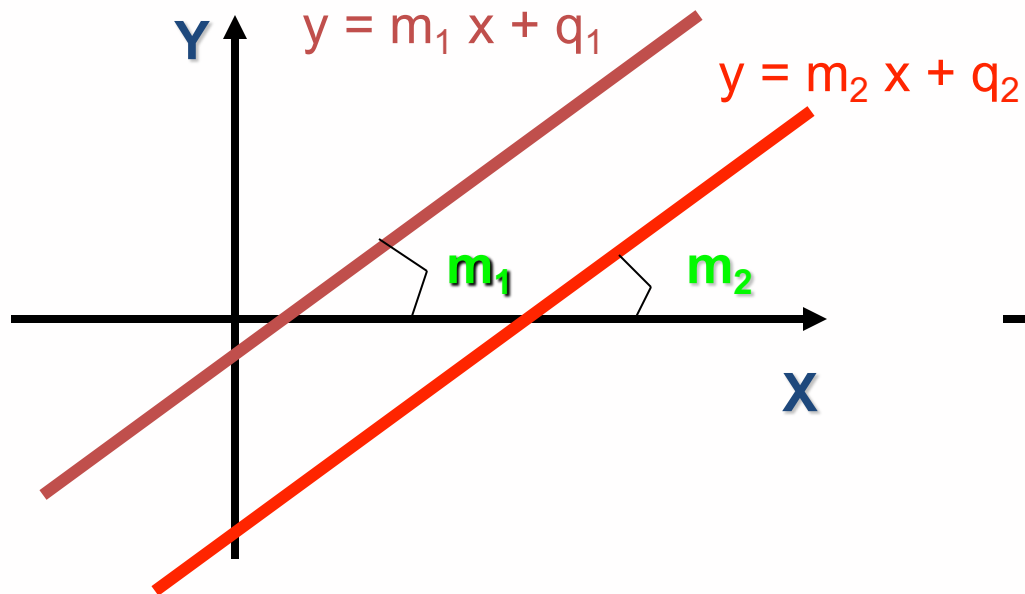
AH = Distanza del punto A dalla retta BC
 $14x + 5y - 12 = 0$

5. Calcolare l'area del triangolo **ABC**



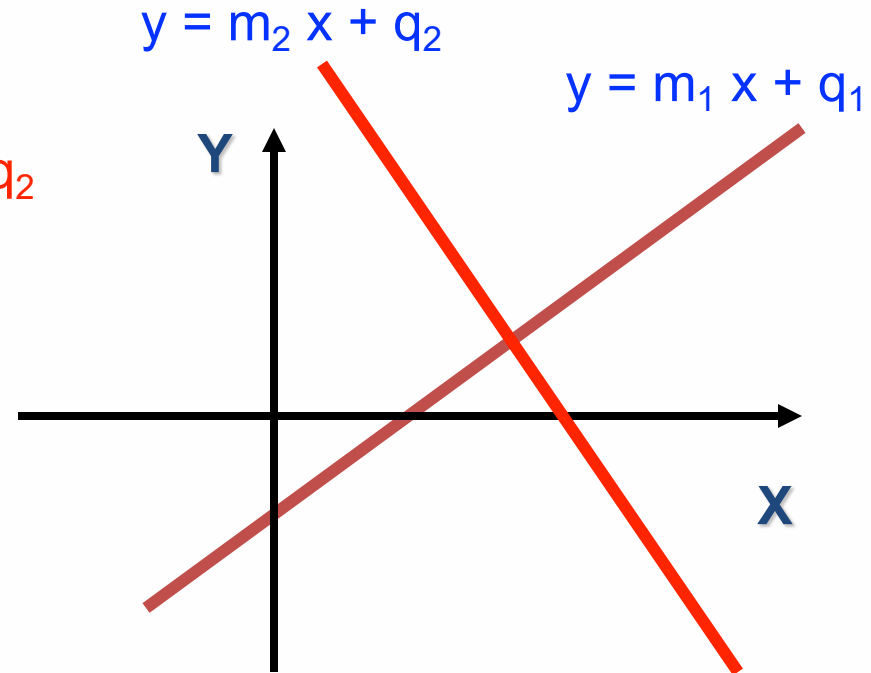
$$\text{AREA} = BC \cdot AH / 2 = (14,9 \cdot 6,8) / 2 = 50,7$$

RETTE PARALLELE E PERPENDICOLARI



CONDIZIONE DI PARALLELISMO

$$m_1 = m_2$$



CONDIZIONE DI
PERPENDICOLARITA'

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$

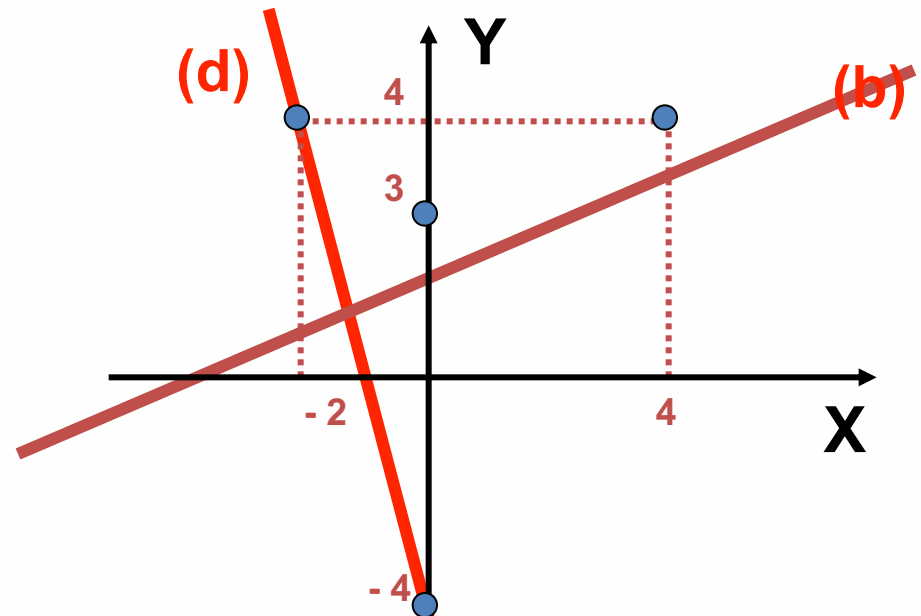
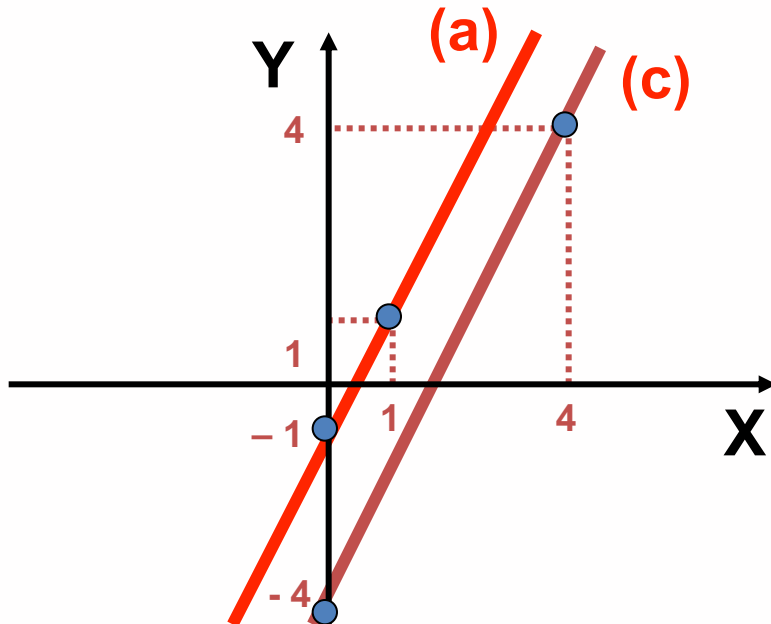
Individuare tra le seguenti rette quelle parallele e quelle perpendicolari:

a) $y=2x-1$ b) $y=(1/4)x+3$ c) $y=2x-4$ d) $y=-4x-4$

Le rette (a) e (c) sono parallele perché hanno lo stesso coefficiente angolare: Le rette (b) e (d) sono perpendicolari perché:

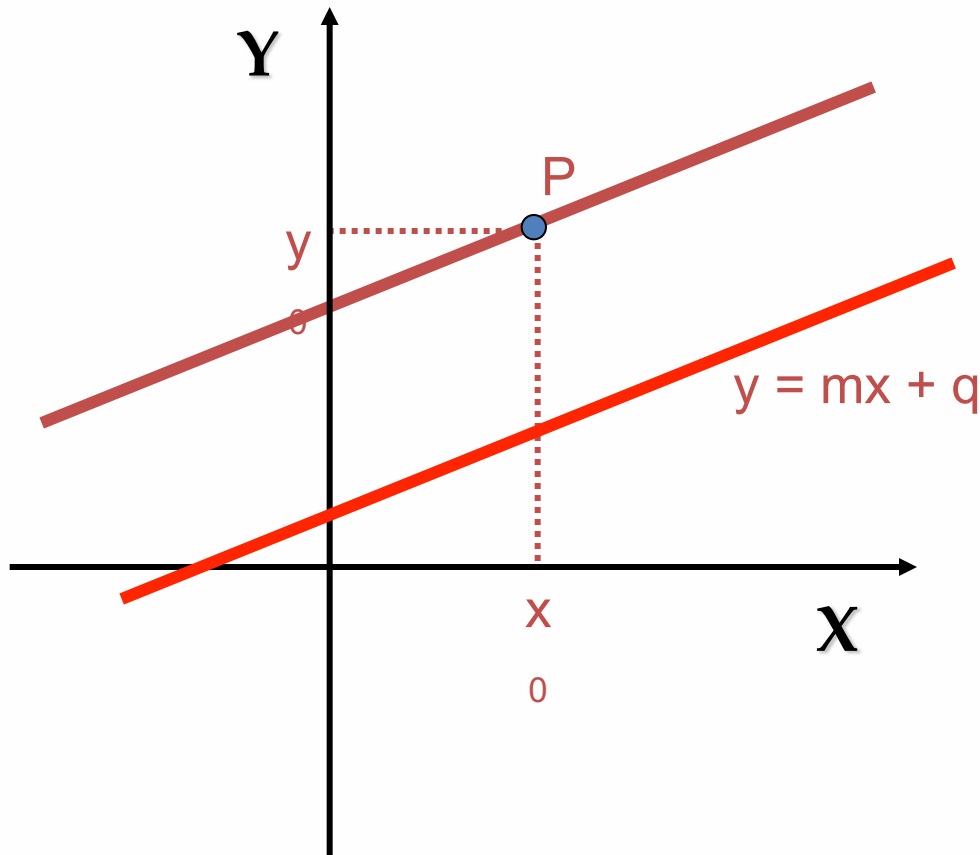
$$m = 2$$

$$m_1 \cdot m_2 = 1/4 \cdot (-4) = -1$$



RETTA PASSANTE PER UN PUNTO E PARALLELA A UNA RETTA DATA

Siano dati un punto $P=(x_0; y_0)$ e una retta $y=mx+q$

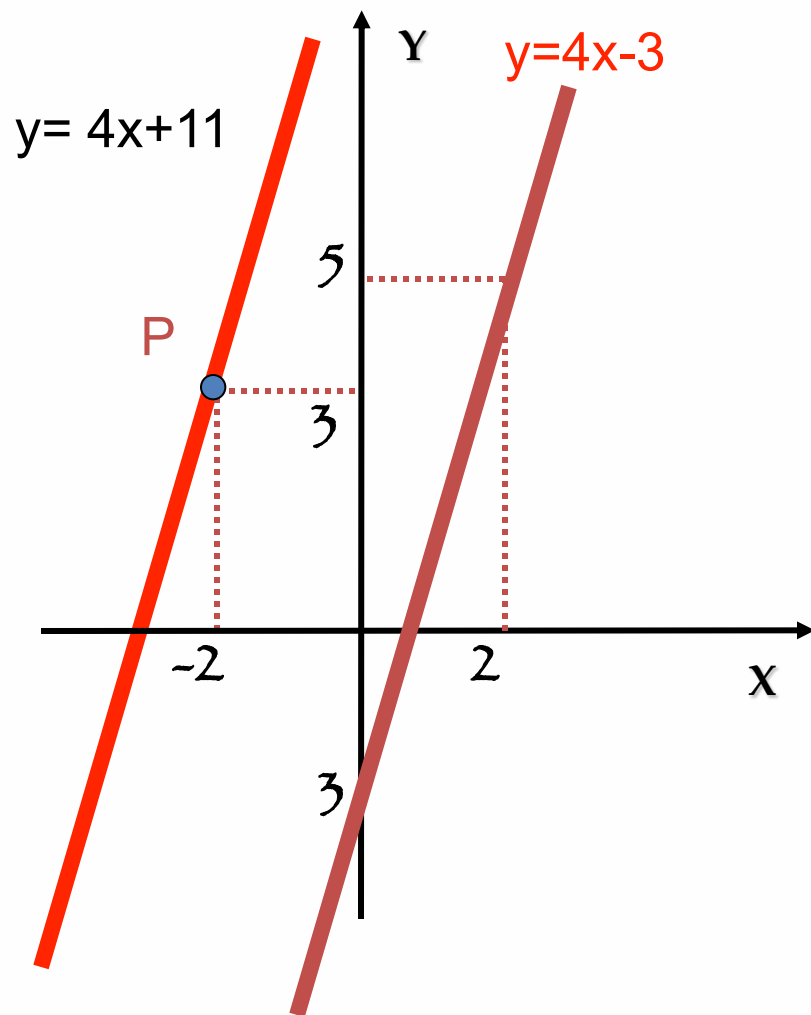


Equazione della retta
passante per $P=(x_0; y_0)$
e parallela alla retta

$$y = mx + q$$

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

Determinare l'equazione della retta passante per $P=(-2; 3)$ e parallela alla retta di equazione $y = 4x - 3$



Sostituire al posto di x_0 e y_0 le coordinate del punto P e al posto di m il coeff. angolare della retta $y = 4x - 3$:

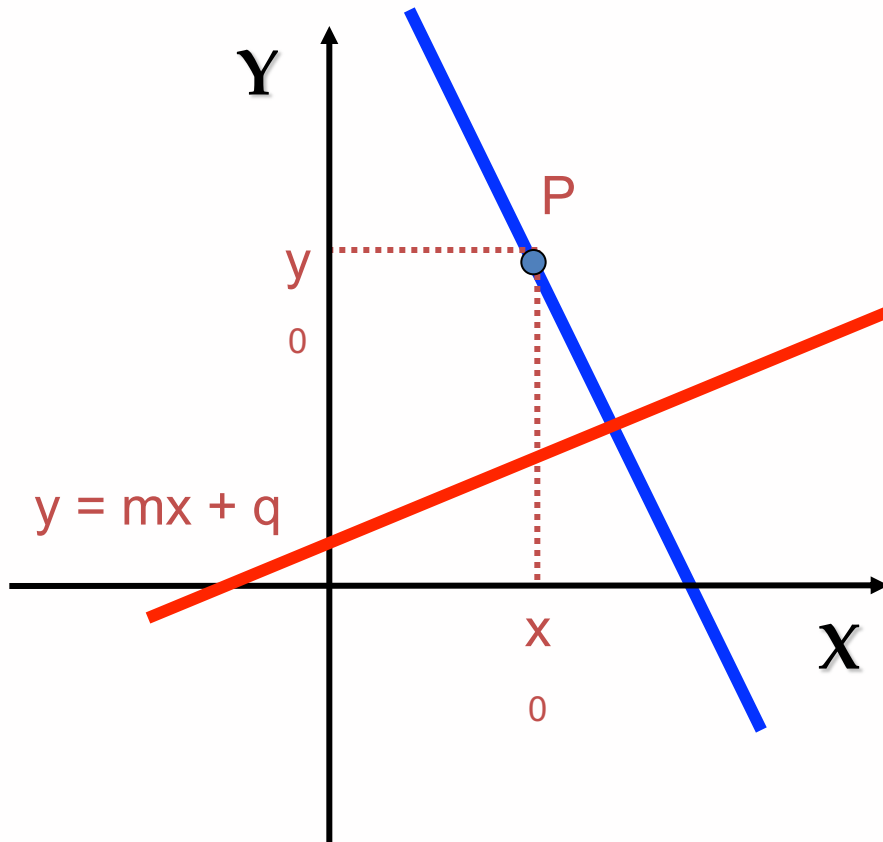
$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

$$y - 3 = 4(x + 2)$$

$$y = 4x + 11$$

RETTA PASSANTE PER UN PUNTO E PERPENDICOLARE A UNA RETTA DATA

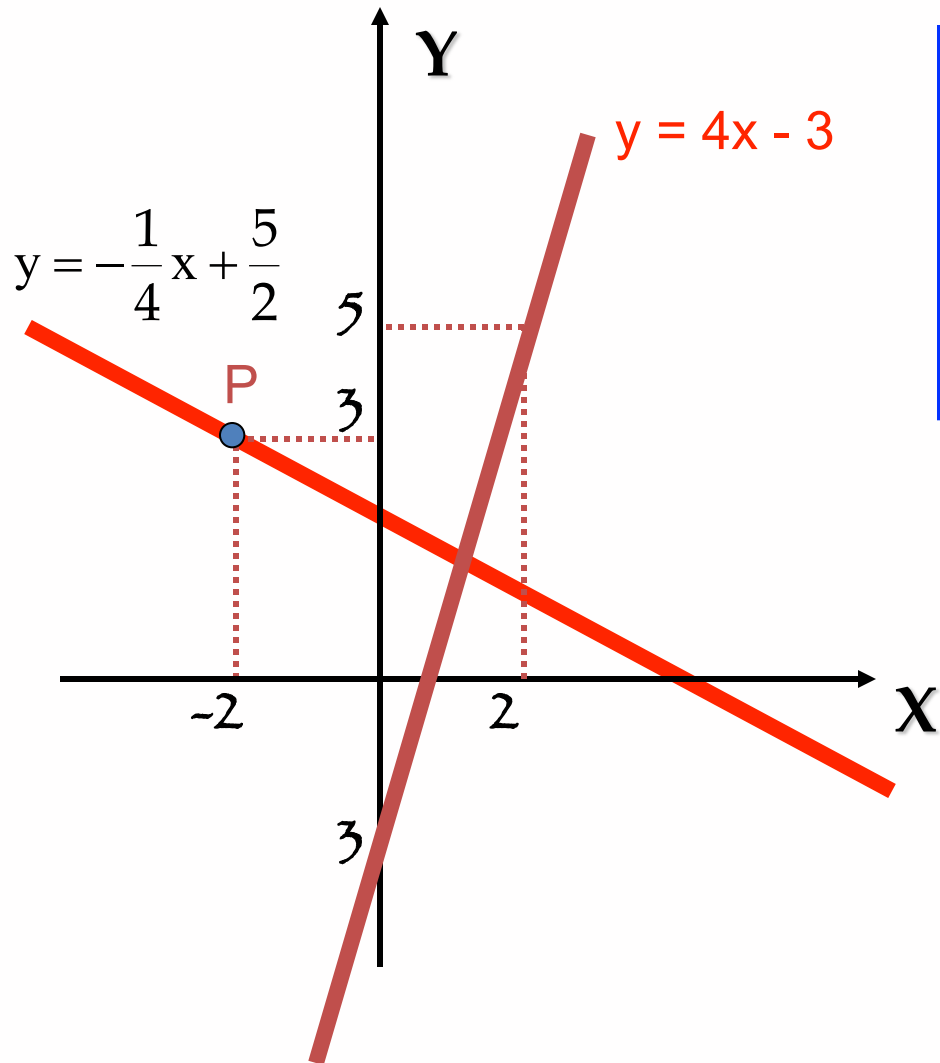
Siano dati un punto $P=(x_0; y_0)$ e una retta $y=mx+q$.



Equazione della retta
passante per $P = (x_0; y_0)$ e
perpendicolare a
 $y = mx + q$

$$y - y_0 = -1/m (x - x_0)$$

Determinare l'equazione della retta passante per $P=(-2; 3)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y = 4x - 3$



Sostituire al posto di x_0 e y_0 le coordinate del punto P e al posto di m il coeff. angolare della retta $y=4x-3$:

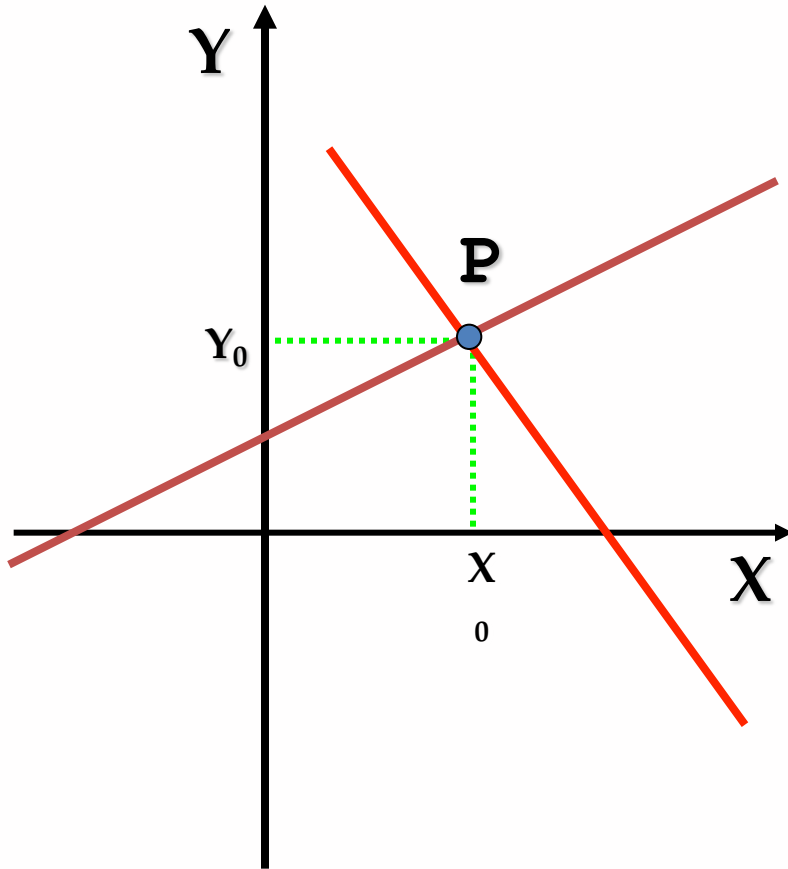
$$y - y_0 = -\frac{1}{m} (x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 2)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

INTERSEZIONE TRA DUE RETTE

Per determinare il punto d'intersezione $P=(x_0; y_0)$ tra due rette bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette:



Equazioni delle rette in forma
implicita

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Equazioni delle rette in forma
esplicita

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$$

Calcolare il punto d'intersezione tra le seguenti rette:

$$y = \frac{3}{2}x - 4 \qquad y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$

Per determinare il punto d'intersezione $P=(x_0; y_0)$ tra le due rette bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

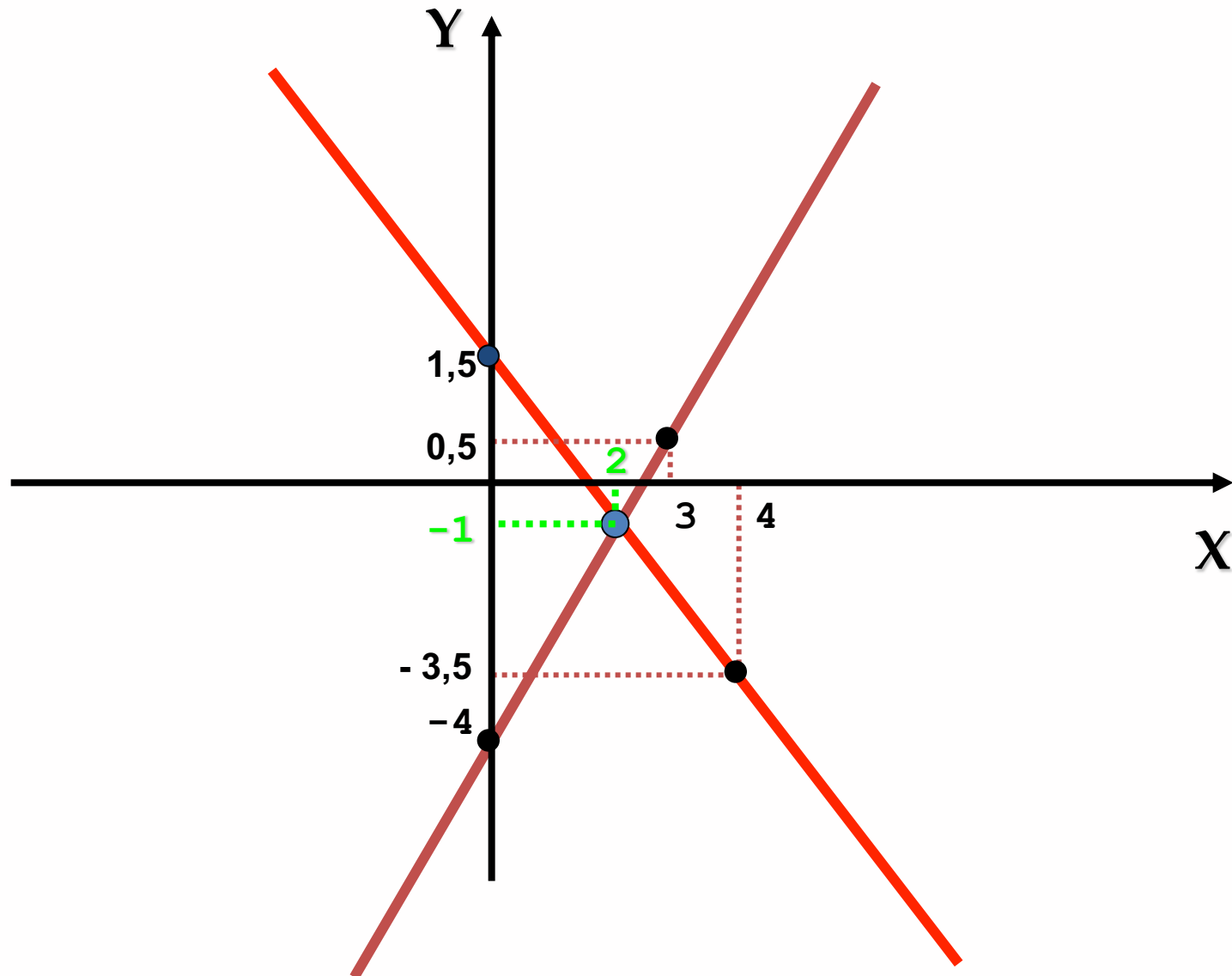
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Poiché le rette sono in forma esplicita, conviene applicare il metodo del confronto:

$$\frac{3}{2}x - 4 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \implies x = 2 \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Il punto d'intersezione tra le due rette è $P=(2;-1)$

Graficamente la situazione è la seguente:



Se le rette sono rappresentate da equazioni in forma implicita:

$$2x - 3y - 5 = 0 \quad -5x + 2y - 1 = 0$$

allora conviene applicare il metodo di Cramer (o il metodo di riduzione) per risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Si calcola il valore dei determinanti D , D_x , D_y :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & +2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-5) = -11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & +2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3) \cdot (1) = 13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (5) \cdot (-5) = 27$$

La soluzione è data
dalle seguenti formule

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{11} \quad y = \frac{D_y}{D} = -\frac{27}{11}$$

Calcolare le coordinate del baricentro del triangolo di vertici: $A=(-3,6)$, $B=(1;-4)$, $C=(5;4)$

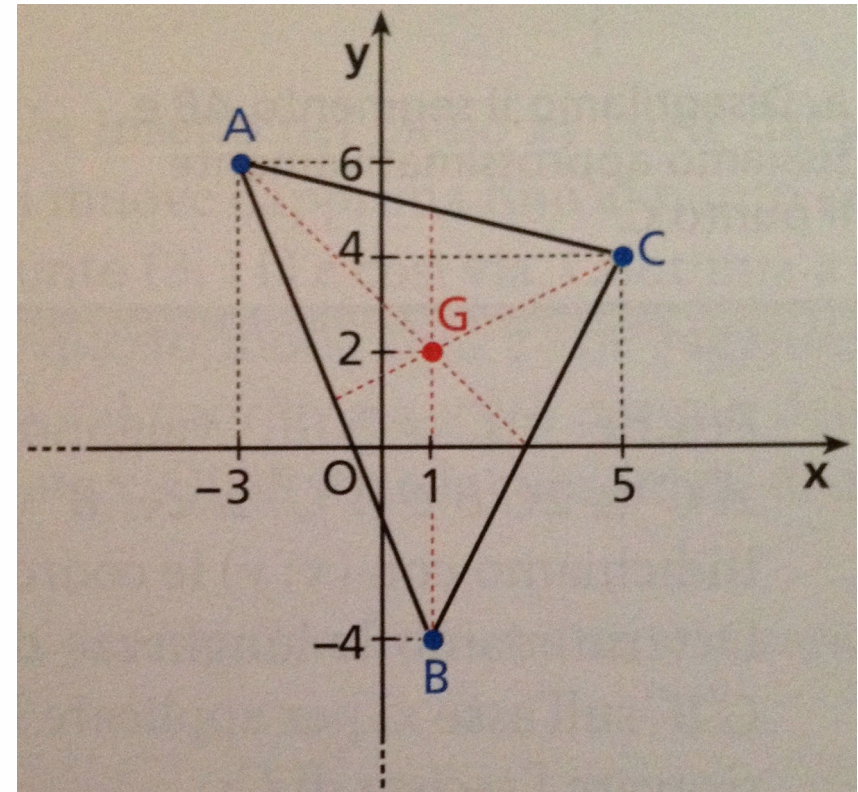
Disegniamo il triangolo.

Le coordinate del baricentro sono date dalle seguenti formule:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-3+1+5}{3} = 1$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6-4+4}{3} = 2$$

Il baricentro del triangolo ABC è il punto $G=(1;2)$

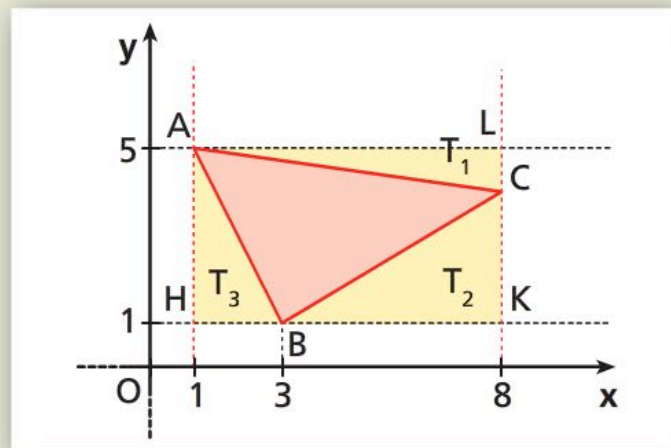


ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'area del triangolo di vertici $A(1; 5)$, $B(3; 1)$, $C(8; 4)$.

Tracciamo le parallele all'asse x passanti per A e per B e le parallele all'asse y passanti per A e per C . Le quattro parallele, incontrandosi, determinano un rettangolo $AHKL$.

Il rettangolo è formato dal triangolo ABC e dai triangoli rettangoli T_1 , T_2 , T_3 . Quindi possiamo determinare l'area del triangolo ABC sottraendo all'area del rettangolo l'area dei tre triangoli T_1 , T_2 , T_3 .



Calcoliamo l'area $\mathcal{A}$ del rettangolo $AHKL$:

$$\mathcal{A} = \overline{AH} \cdot \overline{HK} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Calcoliamo l'area di T_1 , T_2 , T_3 :

$$\mathcal{A}_{T_1} = \frac{\overline{LC} \cdot \overline{LA}}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2};$$

$$\mathcal{A}_{T_2} = \frac{\overline{CK} \cdot \overline{KB}}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2};$$

$$\mathcal{A}_{T_3} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$

L'area del triangolo ABC è

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AHKL) - (\mathcal{A}_{T_1} + \mathcal{A}_{T_2} + \mathcal{A}_{T_3}),$$

ossia:

$$\mathcal{A}(ABC) = 28 - \left(\frac{7}{2} + \frac{15}{2} + 4 \right) = 13.$$

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti $A(1; 4)$ e $B(-1; 3)$ e verifichiamo che il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B .

Applichiamo la formula generale per l'equazione di una retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

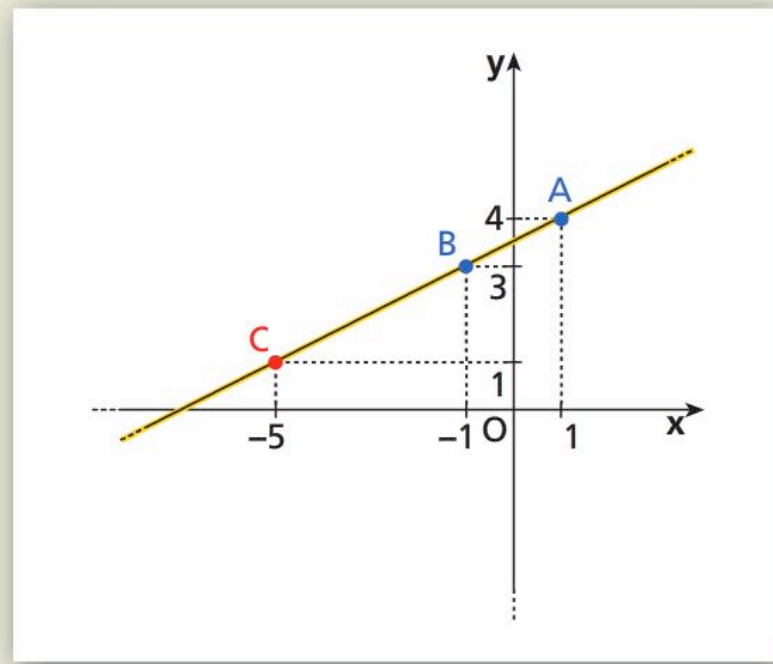
Sostituiamo a $(x_1; y_1)$ le coordinate di A e a $(x_2; y_2)$ le coordinate di B :

$$\begin{aligned}\frac{y - 4}{3 - 4} &= \frac{x - 1}{-1 - 1} \rightarrow -(y - 4) = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow \\ \rightarrow y &= \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

L'equazione richiesta è $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B perché appartiene alla retta passante per A e B , infatti le coordinate di C verificano l'equazione di tale retta:

$$y = \frac{1}{2}(-5) + \frac{7}{2} = 1.$$



Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P=(2,-5)$ e di coefficiente angolare $m=-3$.

L'equazione della retta generica è:

$$y = mx + q$$

Il coefficiente angolare è noto, mentre q non lo è. Per calcolare q imponiamo il passaggio della retta per P :

$$-5 = -3 \cdot 2 + q \rightarrow q = 1$$

In definitiva, l'equazione della retta è:

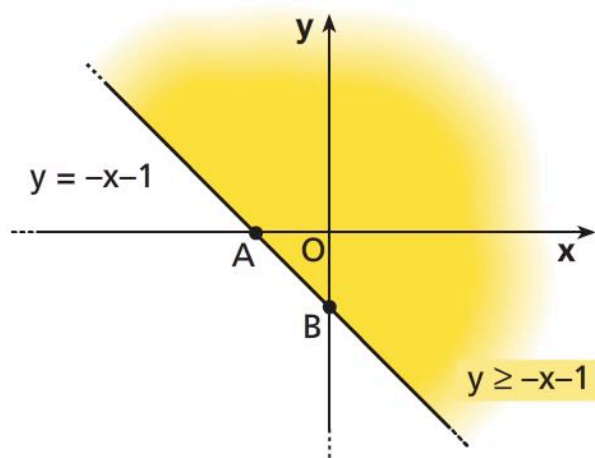
$$y = -3x + 1$$

ESERCIZIO GUIDA

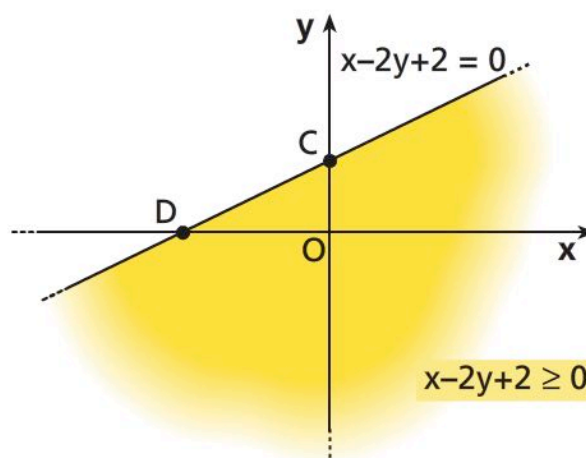
Rappresentiamo nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y \geq -x - 1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

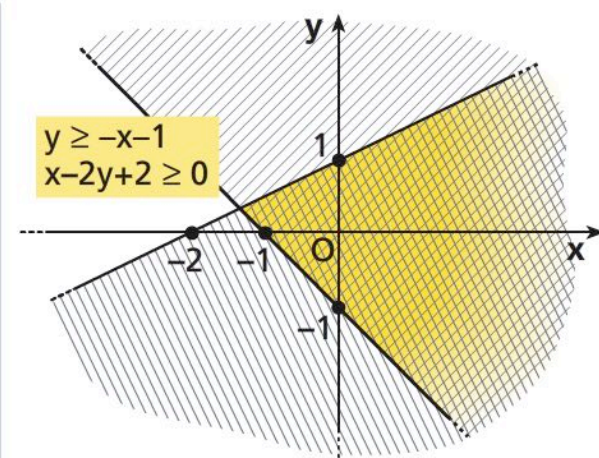
Il sistema rappresenta l'intersezione di due semipiani. Per individuarli disegniamo le rette di equazioni $y = -x - 1$ e $x - 2y + 2 = 0$, poi applichiamo il metodo del punto di prova.



a. Disegniamo la retta di equazione $y = -x - 1$, utilizzando i suoi punti di intersezione con gli assi: $A(-1; 0)$ e $B(0; -1)$. Osserviamo che le coordinate dell'origine soddisfano la disequazione, infatti $0 \geq -0 - 1$. Quindi le soluzioni della disequazione $y \geq -x - 1$ sono date dai punti del semipiano individuato dalla retta contenente O .



b. Disegniamo la retta di equazione $x - 2y + 2 = 0$, utilizzando i suoi punti di intersezione con gli assi: $C(0; 1)$ e $D(-2; 0)$. Le coordinate dell'origine soddisfano la disequazione $x - 2y + 2 \geq 0$. Quindi le soluzioni sono date dai punti del semipiano individuato dalla retta contenente O .



c. Le soluzioni del sistema $\begin{cases} y \geq -x - 1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$ sono rappresentate dai punti della parte di piano intersezione dei due semipiani precedenti.

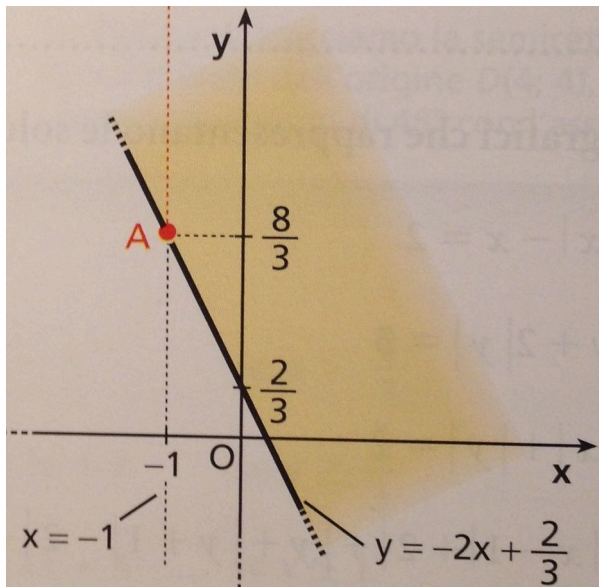
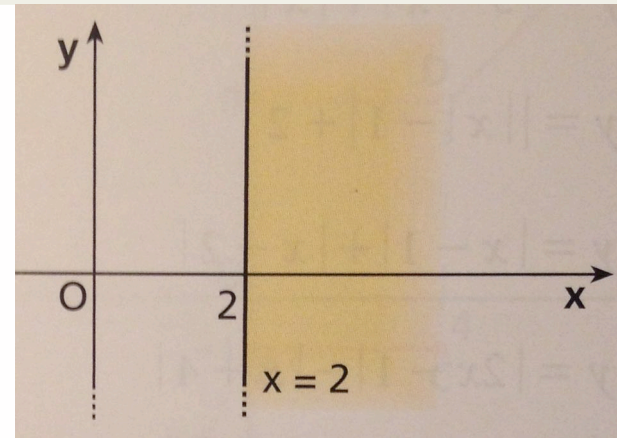
Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

a) $x \geq 2$

b) $6x + 3y - 2 \geq 0$

a) Tracciare la retta di equazione $x=2$.

Si osserva che le soluzioni sono rappresentate dai punti del semipiano costituito dalla retta e dai punti che hanno ascissa maggiore di 2.



b) Esplicitare la y : $y \geq -2x + 2/3$ e disegnare la retta $y = -2x + 2/3$.

Le soluzioni della disequazione sono rappresentate da tutti i punti del semipiano in cui, a parità di ascissa, l'ordinata è $\geq$ all'ordinata del punto che si trova sulla retta.

ESERCIZIO GUIDA

Data la retta r di equazione $2y + x - 8 = 0$, determiniamo l'equazione della parallela e quella della perpendicolare passanti per $A(1; -1)$.

Scriviamo in forma esplicita l'equazione di r e ricaviamo il coefficiente angolare m :

$$y = -\frac{1}{2}x + 4, \quad \text{con } m = -\frac{1}{2}.$$

Utilizziamo l'equazione della retta di coefficiente angolare m , passante per un punto $(x_1; y_1)$:

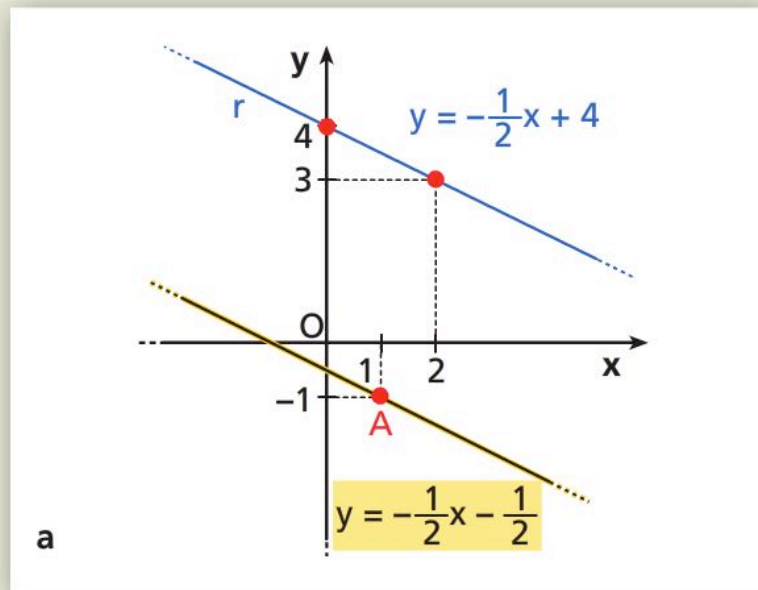
$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La **parallela** a r ha lo stesso coefficiente angolare di r .

Poniamo, cioè, $m = -\frac{1}{2}$:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

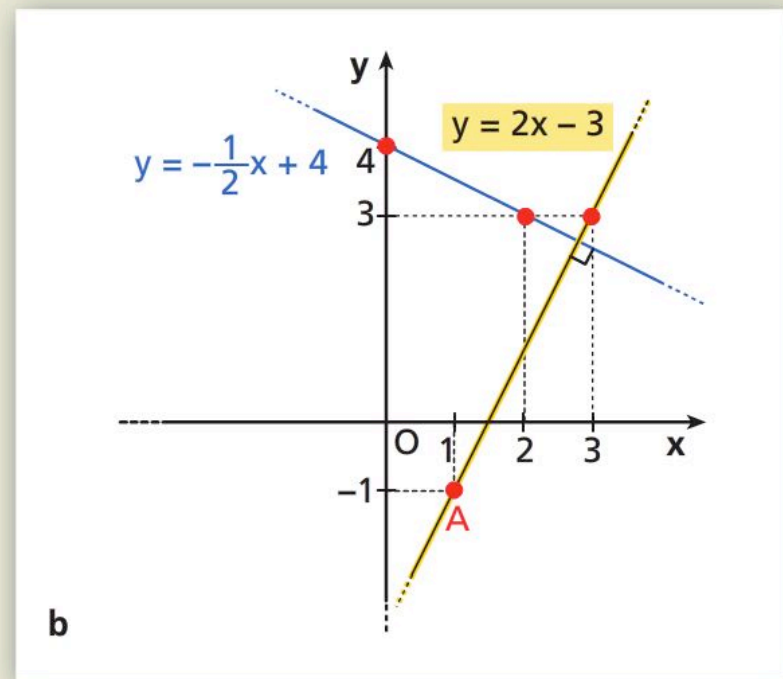
Disegniamo la retta iniziale e la parallela ottenuta (figura a).



Cerchiamo ora la **perpendicolare** a r , cioè quella retta che ha come coefficiente angolare m l'antireciproco del coefficiente angolare di r , ossia $m = 2$:

$$y + 1 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 3.$$

Disegniamo la retta iniziale e la perpendicolare (figura b).



Determinare per quale valore di k le seguenti due rette sono:
a) parallele; b) perpendicolari:

$$x - ky + 1 = 0 \quad (k-1)x - 2ky - 5 = 0$$

a) Imponiamo la condizione di parallelismo:

$$m_1 = m_2 \rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \rightarrow \frac{1}{-k} = \frac{k-1}{-2k}$$

$$\xrightarrow{\text{CALCOLI ALGEBRICI}} k^2 - 3k = 0 \rightarrow k = 0 \vee k = 3$$

✓ Per $k=0$ (da sostituire nelle equazioni date),
le rette parallele hanno equazioni:

$$x + 1 = 0$$

$$x + 5 = 0$$

✓ Per $k=3$ (da sostituire nelle equazioni date),
le rette parallele hanno equazioni:

$$x - 3y + 1 = 0$$

$$2x - 6y - 5 = 0$$

b) Imponiamo la condizione di perpendicolarità:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow -\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1 \rightarrow \frac{1}{-k} \cdot \frac{k-1}{-2k} = -1$$

$$\xrightarrow{\text{CALCOLI ALGEBRICI}} 2k^2 + k - 1 = 0 \rightarrow k = -1 \vee k = \frac{1}{2}$$

✓ Per $k=-1$ (da sostituire nelle equazioni date), le rette perpendicolari hanno equazioni:

$$\begin{aligned}x + y + 1 &= 0 \\ -2x + 2y - 5 &= 0\end{aligned}$$

✓ Per $k=1/2$ (da sostituire nelle equazioni date), le rette perpendicolari hanno equazioni:

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y + 1 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x - y - 5 &= 0\end{aligned}$$

Determinare l'equazione del luogo geometrico descritto dai punti $P(k-3; 2k-1)$ al variare di k .

Si chiamano **equazioni parametriche** del luogo geometrico le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = k - 3 \\ y = 2k - 1 \end{cases}$$

Risolviamo:

$$\begin{cases} k = x + 3 \\ y = 2(x + 3) - 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 5$$

Il luogo geometrico è rappresentato dalla retta:

$$y = 2x + 5$$

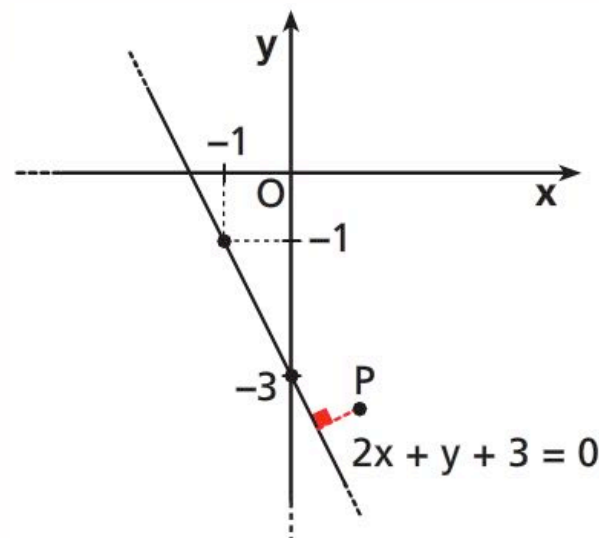
Determinare l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza $3/\sqrt{5}$ dalla retta di equazione $2x+y+3=0$.

Indichiamo con $P=(x;y)$ le coordinate di un generico punto del piano. Applichiamo la formula della distanza di un punto da una retta:

$$PH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2x + y + 3|}{\sqrt{5}}$$

Quindi:

$$PH = \frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{|2x + y + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |2x + y + 3| = 3$$



L'equazione del luogo geometrico è perciò:

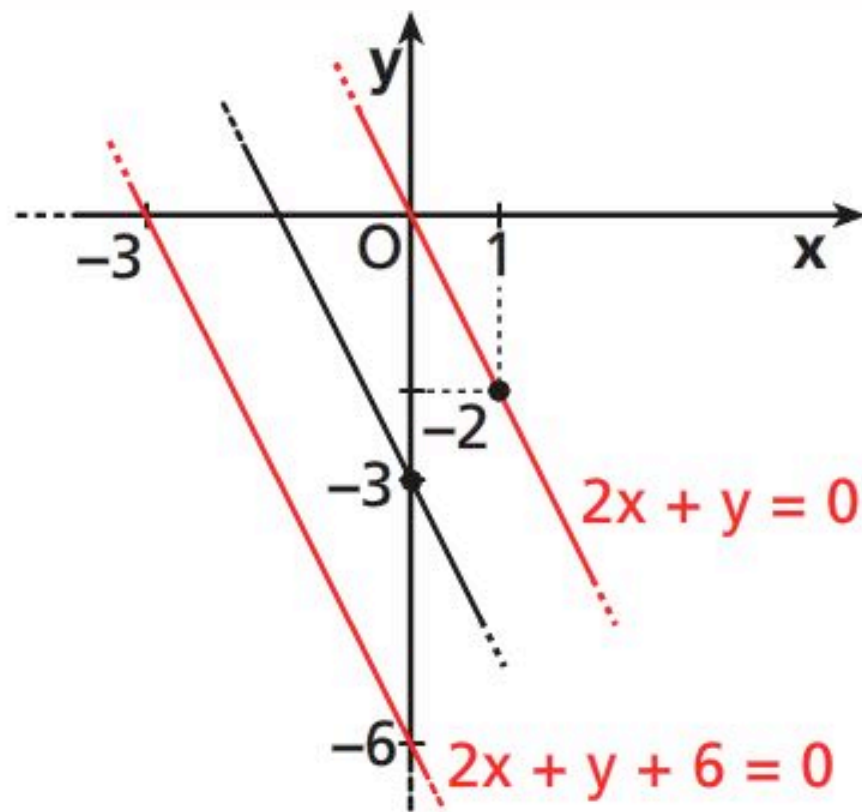
$$|2x + y + 3| - 3 = 0$$

Ricordando la definizione di valore assoluto, si ha che:

$$|2x + y + 3| = \begin{cases} 2x + y + 3 = 3 \\ -(2x + y + 3) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

Il luogo dei punti cercato è costituito da due rette parallele alla retta data:

$$2x + y = 0 \quad 2x + y + 6 = 0$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; 3)$.

Primo metodo

L'asse del segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il punto medio. Determiniamo le coordinate del punto medio M di AB :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

Il punto medio di AB è $M(1; 2)$.

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta AB :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Il coefficiente angolare di una retta perpendicolare ad AB è $m = -3$.

L'equazione dell'asse è quindi:

$$y - 2 = -3(x - 1) \rightarrow y = -3x + 3 + 2 \rightarrow y = -3x + 5.$$

Secondo metodo

L'asse del segmento AB è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da A e da B .

Indichiamo con $P(x; y)$ un punto dell'asse. Vale l'uguaglianza:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2.$$

Calcoliamo le distanze di P da A e da B :

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5},$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}.$$

Uguagliamo i quadrati delle distanze:

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4x - 2y + 5 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8x - 6y + 25 \rightarrow 12x + 4y - 20 = 0 \rightarrow 3x + y - 5 = 0.$$

L'equazione dell'asse è $y = -3x + 5$.

Consideriamo le seguenti rette:

$$r : x + 2y - 1 = 0 \quad s : 2x + y + 2 = 0$$

Scrivere l'equazione delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette.

Soluzione

Se il punto $P(x; y)$ è un generico punto di una bisettrice, allora deve avere la stessa distanza dalle rette r e s , cioè deve valere l'uguaglianza

$$\overline{PH} = \overline{PK}.$$

Calcoliamo le distanze di P da r e da s :

$$\overline{PH} = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}}; \quad \overline{PK} = \frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{5}}.$$

Uguagliamo le due distanze:

$$\frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{5}} \rightarrow |x + 2y - 1| = |2x + y + 2|.$$

Questa equazione è equivalente alle due equazioni

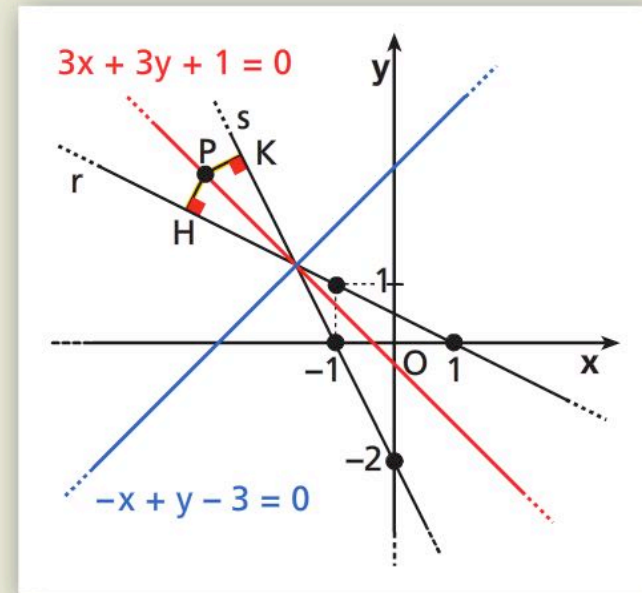
$$x + 2y - 1 = \pm (2x + y + 2),$$

cioè:

$$\begin{aligned} x + 2y - 1 &= -(2x + y + 2) \vee x + 2y - 1 = 2x + y + 2 \rightarrow \\ \rightarrow 3x + 3y + 1 &= 0 \quad \vee \quad -x + y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Le bisettrici degli angoli formati da r e s hanno le seguenti equazioni:

$$3x + 3y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad -x + y - 3 = 0.$$

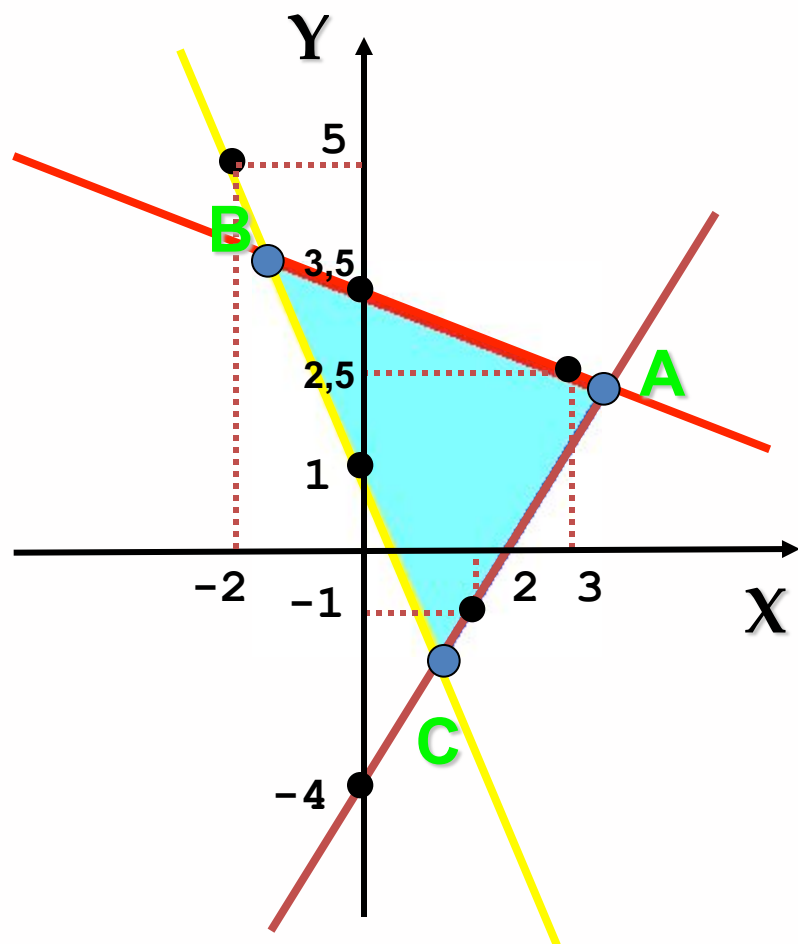


Calcolare il perimetro e l'area del triangolo individuato dalle seguenti rette:

$$y = \frac{3}{2}x - 4$$

$$y = -2x + 1$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2}$$



Procedura

1. Disegnare le rette individuate dalle tre equazioni date
2. Disegnare il triangolo ABC individuato dalle tre rette
3. Determinare i vertici del triangolo come intersezioni tra due rette:

Il punto A è dato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo confronto}} \frac{3}{2}x - 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2} \rightarrow x = \frac{45}{11} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{45}{11} \\ y = \frac{47}{22} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{45}{11}; \frac{47}{22} \right)$$

Il punto B è dato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo confronto}} -2x + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2} \rightarrow x = -\frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B = \left(-\frac{3}{2}; 4 \right)$$

Il punto C è dato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo confronto}} -2x + 1 = \frac{3}{2}x - 4 \rightarrow x = \frac{10}{7} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = -\frac{13}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{10}{7}; -\frac{13}{7} \right)$$

4. Calcolare l'altezza AH

$$AH = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$m = -2$	$q = 1$
$x_0 = 45/11$	$y_0 = 47/22$

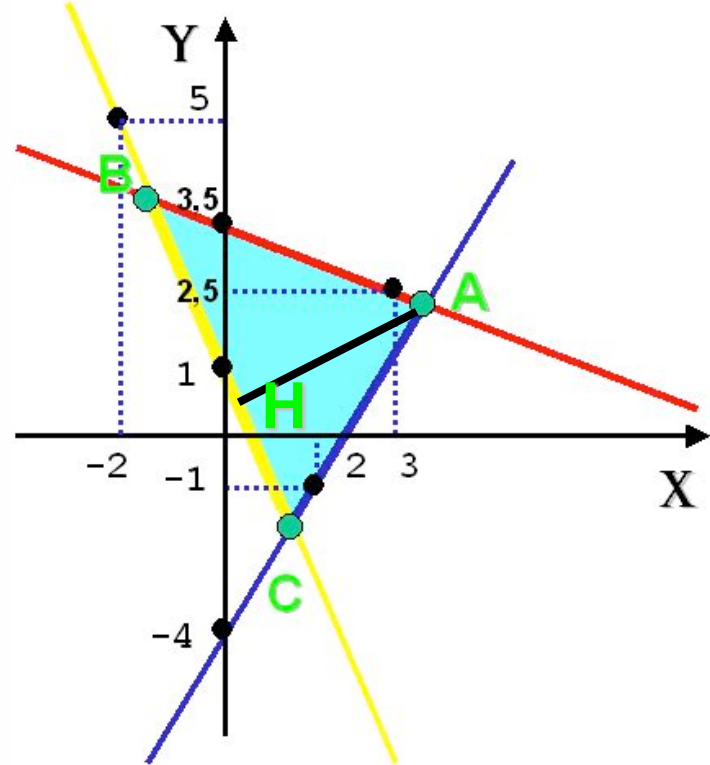
$$AH = \frac{\left| -\frac{90}{11} - \frac{47}{22} + 1 \right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\left| \frac{-180 - 47 + 22}{22} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left| -\frac{205}{22} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{205}{22 \cdot \sqrt{5}} = 4,2$$

5. Calcolare il perimetro e l'area

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \frac{45}{11} \right)^2 + \left(4 - \frac{47}{22} \right)^2} = \sqrt{31,4 + 3,6} = 5,9$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{10}{7} + \frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{13}{7} - 4 \right)^2} = \sqrt{8,4 + 34,8} = 6,6$$

$$CA = \sqrt{\left(\frac{45}{11} - \frac{10}{7} \right)^2 + \left(\frac{47}{22} + \frac{13}{7} \right)^2} = \sqrt{7,3 + 15,7} = 4,8$$



$$P = AB + BC + CA = 5,9 + 6,6 + 4,8 = 17,3$$

$$A = (BC \cdot AH) / 2 = (6,6 \cdot 4,2) / 2 = 13,9$$

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-1; 5)$ e $B(3; 1)$.
La retta AB ha equazione:

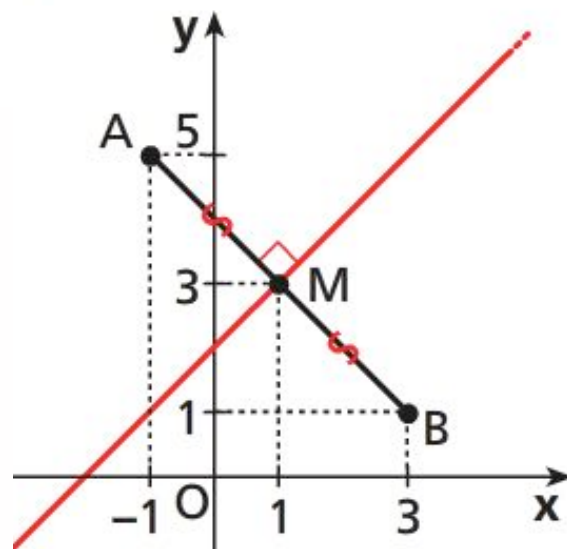
$$\frac{y - 5}{1 - 5} = \frac{x + 1}{3 + 1} \rightarrow y = -x + 4.$$

L'asse perpendicolare ad AB , quindi, ha coefficiente angolare 1.
Il punto medio M di AB ha coordinate:

$$x_M = \frac{-1 + 3}{2} = 1; \quad y_M = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

L'asse è la retta passante per M e di coefficiente angolare 1 (figura a):

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x + 2.$$



ESEMPIO

Ricaviamo l'equazione dell'asse del segmento AB dell'esempio precedente considerando che l'asse è il luogo dei punti $P(x; y)$ tali che $\overline{PA} = \overline{PB}$.

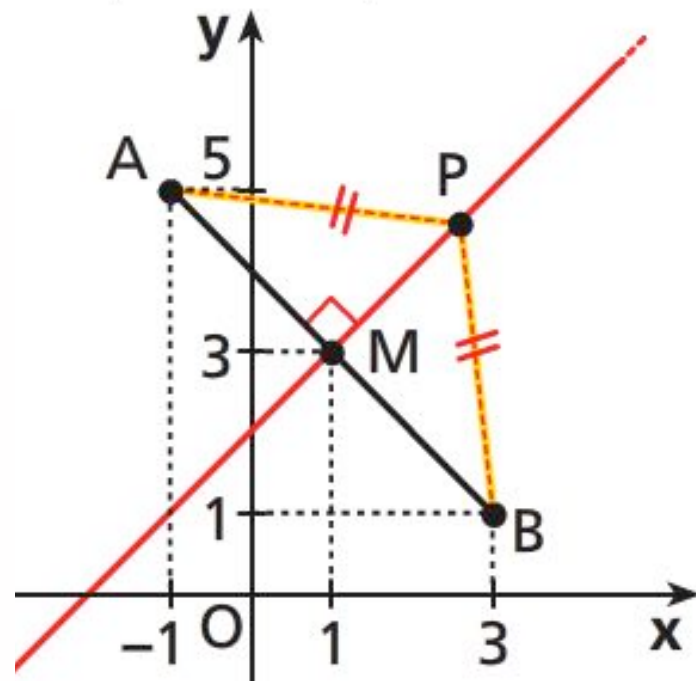
Determiniamo le due distanze e uguagliamo:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}.$$

Poiché i due radicali sono positivi, eleviamo al quadrato entrambi i membri e svolgiamo i calcoli:

$$\cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 10y + 25 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1}$$

$$y = x + 2.$$



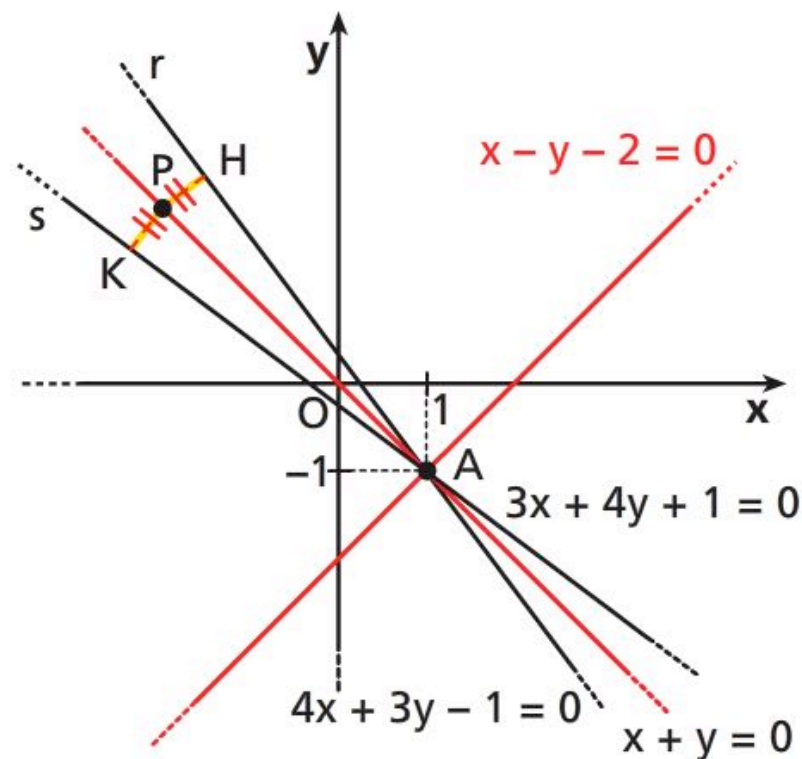
ESEMPIO

Consideriamo le rette r e s di equazioni

$$r: 4x + 3y - 1 = 0,$$

$$s: 3x + 4y + 1 = 0.$$

Vogliamo determinare l'equazione delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette.



Se il punto $P(x; y)$ è un generico punto di una bisettrice, allora deve avere la stessa distanza dalle rette r e s , cioè: $\overline{PH} = \overline{PK}$. Si ha:

$$\frac{|4x + 3y - 1|}{5} = \frac{|3x + 4y + 1|}{5} \rightarrow |4x + 3y - 1| = |3x + 4y + 1|.$$

Questa equazione ha per soluzioni quelle delle due equazioni

$$4x + 3y - 1 = \pm(3x + 4y + 1), \text{ cioè:}$$

$$4x + 3y - 1 = -(3x + 4y + 1) \vee 4x + 3y - 1 = 3x + 4y + 1$$

$$x + y = 0 \vee x - y - 2 = 0.$$

Le bisettrici degli angoli formati da r e s hanno per equazioni:

$$x + y = 0, x - y - 2 = 0.$$

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-1; 5)$ e $B(3; 1)$.
La retta AB ha equazione:

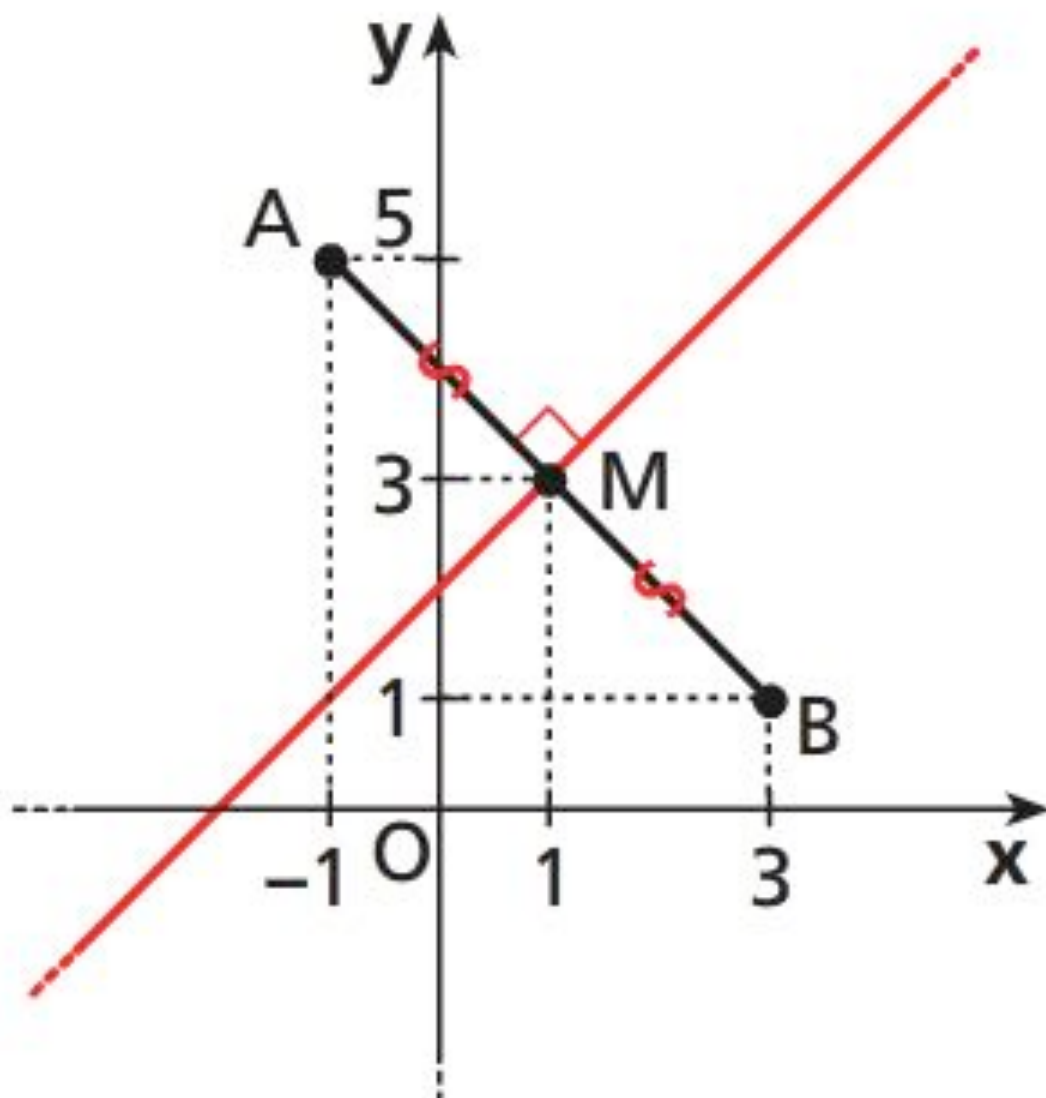
$$\frac{y - 5}{1 - 5} = \frac{x + 1}{3 + 1} \rightarrow y = -x + 4.$$

L'asse perpendicolare ad AB , quindi, ha coefficiente angolare 1.
Il punto medio M di AB ha coordinate:

$$x_M = \frac{-1 + 3}{2} = 1; \quad y_M = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

L'asse è la retta passante per M e di coefficiente angolare 1 (figura a):

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x + 2.$$



ESEMPIO

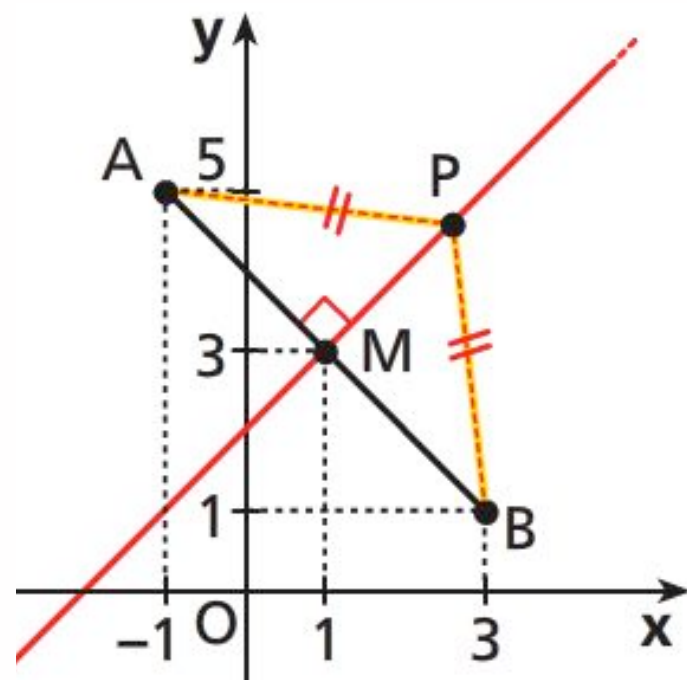
Ricaviamo l'equazione dell'asse del segmento AB dell'esempio precedente considerando che l'asse è il luogo dei punti $P(x; y)$ tali che $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Determiniamo le due distanze e uguagliamo:

Poiché i due radicali sono positivi, eleviamo al quadrato entrambi i membri e svolgiamo i calcoli:

$$\cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 10y + 25 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1}$$

$$y = x + 2.$$



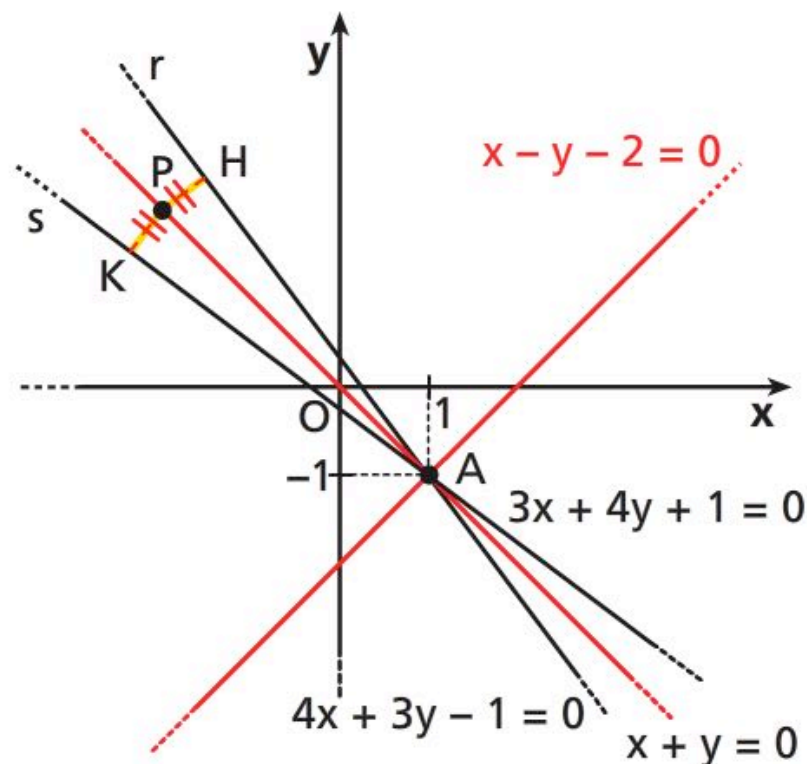
ESEMPIO

Consideriamo le rette r e s di equazioni

$$r: 4x + 3y - 1 = 0,$$

$$s: 3x + 4y + 1 = 0.$$

Vogliamo determinare l'equazione delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette.



Se il punto $P(x; y)$ è un generico punto di una bisettrice, allora deve avere la stessa distanza dalle rette r e s , cioè: $\overline{PH} = \overline{PK}$. Si ha:

$$\frac{|4x + 3y - 1|}{5} = \frac{|3x + 4y + 1|}{5} \rightarrow |4x + 3y - 1| = |3x + 4y + 1|.$$

Questa equazione ha per soluzioni quelle delle due equazioni

$$4x + 3y - 1 = \pm(3x + 4y + 1), \text{ cioè:}$$

$$4x + 3y - 1 = -(3x + 4y + 1) \vee 4x + 3y - 1 = 3x + 4y + 1$$

$$x + y = 0 \vee x - y - 2 = 0.$$

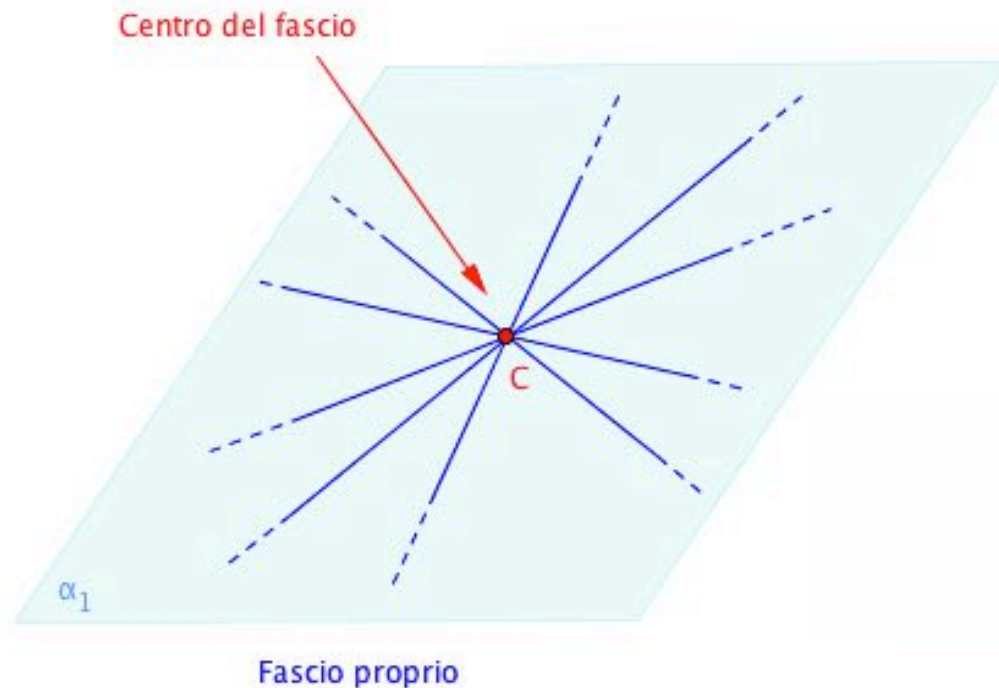
Le bisettrici degli angoli formati da r e s hanno per equazioni:

$$x + y = 0, x - y - 2 = 0.$$

❑ Fascio proprio

L'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto P si chiama **fascio proprio** di rette per P .

Il punto P comune a tutte le rette del fascio si chiama **centro del fascio**.



ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del fascio di rette di centro $P(2; 4)$.

Se una retta generica $y = mx + q$ deve passare per P , occorre che le coordinate di P soddisfino l'equazione, ossia

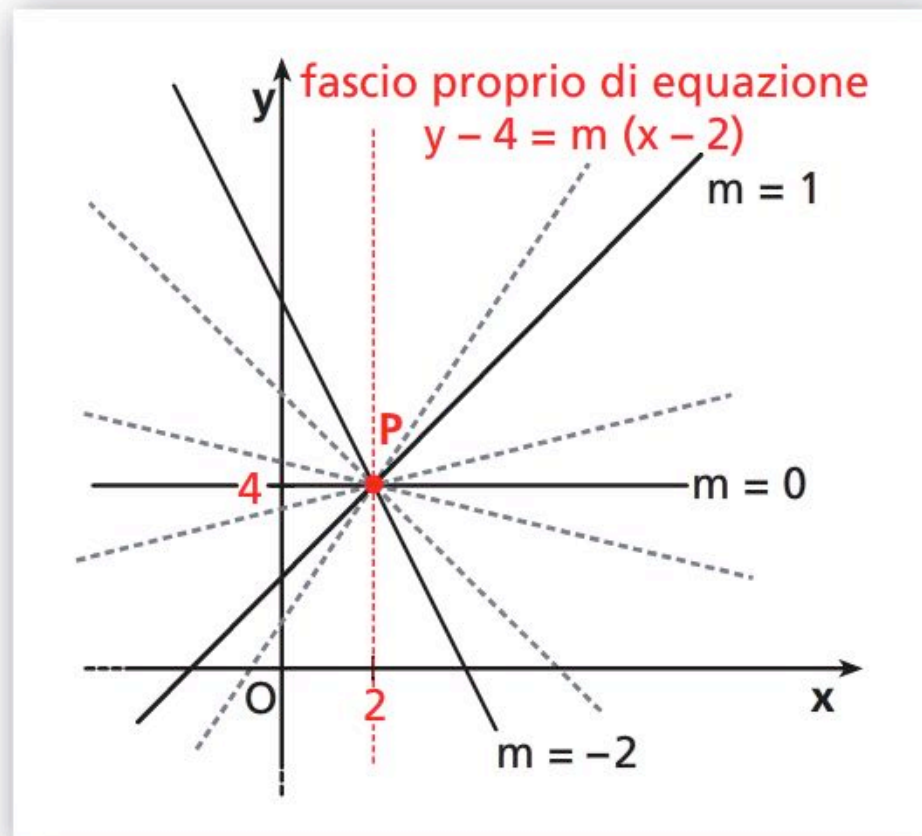
$$4 = m \cdot 2 + q.$$

Ricaviamo q :

$$q = 4 - m \cdot 2.$$

Sostituendo tale espressione a q nell'equazione generica, otteniamo:

$$y = mx + 4 - 2m.$$



Così facendo, abbiamo già ottenuto l'equazione in forma esplicita di una generica retta del fascio. Tuttavia la riscriviamo nella forma

$$y - 4 = m(x - 2),$$

per mettere in evidenza, nell'equazione, le coordinate $(2; 4)$ del centro.

Abbiamo trovato l'equazione del fascio di rette di centro $P(2; 4)$. Per ogni valore reale che attribuiamo a m otteniamo una retta del fascio:

- per $m = 1$ abbiamo la retta $y - 4 = x - 2$, cioè $y = x + 2$;
- per $m = -2$ la retta $y - 4 = -2x + 4$, cioè $y = -2x + 8$;
- per $m = 0$ la parallela all'asse x , $y = 4$ e così via.

L'equazione della parallela all'asse y è $x = 2$, ma non esiste alcun valore di m che, sostituito nell'equazione del fascio, fornisca tale equazione.

Pertanto, per avere tutte le rette del fascio proprio per P , dobbiamo aggiungere all'equazione del fascio l'equazione della parallela all'asse y per P :

$$y - 4 = m(x - 2) \qquad \text{(rette non parallele all'asse } y\text{);}$$

$$x = 2 \qquad \text{(retta parallela all'asse } y\text{).}$$

In generale, dato un punto P di coordinate $(x_1; y_1)$, il **fascio di rette di centro P** ha equazione:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

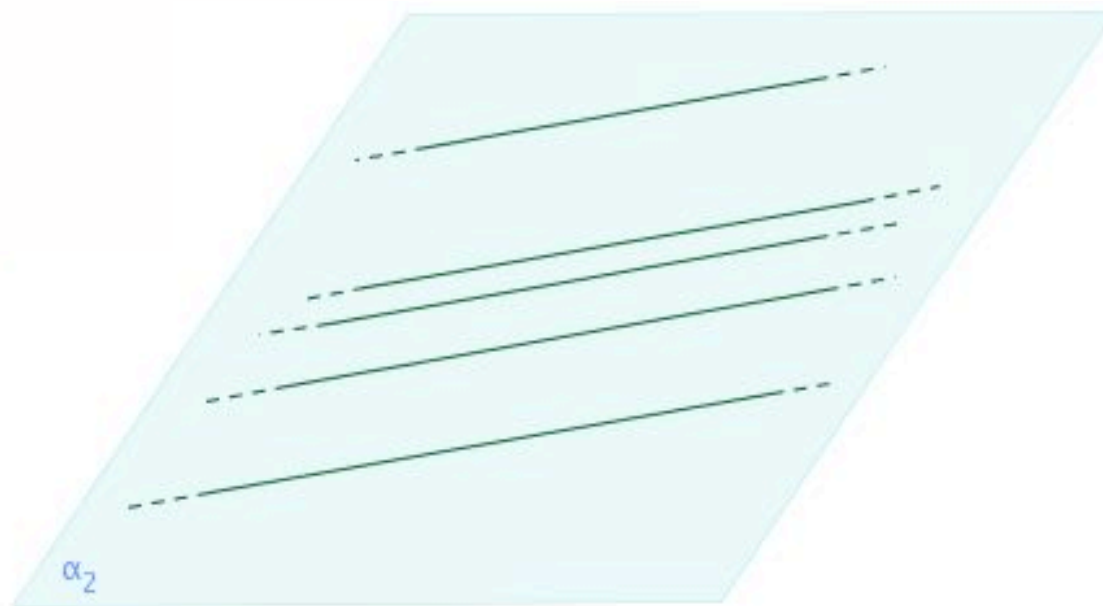
Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio passanti per P , tranne la parallela all'asse y , che ha equazione $x = x_1$.

Pertanto, il **fascio completo** è descritto dalle equazioni:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \vee x = x_1, \quad \text{con } m \in \mathbb{R}.$$

❑ Fascio improprio

Consideriamo una retta r del piano: l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r .
 r si chiama retta **base** del fascio.



Fascio improprio

ESEMPIO

L'equazione

$$y = -3x + q$$

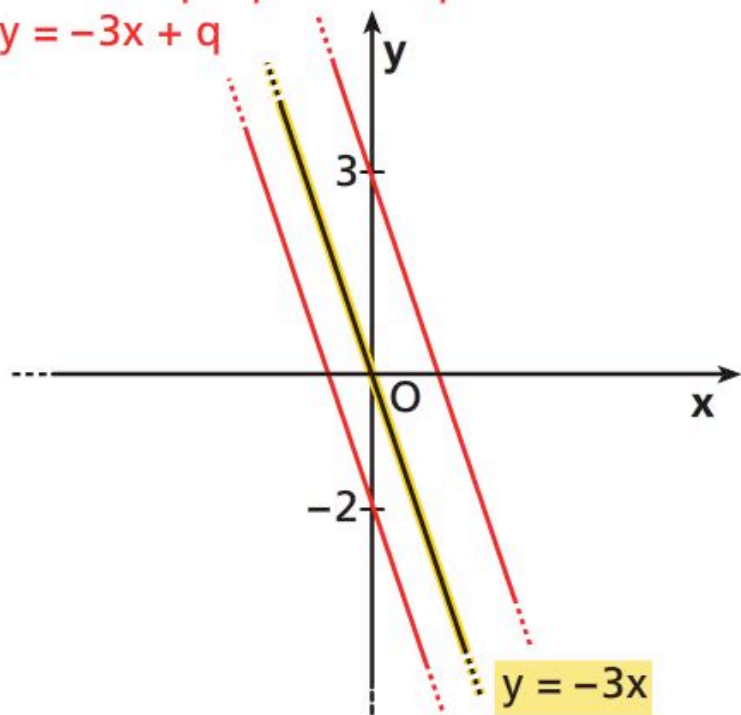
rappresenta, al variare di q , tutte le rette del piano che hanno coefficiente angolare -3 , cioè è l'**equazione di un fascio improprio** di rette.

Se $q = 0$, abbiamo la retta del fascio passante per l'origine:

$$y = -3x.$$

Per ottenere altre rette del fascio basta attribuire dei valori a q e sostituirli, di volta in volta, nell'equazione del fascio: infatti, per $q = 3$ abbiamo la retta $y = -3x + 3$, per $q = -2$ la retta $y = -3x - 2$, ...

fascio improprio di equazione
 $y = -3x + q$



- Se r è in forma esplicita,

$$y = mx + q,$$

l'equazione del fascio improprio si scrive:

$$y = mx + k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Se r è in forma implicita,

$$ax + by + c = 0,$$

l'equazione del fascio si scrive:

$$ax + by + k = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Casi particolari:

$x = k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$ fascio di rette parallele all'asse y ,

$y = k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$ fascio di rette parallele all'asse x .

FASCIO GENERATO DA DUE RETTE

Date due equazioni $f(x;y)=0$ e $g(x;y)=0$, si chiama *combinazione lineare* delle due equazioni ogni equazione del tipo:

$$p \cdot f(x; y) + q \cdot g(x; y) = 0$$

$$(p,q) \in \mathfrak{R}, \text{ non entrambi nulli}$$

Cosa significa? Se una coppia $(x;y)$ è soluzione di entrambe le equazioni date, allora è anche soluzione di ogni loro combinazione lineare.

Se le due equazioni $f(x;y)=0$ e $g(x;y)=0$ sono quelle di due rette del fascio proprio:

$$r : ax + by + c = 0 \qquad s : a'x + b'y + c' = 0$$

la loro combinazione lineare rappresenta l'equazione del fascio proprio:

Equazione del fascio proprio di rette

$$p \cdot (ax + by + c) + q \cdot (a'x + b'y + c') = 0$$

Cosa significa? Le equazioni di tutte le rette del fascio si ottengono dalla combinazione lineare delle rette **r** e **s** che si chiamano **rette generatrici del fascio proprio**.

Dividendo ambo i membri della combinazione lineare per $p \neq 0$ e ponendo $k = q/p$, si ottiene:

Equazione del fascio proprio di rette

$$p \cdot (ax + by + c) + q \cdot (a'x + b'y + c') = 0$$

Cosa significa? Ad ogni valore di k corrisponde l'equazione di una retta del fascio.

IMPORTANTE: Questo discorso vale per i fasci di rette, rappresentati da equazioni di 1° grado, ma anche per i fasci di circonferenze, parabole, ellissi, iperboli, rappresentati da equazioni di 2° grado.

ESEMPIO

Consideriamo le rette r e s di equazioni:

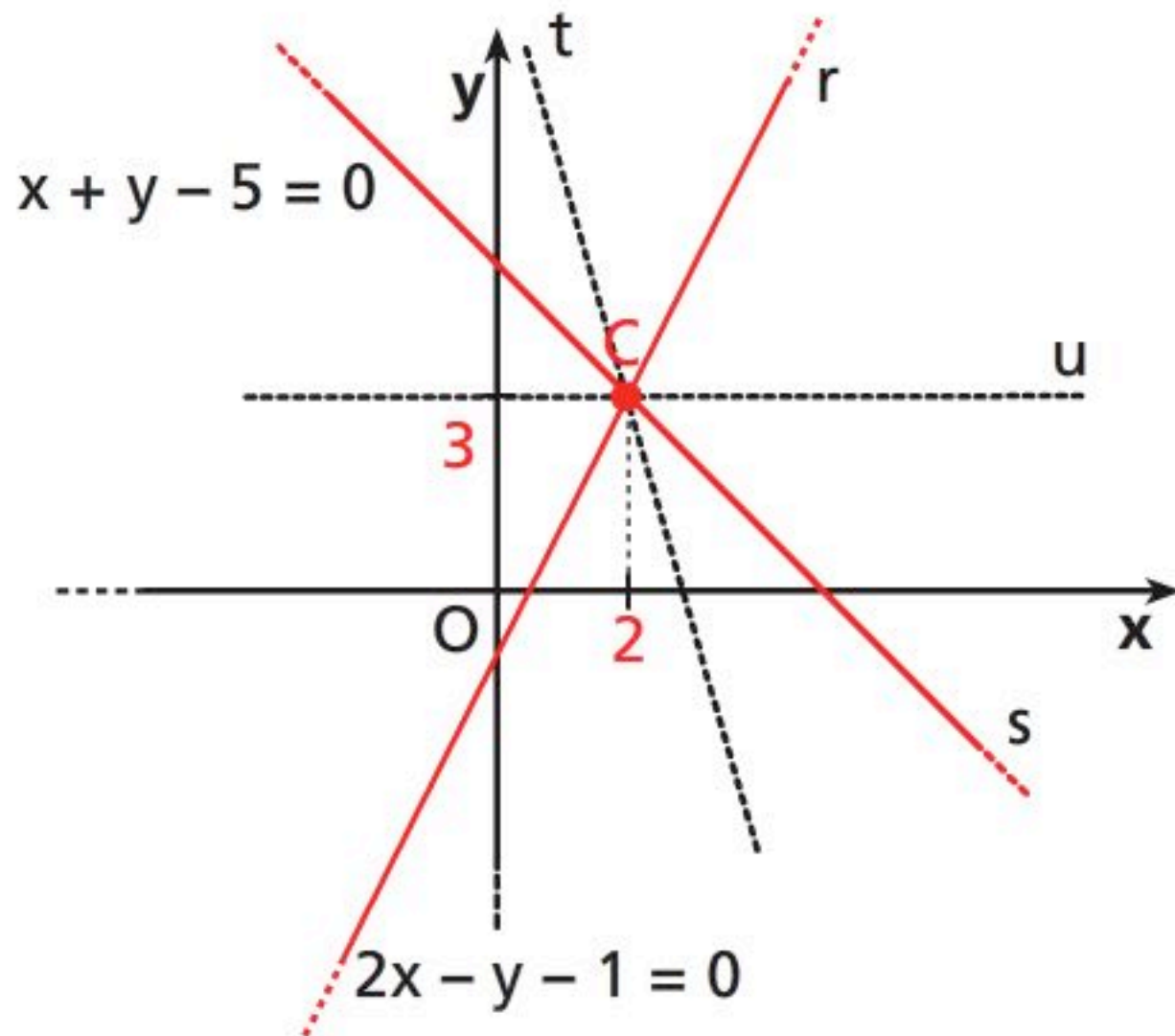
$$r: 2x - y - 1 = 0,$$

$$s: x + y - 5 = 0.$$

Se combiniamo linearmente le equazioni delle due rette, introducendo un parametro reale k , otteniamo:

$$2x - y - 1 + k(x + y - 5) = 0.$$

Questa equazione rappresenta, al variare di k , le infinite rette passanti per il punto di intersezione C delle due rette date, ossia il fascio proprio di rette di centro C . Per esempio per $k = 2$ si ottiene la retta t : $4x + y - 11 = 0$, per $k = -2$ si ottiene la retta u : $y = 3$ e così via. La retta r si ottiene per $k = 0$, mentre la retta s è l'unica che non si ottiene dall'equazione. Tuttavia, man mano che k diventa sempre più grande (in valore assoluto), le rette del fascio si avvicinano sempre più a s . Diciamo anche che la retta s si ha per $k \rightarrow \infty$ (si legge: « k tendente a infinito»).



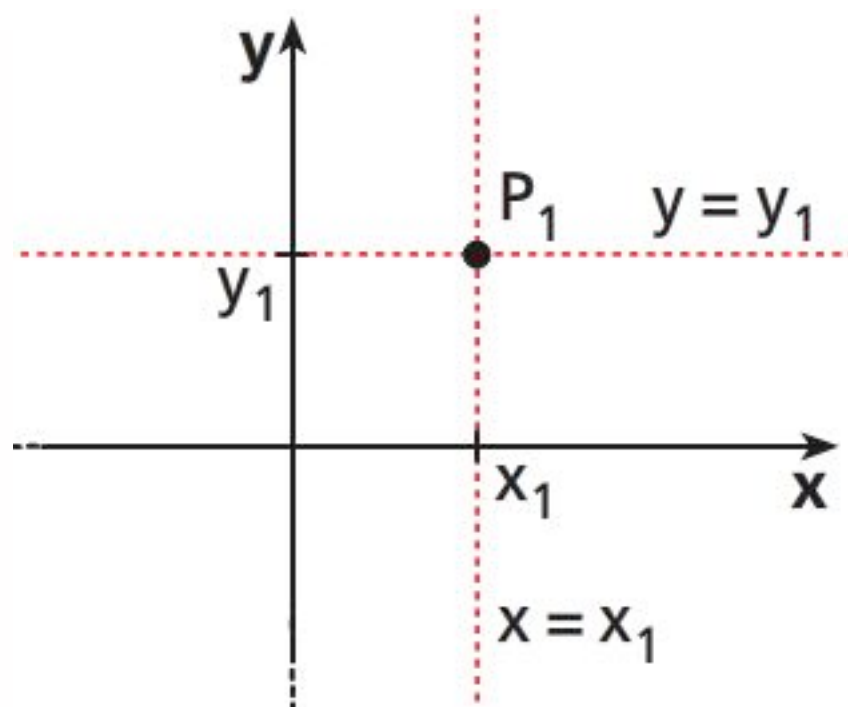
● Le generatrici del fascio possono essere due rette qualsiasi del fascio. In particolare, se consideriamo le due rette parallele agli assi passanti per P_1 , di equazioni $x - x_1 = 0$ e $y - y_1 = 0$, otteniamo

$$p \cdot (x - x_1) + q \cdot (y - y_1) = 0,$$

da cui, con $q \neq 0$ e posto $-\frac{p}{q} = m$, si ha:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1),$$

ossia la retta passante per un punto e di coefficiente angolare m che abbiamo già ricavato in altro modo.



Date le rette generatrici $r: x-2y+1=0$ e $s: x+y-2=0$

- 1) Stabilire il tipo di fascio;
- 2) Determinare la retta del fascio passante per il punto $P=(3;-2)$

1) Scriviamo l'equazione del fascio generato dalle rette r e s , combinando linearmente le loro equazioni:

$$x - 2y + 1 + k(x + y - 2) = 0 \xrightarrow{\text{passaggi algebrici}} (1+k)x + (k-2)y + 1 - 2k = 0$$

Per stabilire di che fascio si tratta, analizziamo le equazioni di r e s ; le rette non sono parallele perché hanno differente coefficiente angolare.

Pertanto, si tratta di un **fascio proprio**, il cui centro C è dato dall'intersezione delle rette r e s :

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{o riduzione}]{\text{metodo Cramer}} C = (1;1)$$

2) Per determinare l'equazione della retta del fascio passante per $P=(3;-2)$, sostituiamo le coordinate di P nell'equazione del fascio, e otteniamo, così, un'equazione in k :

$$(1+k)3 + (k-2)(-2) + 1 - 2k = 0 \xrightarrow{\text{risolviamo rispetto a } k} k = 8$$

Sostituendo nell'equazione del fascio il valore di k trovato, otteniamo l'equazione della retta cercata:

$$(1+k)x + (k-2)y + 1 - 2k = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$$

- 1) Studiare il fascio di rette di equazione: $(3+k)x + (1+k)y + 2k = 0$.
Natura del fascio, le generatrici e il centro se il fascio è proprio
- 2) Le equazioni delle rette del fascio parallele agli assi cartesiani
- 3) Come ruotano le rette del fascio attorno al centro al variare di k

1) Attraverso calcoli algebrici, separiamo nell'equazione del fascio i termini che contengono k da quelli che non lo contengono:

$$(3+k)x + (1+k)y + 2k = 0 \xrightarrow{\text{passaggi algebrici}} 3x + y + k(x + y + 2) = 0$$

Pertanto, le rette generatrici del fascio hanno equazioni:

$$s) 3x + y = 0 \quad \text{per } k = 0$$

$$r) x + y + 2 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Le rette non sono parallele (controllare i loro coefficienti angolari), per cui si tratta di un **fascio proprio**.

Il centro del fascio è dato dall'intersezione delle equazioni delle rette generatrici:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{o riduzione}]{\text{metodo Cramer}} C = (1; -3)$$

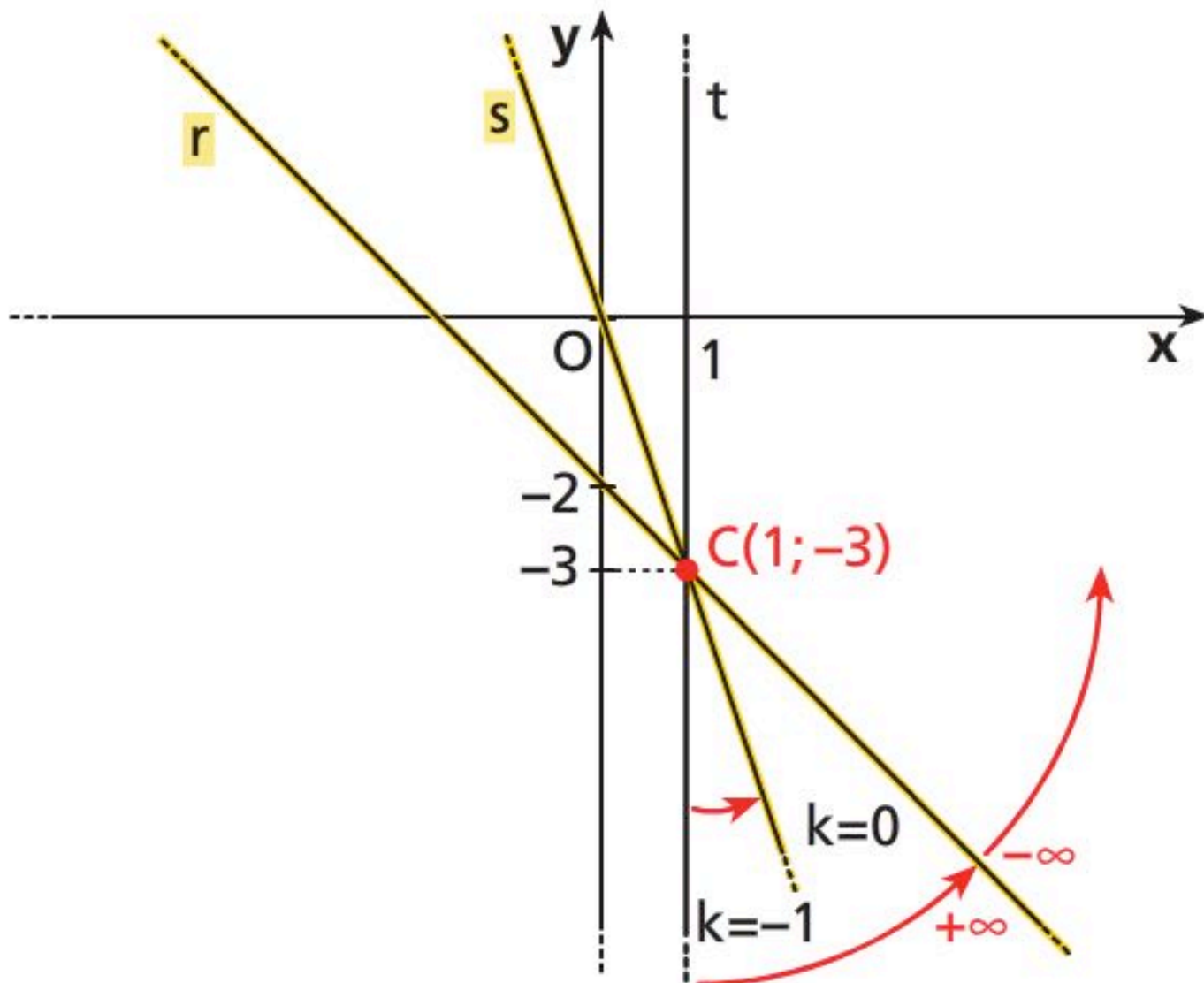
2) Le equazioni passanti per C e parallele agli cartesiani sono:

$$x = 1 \text{ e } y = -3$$

3) Per capire come ruotano le rette del fascio attorno al centro al variare di k, basta assegnare a k un valore a piacere e rappresentare la retta corrispondente.

$$3x + y + k(x + y + 2) = 0 \xrightarrow{\text{per } k=-1} x = 1$$

Dalla figura si osserva che, al crescere di k in $\mathbb{R}$, si ottengono delle rette che ruotano intorno al centro C in senso antiorario.



Si può dimostrare che anche le equazioni di tutte le rette di un fascio improprio si possono ottenere dalla combinazione lineare di quelle di due rette del fascio.

In generale, date due rette distinte, r e s , di equazioni

$$r: ax + by + c = 0, \quad s: a'x + b'y + c' = 0,$$

il fascio di rette generato da r e s ha equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0, \text{ ossia}$$

$$(a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0.$$

Esse sono le equazioni di un fascio proprio o improprio a seconda che:

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

In entrambi i casi l'equazione rappresenta tutte le rette del fascio tranne la retta s .

ESEMPIO

Consideriamo due rette parallele, a e b , di equazioni:

$$a: x - y + 1 = 0, \quad b: x - y - 3 = 0.$$

Se combiniamo linearmente le equazioni delle due rette, introducendo un parametro reale k , otteniamo l'equazione:

$$x - y + 1 + k(x - y - 3) = 0.$$

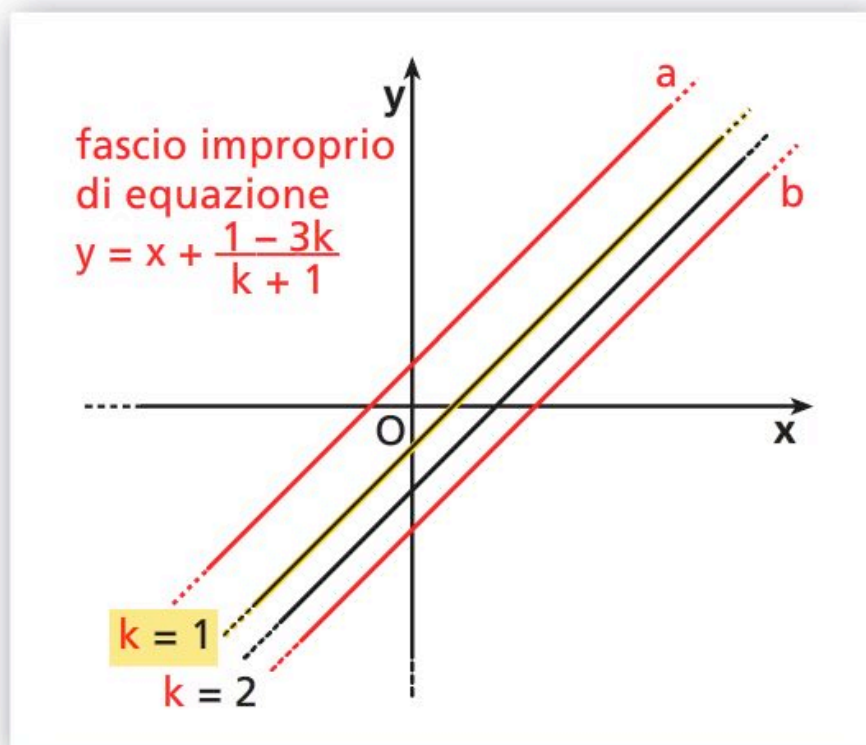
Esplicitiamo la y :

$$x - y + 1 + kx - ky - 3k = 0$$

$$(k + 1)y = (k + 1)x + 1 - 3k$$

$$y = x + \frac{1 - 3k}{k + 1}.$$

Otteniamo, al variare di k (con $k \neq -1$), una retta parallela alle generatrici, quindi l'equazione è relativa a un fascio improprio.



▲ **Figura 30** Attribuyendo dei valori a k diversi da -1 otteniamo delle rette parallele alle rette a e b .

1) Scrivere l'equazione del fascio di rette le cui generatrici hanno equazioni:

$$r: 3x + 2y - 1 = 0$$

$$s: 6x + 4y + 3 = 0$$

e stabilire di che fascio si tratta.

2) Determinare l'equazione del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1.

1. Per prima cosa cerchiamo, se c'è, il centro del fascio generato dalle due rette, mettendone a sistema le equazioni delle rette:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 6x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni perché le due rette sono parallele ($m = -2/3$), quindi le due rette generano un fascio improprio di rette.

Per trovare l'equazione del fascio, combiniamo linearmente le due equazioni delle rette generatrici del fascio:

$$3x + 2y - 1 + k \cdot (6x + 4y + 3) = 0$$

ed esplicitiamo rispetto alla y :

$$3x + 2y - 1 + 6kx + 4ky + 3k = 0$$

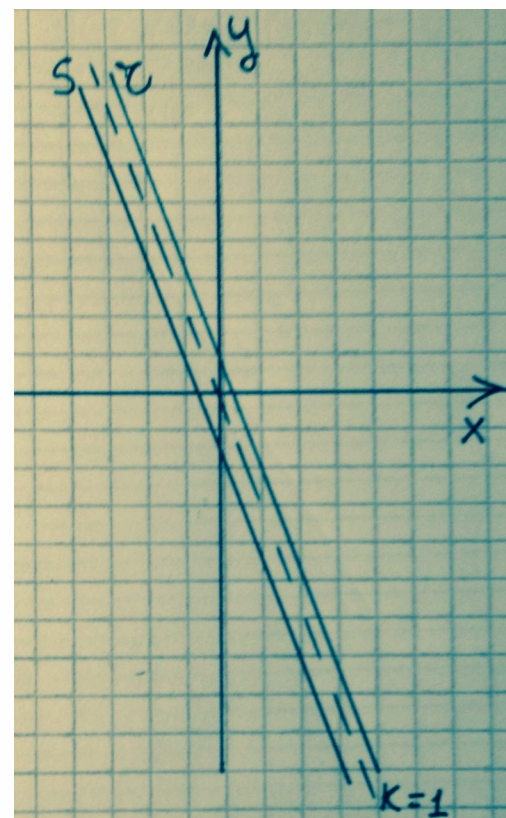
$$(4k + 2)y + (6k + 3)x + 3k - 1 = 0$$

$$y = -\frac{6k + 3}{4k + 2}x - \frac{3k - 1}{4k + 2} \rightarrow y = -\frac{3(2k + 1)}{2(2k + 1)} - \frac{3k - 1}{4k + 2}$$

Equazione del fascio improprio

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3k - 1}{4k + 2}$$

Come ci aspettavamo, l'equazione del fascio improprio ha coefficiente angolare costante $m = -2/3$ proprio uguale a quello delle rette generatrici. Al variare di k otteniamo tutte le rette del fascio improprio.



2. Scriviamo una generica retta del fascio come:

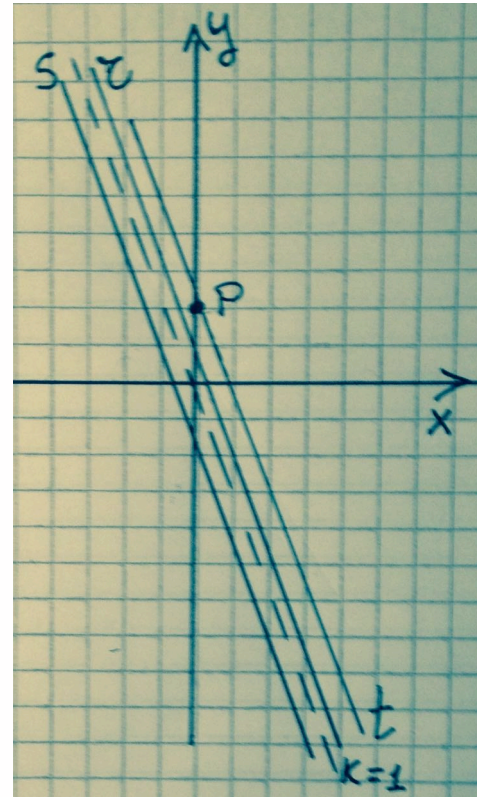
$$3x + 2y + k = 0$$

Noi vogliamo che la retta cercata passi per il punto $P=(0,1)$, quindi sostituiamo nell'equazione del fascio le coordinate del punto:

$$2 + k = 0 \rightarrow k = -2$$

Quindi la retta cercata ha equazione:

$$t: 3x + 2y - 2 = 0$$



Studiare il fascio di rette $(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0$, e determinare per quali valori del parametro k la retta del fascio:

a) passa per l'origine; b) è parallela alla retta $y=3$; c) è perpendicolare alla retta $2x+3y-4=0$; d) incontra la retta di equazione $x+4y-1=0$ nel punto di ordinata 1; e) è parallela alla retta passante per $A=(-1;1)$ e $B=(2;-1)$; f) disegnare il fascio di rette ottenuto

Attraverso calcoli algebrici, separiamo nell'equazione del fascio i termini che contengono k da quelli che non lo contengono:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \xrightarrow{\text{passaggi algebrici}} 2x + 2y + 3 + k(x - y - 1) = 0$$

Le rette generatrici del fascio hanno equazioni:

$$s) 2x + 2y + 3 = 0 \quad t) x - y - 1 = 0$$

Le rette non sono parallele (controllare i loro coefficienti angolari), per cui si tratta di un *fascio proprio*.

Il centro del fascio è dato dall'intersezione delle equazioni delle rette generatrici:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{o riduzione}]{\text{metodo Cramer}} C = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{4} \right)$$

a) La retta del fascio che passa per l'origine, si ottiene imponendo all'equazione del fascio il passaggio per il punto $O=(0,0)$:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3-k = 0 \rightarrow 3-k = 0 \rightarrow k = 3$$

Sostituendo $k=3$ nell'equazione del fascio, si ottiene la retta del fascio passante per l'origine:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3-k = 0 \rightarrow a) \quad 5x - y = 0$$

b) Il valore di k per cui la retta del fascio è parallela alla retta $y=3$, si ottiene annullando il coefficiente della x nell'equazione del fascio:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \rightarrow k+2=0 \rightarrow k=-2$$

Sostituendo $k=-2$ nell'equazione del fascio, si ottiene la retta del fascio parallela alla retta $y=3$:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \rightarrow 4y + 5 = 0 \rightarrow b) y = -\frac{5}{4}$$

c) Il valore di k per cui la retta del fascio è perpendicolare alla retta $2x+3y-4=0$, si ottiene attraverso la condizione di perpendicolarità:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow -\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1 \rightarrow \frac{k+2}{2-k} \cdot \frac{2}{3} = -1 \xrightarrow{\text{CALCOLI ALGEBRICI}} k = 10$$

Sostituendo $k=10$ nell'equazione del fascio, si ottiene la retta cercata:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \rightarrow c) 12x - 8y - 7 = 0$$

d) Per trovare il valore di k tale per cui la retta del fascio incontri la retta $x+4y-1=0$ nel punto di ordinata 1, si procederà nel seguente modo.

- ✓ L'ascissa di tale punto si ottiene sostituendo l'ordinata 1 nell'equazione della retta a cui appartiene:

$$x + 4y - 1 = 0 \rightarrow x = -3 \Rightarrow P = (-3; 1)$$

- ✓ Poiché la retta del fascio che stiamo cercando ha con la retta $x+4y-1=0$ il punto P in comune, allora, sostituendo le coordinate di tale punto nell'equazione del fascio, troveremo k :

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \xrightarrow{\text{calcoli algebrici}} k = -\frac{1}{5}$$

✓ Sostituendo $k=-1/5$ nell'equazione del fascio, si ottiene la retta cercata:

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \xrightarrow{\text{calcoli algebrici}} d) 9x + 11y + 16 = 0$$

e) Determiniamo la retta passante per i punti $A=(-1;1)$ e $B=(2;-1)$:

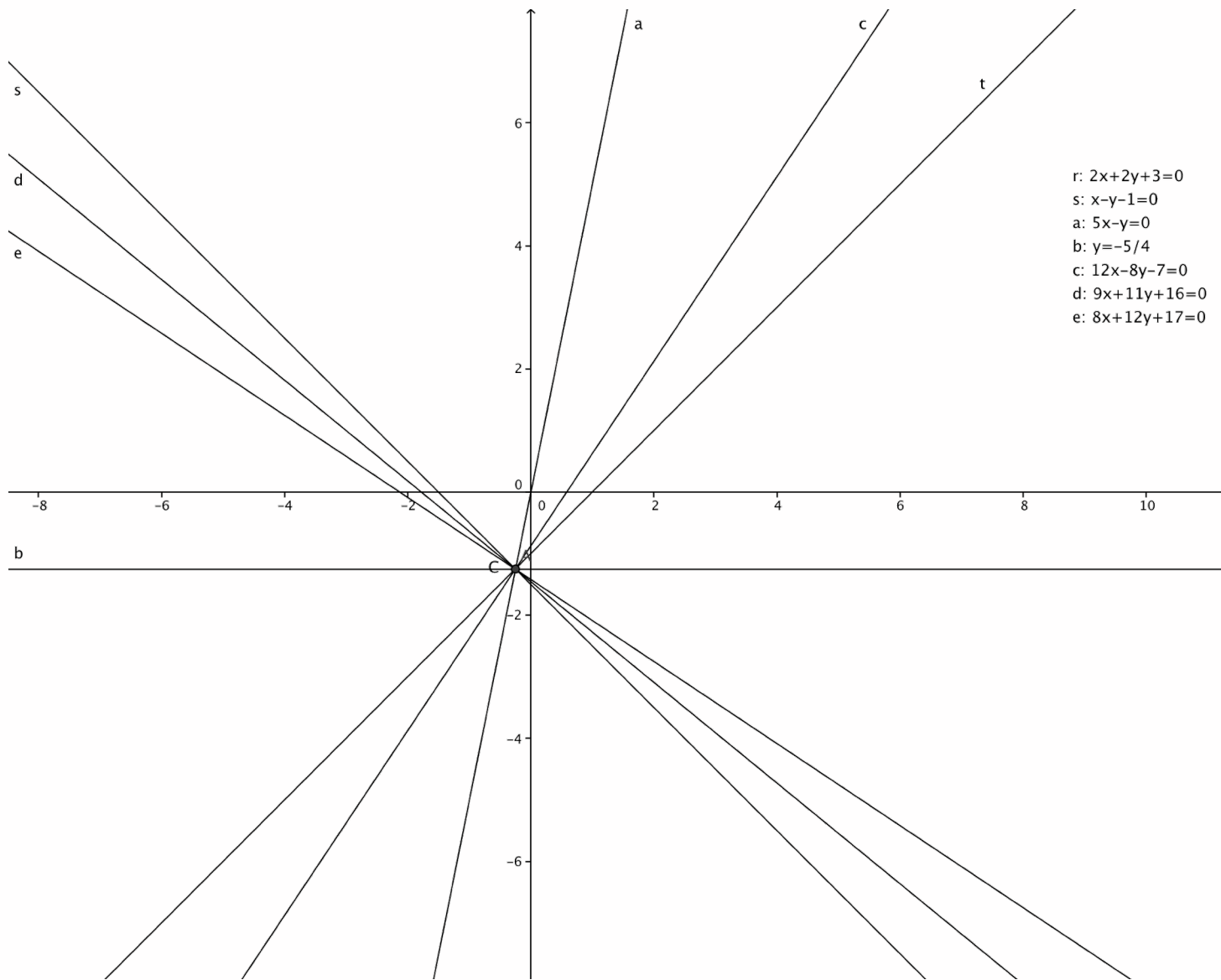
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y - 1}{-1 - 1} = \frac{x + 1}{2 + 1} \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0$$

Attraverso la condizione di parallelismo, calcoleremo la retta del fascio parallela alla retta passante per A e B:

$$m_1 = m_2 \rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \rightarrow \frac{k+2}{2-k} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{CALCOLI ALGEBRICI}} k = -\frac{2}{5}$$

$$(k+2)x + (2-k)y + 3 - k = 0 \xrightarrow{\text{sostituiamo } k=-2/5} e) 8x + 12y + 17 = 0$$

GRAFICO



Studiare il fascio di rette $3x - 2y + 4 + k(2x + y - 2) = 0$.

Soluzione

1. Determiniamo le rette generatrici del fascio:

$$\text{Per } k = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - 2y + 4 = 0 \quad (\text{I}^a \text{ retta generatrice})$$

$$\text{Per nessun valore di } k \text{ } (k = \infty) \quad \rightarrow \quad 2x + y - 2 = 0 \quad (\text{II}^a \text{ retta generatrice})$$

2. Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$$3x - 2y + 4 + 2kx + ky - 2k = 0;$$

$$(3 + 2k)x + (k - 2)y + 2(2 - k) = 0.$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3+2k}{k-2}. \quad \text{Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro } k, \text{ il fascio è proprio.}$$

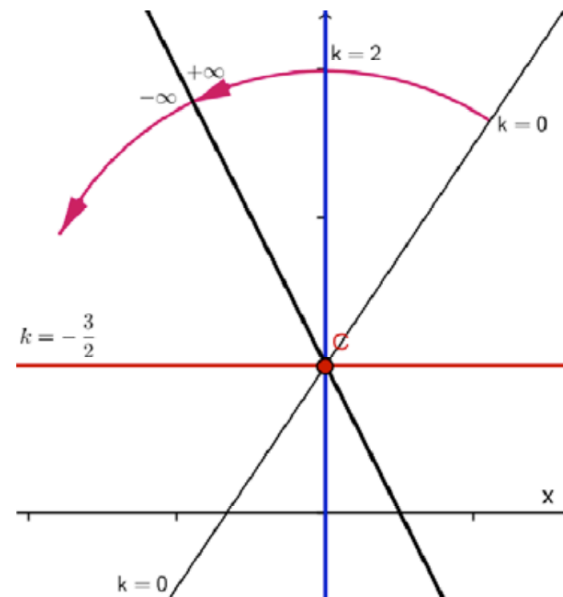
3. Determiniamo le coordinate del centro del fascio, annullando i coefficienti delle due incognite:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Per } k = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{2}y + \frac{14}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad y - 2 = 0 \\ \text{Per } k = 2 \quad \rightarrow \quad 7x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(0; 2)$$

4. Determiniamo il movimento delle rette del fascio al variare del parametro k , mediante la rappresentazione grafica di alcune sue rette.

Dall'esame del grafico di queste rette si deduce che:

Il parametro k assume valori positivi, crescenti da 0 a $+\infty$, quando le rette del fascio, ruotano in senso antiorario attorno al centro C , passando dalla posizione della prima generatrice ($k = 0$) alla posizione della seconda generatrice ($k = +\infty$).



Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni: $3x + 2y - 1 = 0$ e $6x + 4y + 3 = 0$, stabilisci se è proprio o improprio e determina l'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1.

Soluzione

L'equazione del fascio è: $3x + 2y - 1 + k \cdot (6x + 4y + 3) = 0$

Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$$3x + 2y - 1 + 6kx + 4ky + 3k = 0;$$

$$(3 + 6k)x + (2 + 4k)y + 3k - 1 = 0.$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3 + 6k}{2 + 4k} = -\frac{3(1 + 2k)}{2(1 + 2k)} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{3k - 1}{2 + 4k}$$

Essendo il coefficiente angolare non dipendente dal parametro k , il fascio è improprio.

L'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1 si ottiene sostituendo le coordinate del punto $(0; 1)$, oppure imponendo che l'ordinata all'origine sia uguale a 1.

$$q = 1; \quad -\frac{3k - 1}{2 + 4k} = 1; \quad -3k + 1 = 2 + 4k; \quad 7k = -1; \quad k = -\frac{1}{7} \quad \Rightarrow$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) - 1}{2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)}; \quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{-\frac{3}{7} - 1}{2 - \frac{4}{7}}; \quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{-\frac{10}{7}}{\frac{10}{7}};$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 1.$$

Dopo aver scritto l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni: $3x - 2y + 4 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$, stabilisci se è proprio o improprio e determina l'equazione della retta del fascio parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Soluzione

L'equazione del fascio è: $3x - 2y + 4 + k(2x + y - 2) = 0$

Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$$3x - 3y + 4 + 2kx + ky - 2k = 0 ;$$

$$(3 + 2k)x + (k - 2)y + 2(2 - k) = 0 .$$

$m = -\frac{a}{b} = -\frac{k-2}{3+2k}$. Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro k , il fascio è proprio.

L'equazione della retta del fascio parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante si ottiene imponendo che il coefficiente sia uguale a 1.

$$-\frac{3 + 2k}{k - 2} = 1 ; \quad -3 - 2k = k - 2 ; \quad 3k = -1 ; \quad k = -\frac{1}{3} .$$

Sostituendo tale valore nel fascio si ha:

$$3x - 2y + 4 - \frac{1}{3} \cdot (2x + y - 2) = 0 ;$$

$$7x - 7y + 14 = 0 ;$$

$$9x - 6y + 12 - 2x - y + 2 = 0 ;$$

$$x - y + 2 = 0$$

Studiare il fascio di rette: $kx - (k - 2)y + 4k - 6 = 0$

Soluzione

1. Determiniamo le rette generatrici del fascio, riscrivendo il fascio come combinazione lineare:

$$kx - ky + 2y + 4k - 6 = 0;$$

$$2y - 6 + k(x - y + 4) = 0$$

$$\text{Per } k = 0$$

 $\rightarrow$

$$2y - 6 = 0$$

 $(I^a \text{ retta generatrice})$

$$\text{Per nessun valore di } k \text{ } (k = \infty)$$

 $\rightarrow$

$$x - y + 4 = 0$$

 $(II^a \text{ retta generatrice})$

2. Determiniamo il coefficiente angolare:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{k}{-(k-2)} = \frac{k}{k-2}. \text{ Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro } k, \text{ il fascio è proprio.}$$

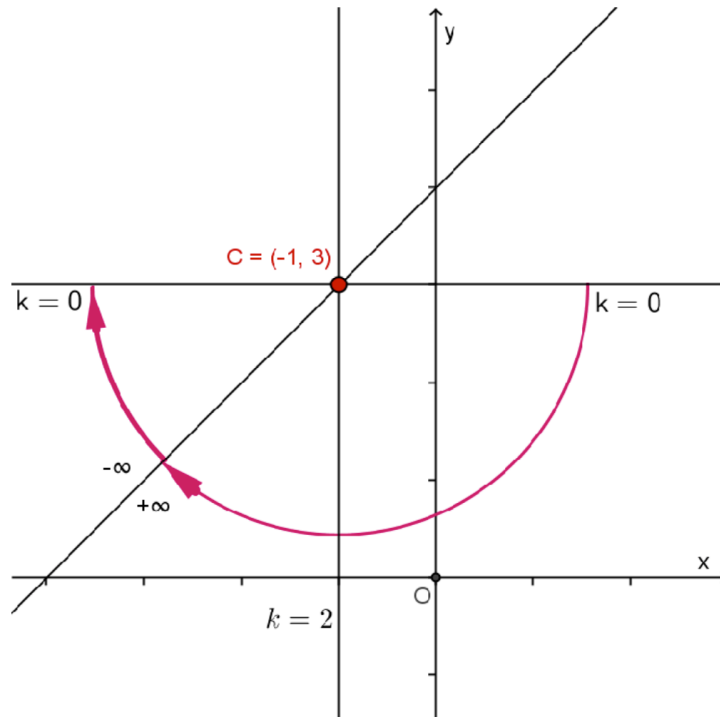
3. Determiniamo le coordinate del centro del fascio, annullando i coefficienti delle due incognite:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Per } k = 0 \rightarrow 2y - 6 = 0 \rightarrow y = 3 \\ \text{Per } k = 2 \rightarrow 2x + 8 - 6 = 0 \rightarrow x = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow C(-1; 3)$$

4. Determiniamo il movimento delle rette del fascio al variare del parametro k , mediante la rappresentazione grafica di alcune sue rette.

Dall'esame del grafico di queste rette si deduce che:

Il parametro k assume valori positivi, crescenti da 0 a $+\infty$, quando le rette del fascio, ruotano in senso orario attorno al centro C , passando dalla posizione della prima generatrice ($k = 0$) alla posizione della seconda generatrice ($k = +\infty$).



Assegnato il fascio di rette di equazione $\mathcal{F} : (3k + 2)x + (2k - 1)y - 8k = 0$ determinare:

1. la natura del fascio
2. le rette generatrici r ed s
3. il centro del fascio
4. il verso di orientamento del fascio
5. la retta v del fascio passante per il punto $P(3,4)$
6. la retta w del fascio perpendicolare alla retta $u : 3x + y - 2 = 0$
7. la retta j del fascio parallela alla retta passante per $Q(3,1)$ e $R(-5,3)$
8. l'area del triangolo ABC , con il punto $A = r \cap t$ e con il punto $B = s \cap t$, dove $t : 5x - 2y + 8 = 0$
9. Il baricentro del triangolo ABC
10. la lunghezza della mediana passante per il vertice B
11. l'equazione della mediana passante per il vertice B

Punto 1

Essendo il c.a. ($\mathcal{F}$) = $-\frac{3k+2}{2k-1}$, dipendente dal parametro k , le rette del fascio variano la loro direzione al variare del parametro k . Si tratta pertanto di un fascio di rette proprio.

Punto 2

Per $k = 0 \rightarrow 2x - y = 0$ (retta r)

Per $k = ind \rightarrow 3x + 2y - 8 = 0$ (retta s)

Punto 3

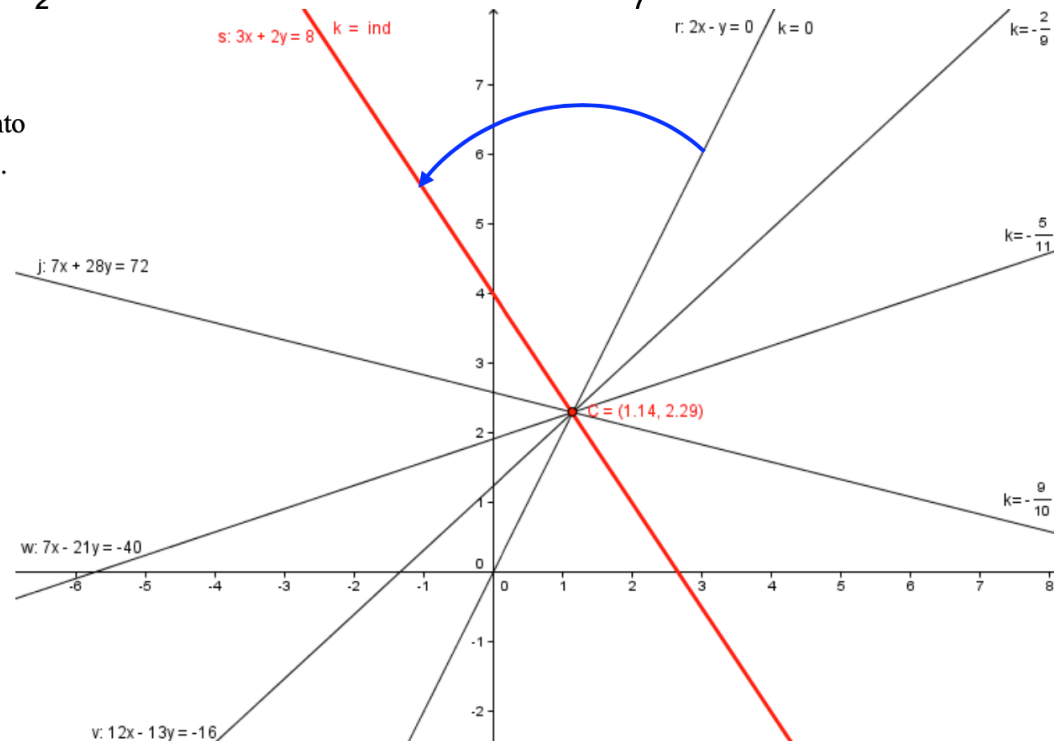
Per $k = -\frac{2}{3} \rightarrow -\frac{7}{3}y + \frac{16}{3} = 0 \quad -7y + 16 = 0 \quad y = \frac{16}{7} \cong 2,3$

Per $k = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{2}x - 4 = 0 \quad 7x - 8 = 0 \quad x = \frac{8}{7} \cong 1,1$

$\Rightarrow C\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$

Punto 4

Il verso di orientamento del fascio è antiorario.



Punto 5

$$P \in \mathcal{F} \rightarrow (3k+2) \cdot 3 + (2k-1) \cdot 4 - 8k = 0 \quad 9k+6+8k-4-8k=0 \quad 9k=-2 \quad k=-\frac{2}{9}.$$

$$\text{Pertanto la retta richiesta ha equazione: } \left[3 \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) + 2 \right] x + \left[2 \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) - 1 \right] y - 8 \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) = 0$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{13}{9}y + \frac{16}{9} = 0 \quad 12x - 13y + 16 = 0.$$

Punto 6

$$\text{Il c.a.}(u) = -3$$

$$\text{c.a.}(\mathcal{F}) \cdot \text{c.a.}(u) = -1 \quad -\frac{3k+2}{2k-1} \cdot (-3) = -1 \quad 9k+6 = -2k+1 \quad 11k = -5 \quad k = -\frac{5}{11}$$

$$\rightarrow 7x - 21y + 40 = 0$$

$$\text{Infatti: } \left[3 \cdot \left(-\frac{5}{11} \right) + 2 \right] x + \left[2 \cdot \left(-\frac{5}{11} \right) - 1 \right] y - 8 \cdot \left(-\frac{5}{11} \right) = 0 \quad \frac{7}{11}x - \frac{21}{11}y + \frac{40}{11} = 0 \quad 7x - 21y + 40 = 0$$

$$\rightarrow \text{c.a.} = -\frac{7}{-21} = \frac{1}{3}.$$

Punto 7

$$\text{Il c.a.}(QR) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{-5-3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{c.a.}(\mathcal{F}) = \text{c.a.}(qr) \rightarrow -\frac{3k+2}{2k-1} = -\frac{1}{4} \quad 12k+8 = 2k-1 \quad 12k-2k = -8-1 \quad 10k = -9 \quad k = -\frac{9}{10}$$

$$\rightarrow 7x + 28y - 72 = 0$$

$$\text{Infatti: } \left[3 \cdot \left(-\frac{9}{10} \right) + 2 \right] x + \left[2 \cdot \left(-\frac{9}{10} \right) - 1 \right] y - 8 \cdot \left(-\frac{9}{10} \right) = 0 \quad -\frac{7}{10}x - \frac{14}{5}y + \frac{72}{10} = 0$$

$$7x + 28y - 72 = 0 \rightarrow \text{c.a.} = -\frac{7}{28} = -\frac{1}{4}.$$

Punto 8

Il punto A si ottiene risolvendo il sistema: $\begin{cases} t \\ r \end{cases} \begin{cases} 5x - 2y + 8 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

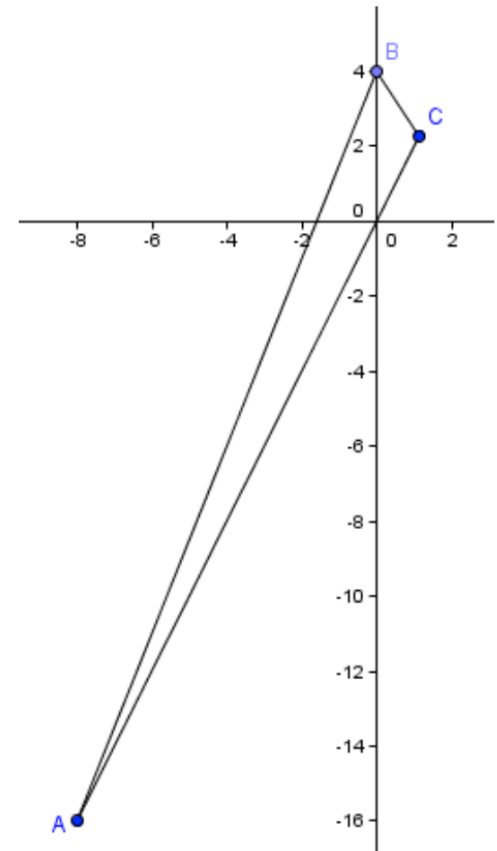
$$\begin{cases} 5x - 2y + 8 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2 \cdot 2x + 8 = 0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x = -8 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \cdot (-8) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -8 \\ y = -16 \end{cases} \Rightarrow A(-8, -16)$$

Il punto B si ottiene risolvendo il sistema: $\begin{cases} t \\ s \end{cases} \begin{cases} 5x - 2y + 8 = 0 \\ 3x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

sommando membro a membro si ha:

$$\begin{cases} 5x + 3x = 0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = 0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(0, 4)$$



$$\text{L'area del triangolo è data da: } S = \frac{1}{2} \det(M) \text{ , dove } \det(M) = \begin{vmatrix} -8 & -16 & 1 \\ \frac{8}{7} & \frac{16}{7} & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -16 \\ \frac{8}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{128}{7} + 0 + \frac{32}{7} - 0 + 32 + \frac{128}{7} = \frac{32 + 224}{7} = \frac{256}{7}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \det(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{7} = \frac{128}{7} .$$

Punto 10

Il punto medio N del lato AC ha coordinate: $A(-8, -16) \Rightarrow C\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-8 + \frac{8}{7}}{2} = \frac{\frac{-56 + 8}{7}}{2} = \frac{-48}{14} = -\frac{24}{7}$$

$$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-16 + \frac{16}{7}}{2} = \frac{\frac{-112 + 16}{7}}{2} = \frac{-96}{14} = -\frac{48}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{La mediana } BN &= \sqrt{(x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2} = \sqrt{\left(0 + \frac{24}{7}\right)^2 + \left(4 + \frac{48}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{49} + \left(\frac{28 + 48}{7}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{576}{49} + \left(\frac{76}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{49} + \frac{5776}{49}} = \sqrt{\frac{6352}{49}} = \frac{4}{7}\sqrt{397}. \end{aligned}$$

Punto 11

l'equazione della mediana BN ha equazione:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 4 \\ -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \end{pmatrix} = 0 \quad 4x - \frac{24}{7}y + \frac{96}{7} + \frac{48}{7}x = 0 \quad 28x - 24y + 96 + 48x = 0$$

$$76x - 24y + 96 = 0 \quad 19x - 6y + 24 = 0.$$