# FISICA

## Elaborazione dei dati sperimentali

*Autore*: prof. Pappalardo Vincenzo
*docente di* Matematica e Fisica

# LA MISURA

Gli strumenti di misura possono essere analogici o digitali.

In uno **strumento analogico** il valore della misura si legge su una scala graduata. In uno **strumento digitale** il valore della misura appare come una sequenza di cifre.



Le caratteristiche di uno strumento di misura sono: la precisione, la portata, la sensibilità, la prontezza.

La **precisione** di uno strumento di misura è un indice della qualità dello strumento stesso.

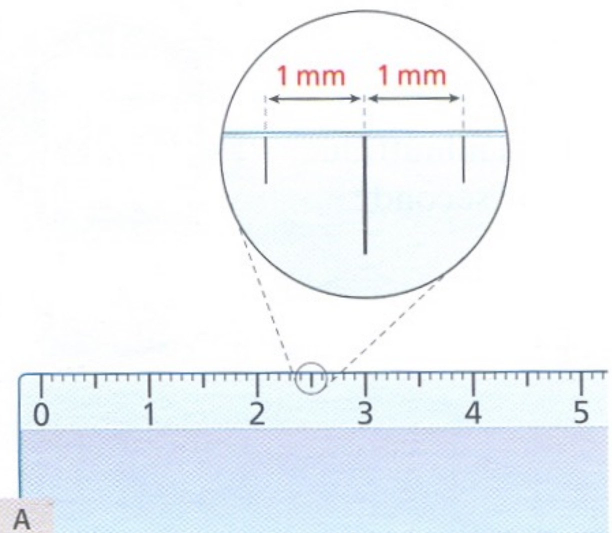
Affinché uno strumento sia preciso devono accadere due cose:

1. misurando più volte la stessa grandezza fisica, si deve ottenere praticamente sempre lo stesso risultato;
2. i valori forniti dallo strumento devono essere in accordo con quelli misurati con un altro strumento di riferimento, noto per essere affidabile.

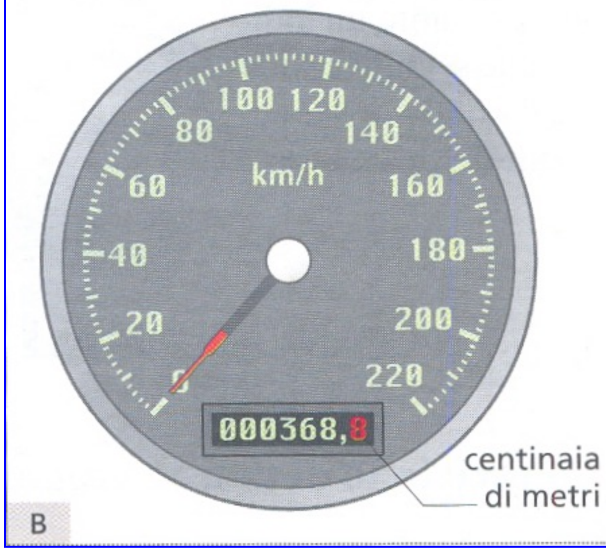
La **sensibilità** di uno strumento di misura è il più piccolo valore della grandezza fisica che lo strumento può distinguere.

Più è piccolo il valore della grandezza che si riesce a distinguere, maggiore è la sensibilità dello strumento.

▶ La sensibilità di un righello è di 1 mm: è il più piccolo valore della lunghezza che si riesce a leggere sulla scala.




▶ La sensibilità di un contakilometri è di 100 m: le centinaia di metri sono il più piccolo valore della lunghezza che si legge sul *display*.




Il righello ha una sensibilità più grande del contakilometri.

Non si confonda la sensibilità con la precisione: un orologio che misura i decimi di secondo e fa un errore di un minuto al mese è meno sensibile, ma più preciso, di un orologio che misura i centesimi di secondo e fa un errore di tre minuti al mese.

La **portata** di uno strumento di misura è il più grande valore della grandezza fisica che lo strumento può misurare.

La **prontezza** di uno strumento di misura indica la rapidità con cui esso risponde a una variazione della grandezza fisica da misurare.

più rapido

meno rapido

E' impossibile fare una misura esatta; ad ogni misura è sempre associata un'**incertezza**.

Questa impossibilità è dovuta a due ragioni:

- ❑ gli strumenti hanno una sensibilità limitata, per cui non sono in grado di distinguere grandezze che differiscono per meno di una certa quantità;
- ❑ nel fare una misura, si compiono inevitabilmente degli errori.

L'incertezza può essere ridotta, ma mai eliminata completamente.

Esaminiamo le cause d'errore.

Se misuriamo più volte la durata di dieci oscillazioni complete di un pendolo con un cronometro che indica i decimi di secondo, difficilmente otteniamo due risultati uguali. Questo accade perché, nonostante tutte le attenzioni, nell'eseguire la misura compiamo degli errori (il cronometro parte in ritardo o in anticipo rispetto all'oscillazione; fattori ambientali di vario genere, ecc.). Questi errori si chiamano *errori casuali*.

Gli **errori casuali** variano in modo imprevedibile da una misura all'altra e influenzano il risultato qualche volta per eccesso, qualche altra volta per difetto.

Gli errori casuali non sono noti prima di effettuare la misura, ma possono essere calcolati solo alla fine di una misurazione. Gli errori casuali si possono ridurre ma mai eliminare.

Se in una misura di lunghezza usiamo un righello che, per difetto di fabbricazione o altra ragione, è più lungo di 1 cm, tutte le misure che effettueremo saranno sbagliate per difetto. Se il righello è più corto di 1 cm, tutte le misure sono sbagliate per eccesso. Questi errori si chiamano *errori sistematici*.

Gli **errori sistematici** avvengono sempre nello stesso senso: o sempre per eccesso o sempre per difetto.

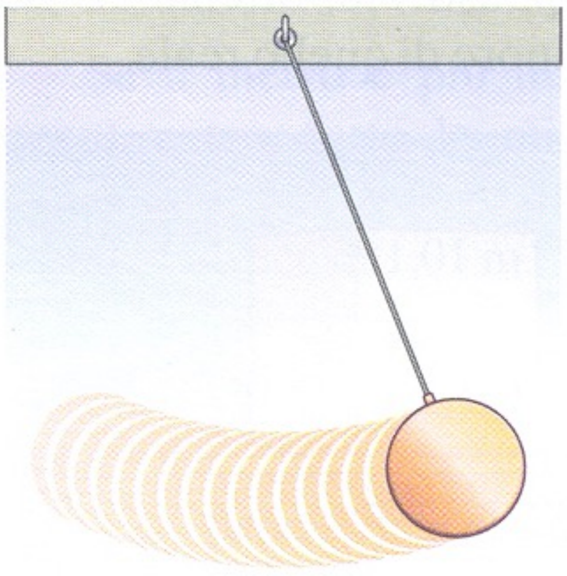
Gli errori sistematici dipendono dall'uso di strumenti difettosi, ma anche dalla maniera in cui è condotta la misura e dal metodo di misura.

Gli errori sistematici si conoscono prima di effettuare una misura. Usando strumenti migliori e applicando al meglio le metodologia di misura, gli errori sistematici si possono ridurre, ma la misura avrà sempre un' incertezza.

Esempio

# Misura delle oscillazioni di un pendolo

Riportiamo in tabella i risultati della misura, ripetuta più volte, di sei oscillazioni di un pendolo:



| MISURA DELLE OSCILLAZIONI DEL PENDOLO | |
|---|---|
| **Misura** | **Valore (s)** |
| 1 | 14,6 |
| 2 | 14,7 |
| 3 | 14,4 |
| 4 | 14,6 |
| 5 | 14,5 |
| 6 | 14,3 |

- Strumento utilizzato: cronometro
- Sensibilità: 1/10 di secondo = 0,1 s

Errore sistematico = sensibilità dello strumento = 0,1 s

A causa degli errori casuali le misure sono diverse tra di loro. Qual è il risultato della misura?

Se si fanno diverse misure, si sceglie come risultato della misura il loro **valore medio**, definito nel seguente modo:

$$\bar{x} = \frac{somma\ delle\ misure}{numero\ delle\ misure} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Il valor medio rappresenta il valore più probabile per la grandezza che abbiamo misurato, cioè il valore che più si avvicina a quello vero.

Nel caso particolare del pendolo abbiamo:

$$\bar{t} = \frac{14{,}6 + 14{,}7 + 14{,}4 + 14{,}6 + 14{,}5 + 14{,}3}{6} = 14{,}5\,\text{s}$$

Un modo semplice, anche se grossolano, di stimare l'incertezza della misura, dovuta agli errori casuali, consiste nel calcolare l'errore massimo:

**L'errore massimo** (o semidispersione massima) è definito nel seguente modo:

$$e_m = \frac{\text{valore massimo} - \text{valore minimo}}{2} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

Nel nostro esempio:

$$e_m = \frac{14{,}7 - 14{,}3}{2} = 0{,}2\,\text{s}$$

Quale errore scegliamo come incertezza sulla misura?

Si assume come errore sulla misura il più grande tra l'errore massimo (misura dell'errore casuale) e la sensibilità dello strumento (misura dell'errore sistematico).

Nel nostro esempio il risultato della misura è:

$$\boxed{\bar{t} = (14{,}5 \pm 0{,}2)\,\text{s}}$$

Il simbolo $\pm$ indica che il risultato vero della misura è compreso tra (14,5-0,2) s e (14,5+0,2) s, ossia:

Se il risultato della misura di un altro esperimento è:

$$\boxed{\bar{t} = (510 \pm 1)\, s}$$

poniamoci la seguente domanda: quale tra le due misura è la più precisa?

Per rispondere alla domanda, dobbiamo valutare l'errore relativo percentuale:

**L'errore relativo** è il rapporto tra l'errore commesso sulla misura ed il valor medio:

$$\boxed{e_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}}}$$

**L'errore percentuale** è l'errore relativo espresso in forma percentuale:

$$\boxed{e\% = e_r \cdot 100}$$

$$\bar{t} = (14,5 \pm 0,2)\,s \xrightarrow[\text{percentuale}]{\text{errore relativo}} e_r\% = \frac{0,2}{14,5} \cdot 100 \cong 1,4\%$$

$$\bar{t} = (510 \pm 1)\,s \xrightarrow[\text{percentuale}]{\text{errore relativo}} e_r\% = \frac{1}{510} \cdot 100 \cong 0,2\%$$

La seconda misura è più precisa, anche se ha un’incertezza ( errore assoluto) maggiore.

Valutiamo l'incertezza sulla misura in maniera più accurata di quella che si ottiene attraverso l'errore massimo.

Esempio

Misura del tempo di caduta di una pallina lungo un piano inclinato

Riportiamo in tabella i risultati della misura, ripetuta 50 volte:

| TEMPI DI CADUTA (s) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,26 | 1,30 | 1,29 | 1,41 | 1,44 | 1,38 | 1,42 | 1,15 | 1,49 | 1,23 |
| 1,37 | 1,59 | 1,42 | 1,33 | 1,15 | 1,35 | 1,37 | 1,31 | 1,41 | 1,35 |
| 1,28 | 1,30 | 1,31 | 1,26 | 1,32 | 1,45 | 1,40 | 1,33 | 1,34 | 1,41 |
| 1,39 | 1,27 | 1,41 | 1,25 | 1,31 | 1,45 | 1,19 | 1,39 | 1,41 | 1,27 |
| 1,46 | 1,34 | 1,44 | 1,37 | 1,35 | 1,30 | 1,35 | 1,53 | 1,32 | 1,52 |

- Strumento utilizzato: cronometro
- Sensibilità: 1/100 di secondo = 0,01 s

Secondo la procedura dell'esempio precedente, il risultato della misura (con l'errore massimo), e il relativo errore percentuale, sono:

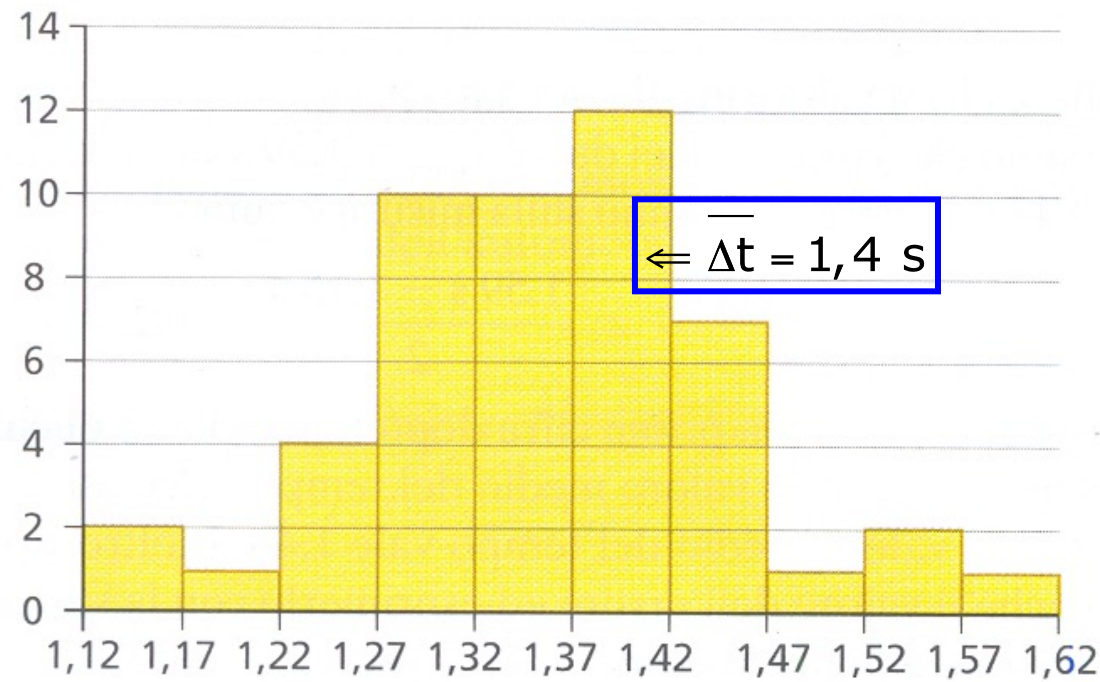
$$\boxed{\Delta t = (1,4 \pm 0,2)\,s} \qquad \boxed{e\% = 14\%}$$

Per visualizzare meglio i dati sperimentali disegniamo un istogramma, dividendo i valori dei tempi in dieci intervalli di ampiezza 0,05 s.

**SUDDIVISIONE DEI DATI IN INTERVALLI**

| Intervallo | Numero di dati |
|---|---|
| $1{,}12\ s \leq \Delta t < 1{,}17\ s$ | 2 |
| $1{,}17\ s \leq \Delta t < 1{,}22\ s$ | 1 |
| $1{,}22\ s \leq \Delta t < 1{,}27\ s$ | 4 |
| $1{,}27\ s \leq \Delta t < 1{,}32\ s$ | 10 |
| $1{,}32\ s \leq \Delta t < 1{,}37\ s$ | 10 |
| $1{,}37\ s \leq \Delta t < 1{,}42\ s$ | 12 |
| $1{,}42\ s \leq \Delta t < 1{,}47\ s$ | 7 |
| $1{,}47\ s \leq \Delta t < 1{,}52\ s$ | 1 |
| $1{,}52\ s \leq \Delta t < 1{,}57\ s$ | 2 |
| $1{,}57\ s \leq \Delta t < 1{,}62\ s$ | 1 |

# Istogramma




L'istogramma mostra in modo immediato che i dati sperimentali non sono distribuiti a caso tra il valore minimo e il valore massimo, ma tendono a essere molto più numerosi nella zona del valore medio. Ciò è dovuto agli errori casuali, che tendono sia ad aumentare che a diminuire il risultato.

Quando le misure sono numerose, è possibile la trattazione statistica dei dati sperimentali e si sceglie come valore dell'incertezza lo scarto quadratico medio:

**SCARTO QUADRATICO MEDIO**

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}}$$

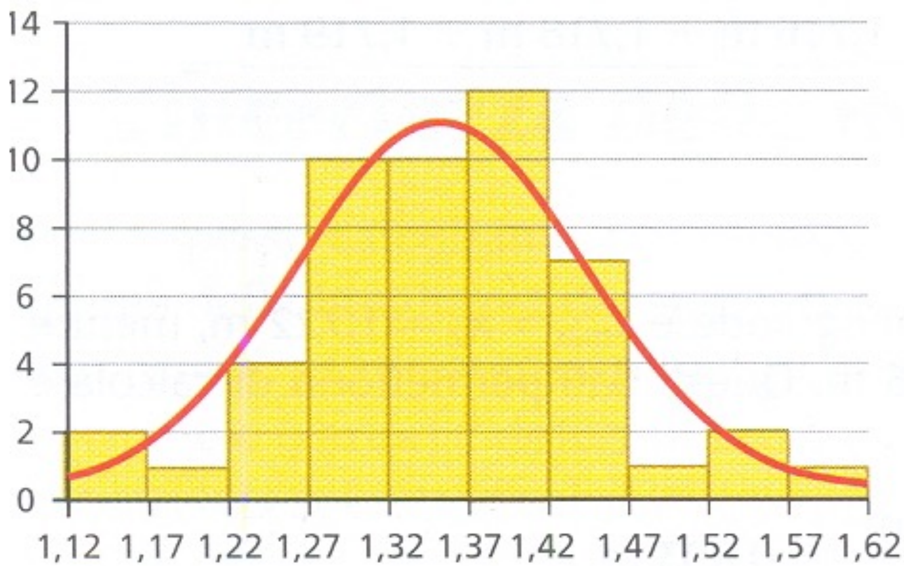
Il risultato della misura del nostro esempio diventa:

$$\boxed{\Delta t = (1{,}35 \pm 0{,}09)\,s} \qquad \boxed{e\% = 7\%}$$

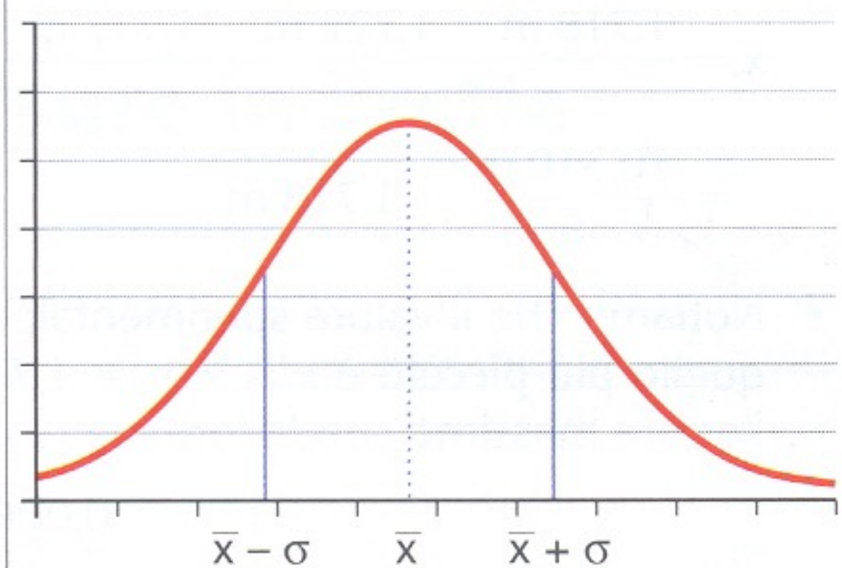
Come c'era da aspettarsi, lo scarto quadratico medio (o deviazione standard) è minore dell'errore massimo.

Pensiamo ora di aumentare moltissimo sia il numero delle misure, sia il numero degli intervalli dell'istogramma. Nella teoria statistica degli errori casuali si dimostra che, in tale condizione, tutte le distribuzioni di dati tendono ad assumere la stessa forma, data dalla curva a campana o curva di Gauss.

▶ La curva di Gauss relativa ai dati sperimentali della tabella è centrata attorno al valore medio $\overline{x}$ delle misure effettuate.




▶ Il 68,3% delle misure effettuate è compreso tra i valori $\overline{x} - \sigma$ e $\overline{x} + \sigma$, dove $\sigma$ è detta *scarto quadratico medio*.



Molto spesso, le formule fisiche sono espresse attraverso varie operazioni, come la somma o la differenza, il prodotto o il rapporto, ecc. tra grandezze fisiche.

La domanda che ci poniamo è: quanto vale l'errore sul valore della grandezza fisica ottenuto dai dati sperimentali attraverso un'operazione matematica?

L'errore sulla somma o differenza di dati sperimentali *a* e *b* è uguale alla somma dei corrispondenti errori:

$$\boxed{\Delta(a+b) = \Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b}$$

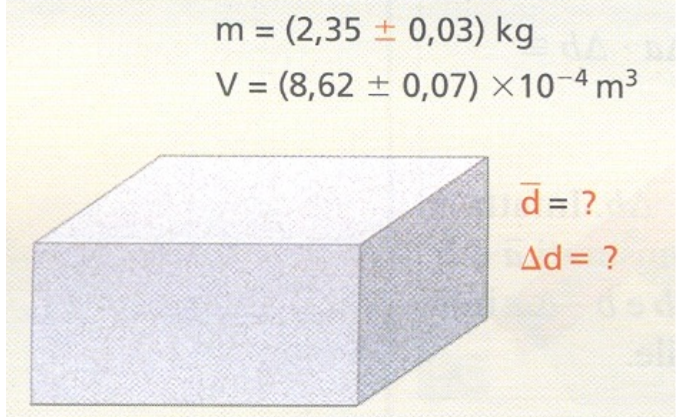
L'errore relativo sul prodotto o sul rapporto di due misure *a* e *b* è uguale alla somma degli errori relativi sulle singole misure:

$$\boxed{e_r = e_{r_a} + e_{r_b} = \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}}$$

Esempio

Per calcolare la densità di un blocchetto di granito misuriamo la sua massa, che risulta $m = (2{,}35 \pm 0{,}03)$ kg, e il suo volume, che risulta $V = (8{,}62 \pm 0{,}07) \times 10^{-4}$ m$^3$.

- Calcola il valore sperimentale $\overline{d}$ della densità così ottenuto.
- Calcola l'incertezza $\Delta d$ su tale valore.
- Esprimi il risultato della misura in maniera corretta.




## Strategia e soluzione

- Il valore sperimentale della densità è

$$\overline{d} = \frac{\overline{m}}{\overline{V}} = \frac{2{,}35\ \text{kg}}{8{,}62 \times 10^{-4}\ \text{m}^3} = 2{,}726 \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

- L'errore relativo per la densità si calcola con la formula (7):

$$\frac{\Delta d}{\overline{d}} = \frac{\Delta m}{\overline{m}} + \frac{\Delta V}{\overline{V}} = \frac{0{,}03\ \text{kg}}{2{,}35\ \text{kg}} + \frac{0{,}07 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}{8{,}62 \times 10^{-4}\ \text{m}^3} =$$

$$= 0{,}013 + 0{,}008 = 0{,}021.$$

- Abbiamo così trovato che $\Delta d/\overline{d} = 0{,}021$. Moltiplicando i due membri di questa equazione per $\overline{d}$ isoliamo $\Delta d$:

$$\Delta d = 0{,}021 \times \overline{d} = 0{,}021 \times \left(2{,}726 \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) =$$

$$= 0{,}057 \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ .$$

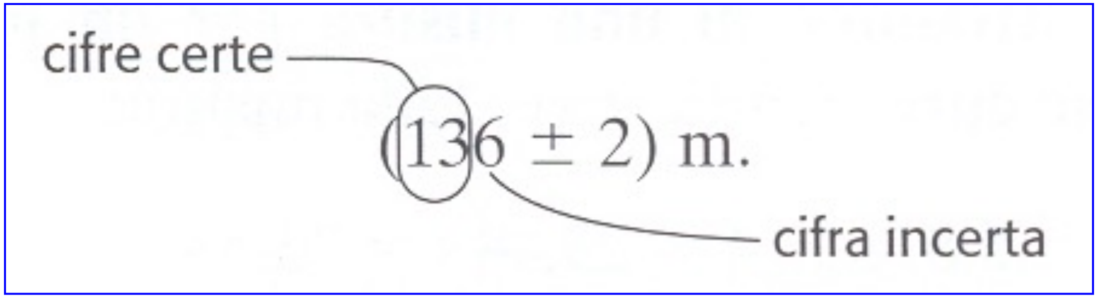
## Discussione

Visto che l'errore cade già sulla seconda cifra dopo la virgola, non ha senso scrivere il risultato dell'esperimento con tre decimali. La maniera corretta per esprimere il risultato ottenuto è:

$$d = (2{,}73 \pm 0{,}06) \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ .$$

# LE CIFRE SIGNIFICATIVE

**Le cifre significative** di una misura sono le cifre certe e la prima cifra incerta.




Le prime due cifre, 1 e 3 (che indicano rispettivamente le centinaia e le decine) sono certe, cioè esatte. L'ultima cifra 6 (che indica le unità) è invece incerta, perché compresa tra 4 e 8, in quanto l’errore di 2 m agisce proprio su questa cifra. Infatti la misura esatta è compresa tra 134 m e 138 m.

**CIFRE SIGNIFICATIVE**

| Numero | Cifre significative |
|---|---|
| 13 | 2 |
| 21,3 | 3 |
| 21,30 | 4 |
| 4720 | 4 |
| 0,3 | 1 |
| 0,03 | 1 |
| 400,32 | 5 |

Fare attenzione alla cifra 0:

· quando è alla fine del numero, è significativa;

· quando è all'inizio del numero non è significativa.

Quando ci troviamo di fronte a formule in cui il risultato è dato da operazioni matematiche fatte tra le grandezze contenute nella formula e che hanno cifre significative diverse tra di loro, il risultato con quante cifre significative va scritto?
Ecco alcune regole:

- **Moltiplicazione e divisione di una misura per un numero**. Il risultato deve avere le stesse cifre significative della misura:

  $20\,\mathrm{m} : 5 = 4{,}0\,\mathrm{m}, \qquad 5{,}87\,\mathrm{s} \times 4 = 23{,}4\cancel{8}\,\mathrm{s} = 23{,}5\,\mathrm{s}.$

- **Moltiplicazione e divisione di misure.** Il risultato deve avere lo stesso numero di cifre significative della misura meno precisa:

  $5{,}870\,\mathrm{m} \times 2{,}5\,\mathrm{m} = 14{,}\cancel{675}\,\mathrm{m}^2 = 15\,\mathrm{m}^2,$
  $48{,}2\,\mathrm{km} : 3{,}7524\,\mathrm{h} = 12{,}8\cancel{451125}\,\mathrm{km/h} = 12{,}8\,\mathrm{km/h}.$

- **Addizione e sottrazione di misure**. Bisogna prima arrotondare le misure, in modo che abbiano come ultima cifra (prima cifra incerta) quella della misura con l'incertezza più grande.

  $31{,}\cancel{9}\,\mathrm{m} + 23\,\mathrm{m} - 4{,}\cancel{7354}\,\mathrm{m} = 32\,\mathrm{m} + 23\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}.$

La misura con l'incertezza più grande è 23, perché ha come cifra incerta quella delle unità, mentre le altre due hanno incertezze sulle cifre decimali. La sua ultima cifra (cioè la sua prima cifra incerta) è 3. Tutte le altre misure vanno quindi arrotondate all'unità e poi sommate.

Gli errori vanno scritti con 1 o al massimo 2 cifre significative

Regola per l'arrotondamento

2,85 = 3 perché il numero dopo il 2, cioè 8, è maggiore o uguale a 5. Potevamo scrivere, per la stessa ragione 2,85=2,9

34,23 = 34,2 perché il numero dopo il 2, cioè 3, è più piccolo di 5. Potevamo scrivere, per la stessa ragione 34,23 = 34

**Esempio**

Risultato di una misura: 194,36 $cm^2$
Errore sulla misura: 2,85 $cm^2$ = 3 $cm^2$

Poiché l'errore è sulle unità della misura, non ha senso scrivere il risultato con 5 cifre significative. Il valore della misura va scritto nel seguente modo:

$$x = (194 \pm 3)cm^2$$