FISICA

I Vettori

Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica

Le grandezze fisiche possono essere suddivise in due grandi categorie:

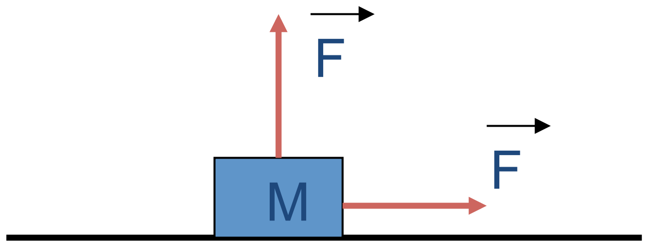
definizione

GRANDEZZE SCALARI – Sono tutte quelle grandezze fisiche che per essere completamente definite e identificate, basta associare ad esse un valore numerico, derivante da una operazione di misura, e la relativa unità di misura.

Esempio

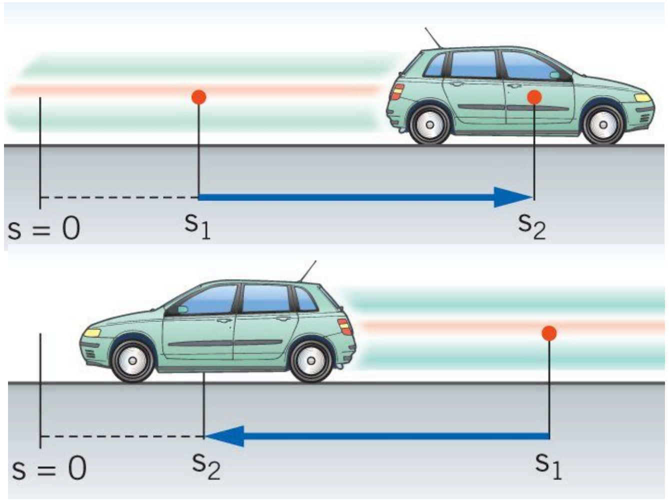
Temperatura, volume, tempo, lunghezza, massa, umidità, densità, sono tutte grandezze scalari in quanto basta assegnare loro un valore numerico e la rispettiva unità di misura, derivanti da una operazione di misura, per avere tutte le informazioni necessarie alla loro completa definizione ed identificazione.

Prendiamo in esame un'altra grandezza fisica come la forza F ed esaminiamo il suo comportamento.



La conoscenza del solo valore della forza F, per esempio F=10 N, non definisce in maniera completa la grandezza fisica forza perché non ci dà nessuna informazione sugli effetti che produce sul corpo di massa M.

La stessa forza applicata in un altro punto e lungo un'altra direzione e verso, produce un effetto diverso.



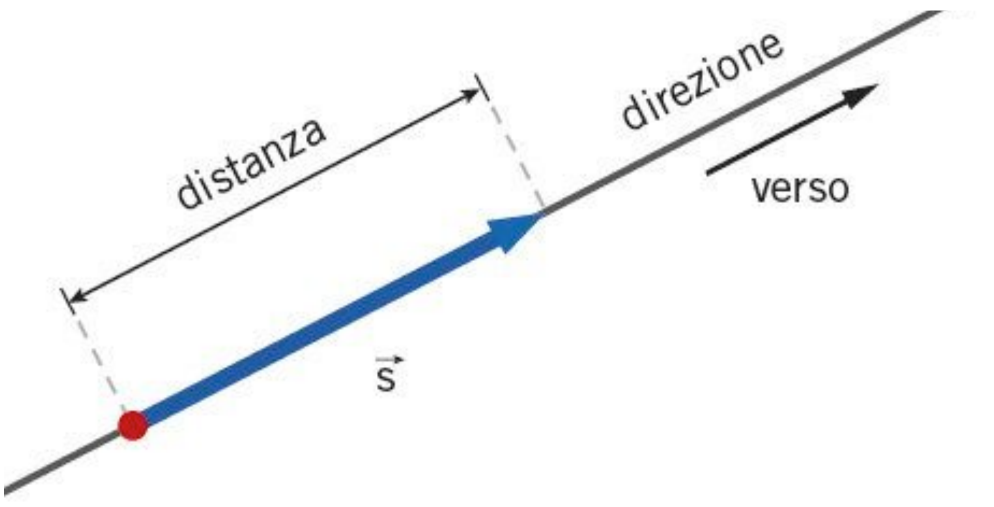
Le due macchine viaggiano, ciascuna, a 120 km/h. Ma la prima viaggia verso destra e la seconda verso sinistra. Quindi non hanno la stessa velocità.

CONCLUSIONE:

Per definire in maniera completa la grandezza fisica forza (o velocità o altre) dobbiamo dare le seguenti informazioni:

- il punto di applicazione: è il punto nel quale la forza viene applicata;
- la direzione: è la retta lungo la quale la forza agisce;
- il verso: è l'orientazione della forza;
- l'intensità o modulo: è il valore della forza che viene assegnato attraverso un 'operazione di misura.

Tutte le informazioni (punto di applicazione, verso, direzione, modulo) sono contenute in un oggetto che si chiama **vettore**.



Le grandezze fisiche come la forza (o la velocità, l'accelerazione, lo spostamento, ecc.) si chiamano grandezze vettoriali:

GRANDEZZE VETTORIALI – Sono tutte quelle grandezze fisiche che per essere completamente definite e identificate, è necessario assegnare il punto di applicazione, la direzione, il verso e l'intensità, e sono rappresentate da oggetti chiamati vettori.

Una grandezza vettoriale si indica con una freccia sul simbolo che la rappresenta, oppure il simbolo è in grassetto:

$\boxed{\mathbf{F}}$ $\boxed{\vec{F}}$

Se invece scriviamo F=10 N allora stiamo indicando solo l'intensità del vettore, ossia il valore numerico della grandezza fisica derivante da un'operazione di misura.

Alle grandezze scalari si applica il familiare calcolo algebrico:

10 m + 15 m = 25 m   9 s – 5 s = 4 s

25 kg • 2 kg = 50 kg   30 °C : 3 °C = 10 °C

Per le grandezze vettoriali dobbiamo utilizzare un altro tipo di algebra, la cosiddetta **Algebra Vettoriale**.

Esempio

COSA SIGNIFICA? In generale la somma vettoriale di due o più vettori non coincide con la somma algebrica, cioè 10 N + 20 N non dà come risultato 30 N, oppure 25 N – 10 N non dà come risultato 15 N. Così come moltiplicare due vettori è diverso dalla moltiplicazione tra due scalari.

SOMMA VETTORIALE

Se su un corpo agiscono più vettori contemporaneamente, per esempio forze, bisogna capire in che modo si sommano per determinare il vettore totale che si chiama **vettore risultante** che indicheremo con:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

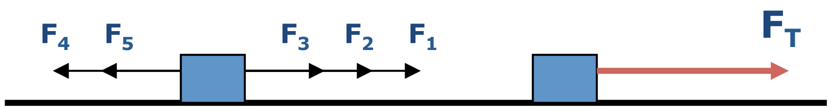
VETTORE RISULTANTE – E' quel vettore che produce lo stesso effetto se agisce da solo al posto di tutti i singoli vettori.

Come si determina il vettore risultante?

1° CASO : I vettori hanno tutti la stessa direzione ma versi diversi

Esempio

Determinare la risultante dei seguenti vettori che hanno tutti la stessa direzione (agiscono sulla stessa retta):



$F_1=30$ N $F_2=20$ N $F_3=10$ N
$F_4=25$ N $F_5=15$ N

Il vettore risultante (ma solo in questo caso) avrà come:

- intensità la somma algebrica dei singoli vettori (positivi quelli diretti verso destra e negativi quelli verso sinistra):

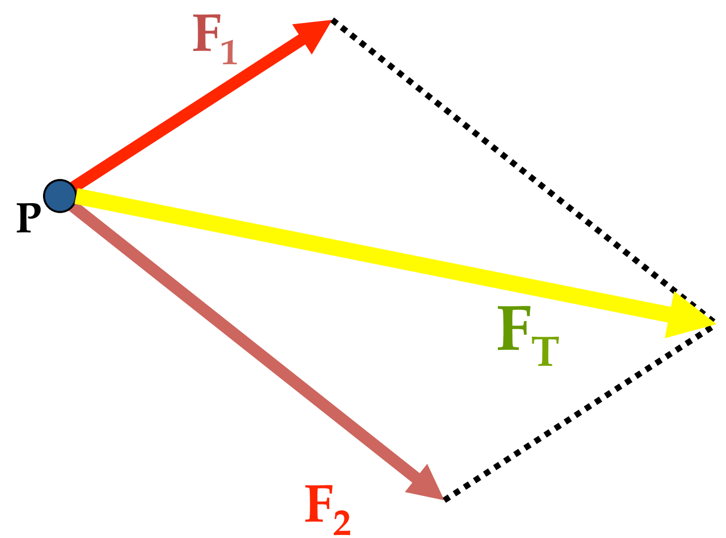
$$F_T = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 - F_5 = 30 + 20 + 10 - 25 - 15 = 20 \text{ N};$$

- direzione quella dei singoli vettori, che è unica per tutti;
- verso quello positivo, in quanto F_T è diretto verso destra perché il suo valore è + 20 N;
- punto di applicazione lo stesso dei singoli vettori.

2° CASO : I vettori hanno direzione diversa

SOMMA DI DUE VETTORI
METODO DEL PARALLELOGRAMMA

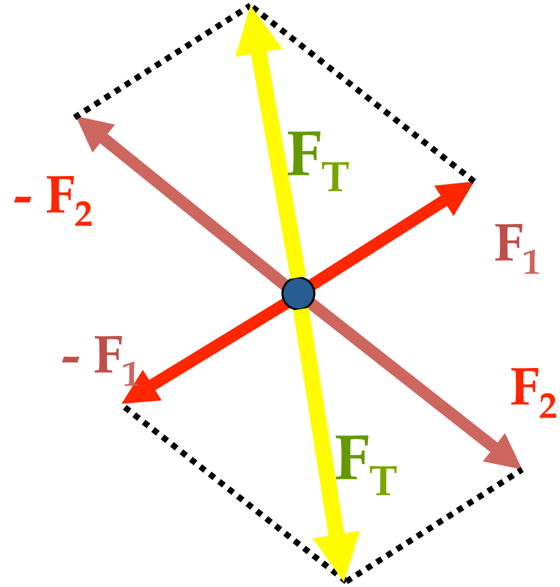
- Dalla punta di $\mathbf{F_1}$ si traccia la parallela a $\mathbf{F_2}$
- Dalla punta di $\mathbf{F_2}$ si traccia la parallela a $\mathbf{F_1}$
- La risultante $\mathbf{F_T} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ è il vettore che unisce il comune punto di applicazione P con l'intersezione delle due parallele tracciate.



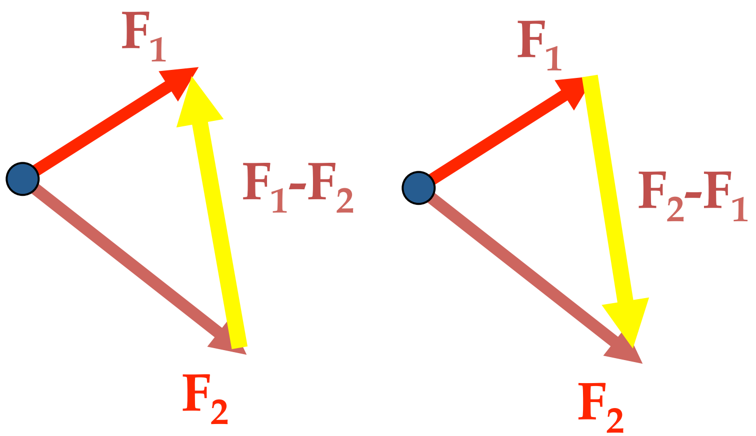
DIFFERENZA DI DUE VETTORI

$F_T = F_1 - F_2$ oppure $F_T = F_2 - F_1$

- Si traccia il vettore opposto a $\mathbf{F_2}$ cioè $-\mathbf{F_2}$ nel primo caso; si traccia il vettore opposto a $\mathbf{F_1}$ cioè $-\mathbf{F_1}$ nel secondo caso;
- Si applica la regola del parallelogramma tra $\mathbf{F_1}$ e $-\mathbf{F_2}$ nel primo caso; tra $\mathbf{F_2}$ **e** $-\mathbf{F_1}$ nel secondo caso.



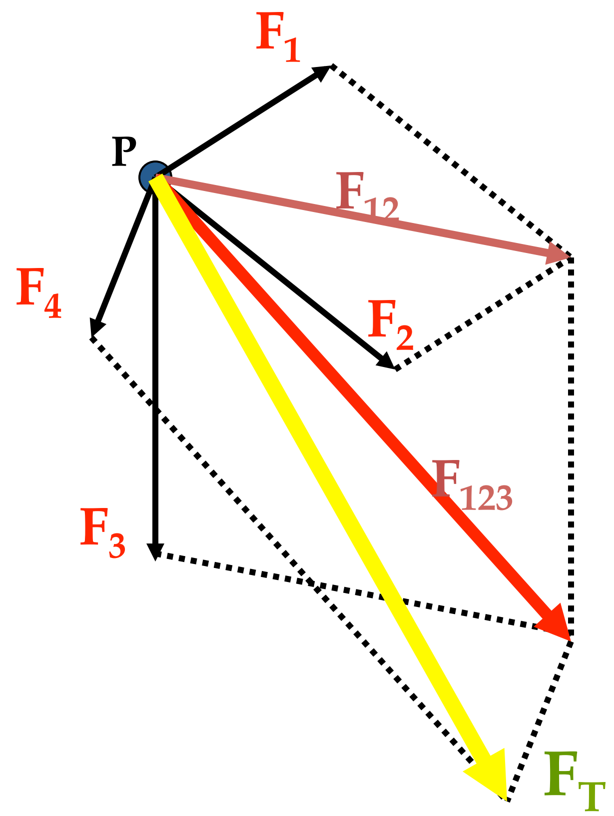
Quindi, in maniera equivalente:



SOMMA DI PIU' VETTORI

METODO DEL PARALLELOGRAMMA

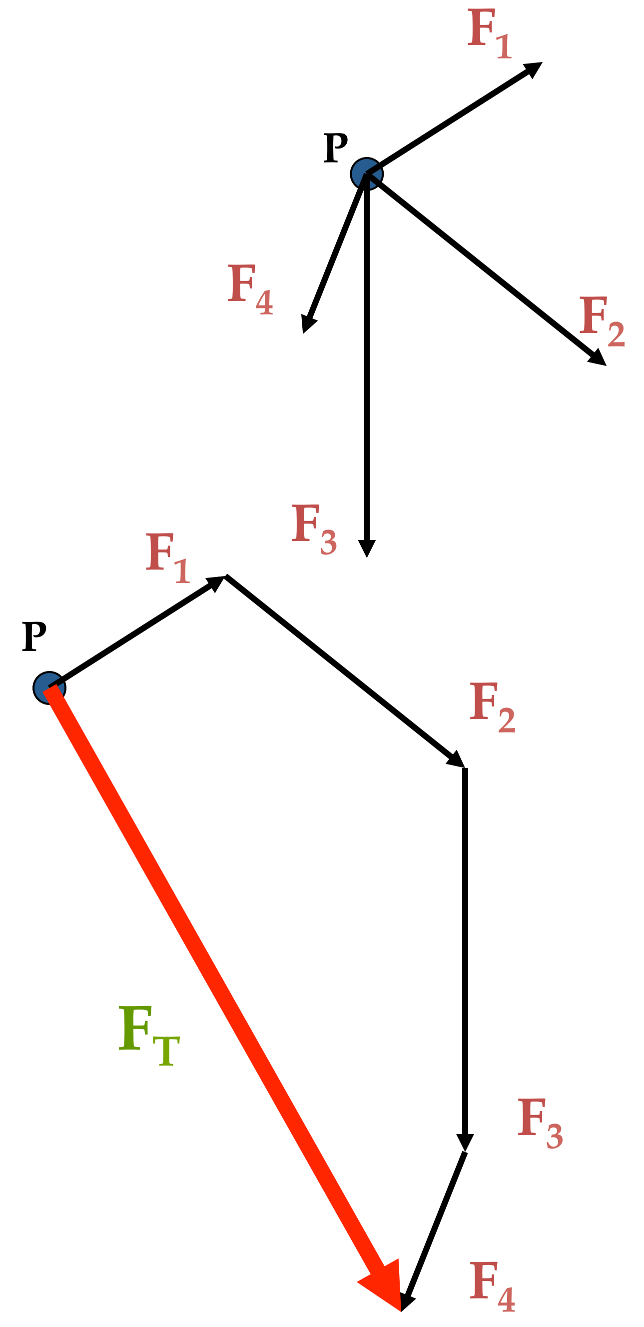
- Si applica la regola del parallelogramma a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ per determinare la risultante $\mathbf{F_{12}}$
- Si applica la regola del parallelogramma tra $\mathbf{F_{12}}$ e $\mathbf{F_3}$ per determinare la risultante $\mathbf{F_{123}}$
- Si applica la regola del parallelogramma tra $\mathbf{F_{123}}$ e $\mathbf{F_4}$ per determinare la risultante finale: $\mathbf{F_T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$
- La regola va applicata ripetutamente in presenza di più vettori.



SOMMA DI PIU' VETTORI

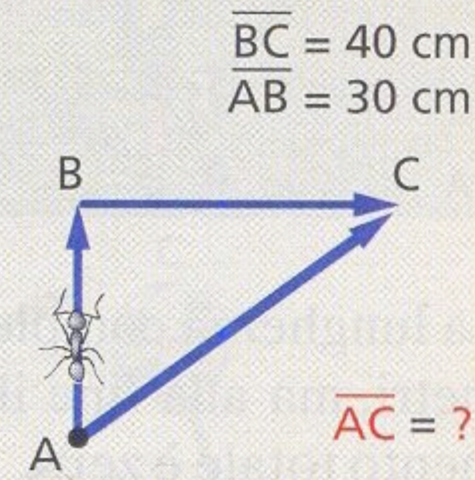
METODO DELLA POLIGONALE o PUNTA-CODA

- Si fissa nel piano, a piacere, il punto P
- Si riporta nel punto P il vettore F_1 conservando tutte le sue caratteristiche (intensità, direzione, verso)
- Si riporta la coda di F_2 sulla punta di F_1, conservando tutte le caratteristiche di F_2
- Si ripete il procedimento per F_3 e F_4
- La risultante F_T si ottiene unendo il punto P con la punta del vettore F_4



PROBLEMA

Una formica si sposta di 30 cm da *A* a *B* verso Nord, poi di 40 cm da *B* a *C* verso Est.



▶ Calcoliamo la lunghezza dello spostamento risultante.

Strategia e soluzione

- Il vettore spostamento da *A* a *B*, il vettore spostamento da *B* a *C* e lo spostamento risultante da *A* a *C* formano un triangolo rettangolo di cui *AC* è l'ipotenusa.
- Calcoliamo allora la lunghezza $\overline{AC}$ utilizzando il teorema di Pitagora:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(0{,}30\ \text{m})^2 + (0{,}40\ \text{m})^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}090\ \text{m}^2 + 0{,}16\ \text{m}^2} = \sqrt{0{,}25\ \text{m}^2} = 0{,}50\ \text{m}.$$

- Quindi lo spostamento totale della formica è lungo 50 cm.

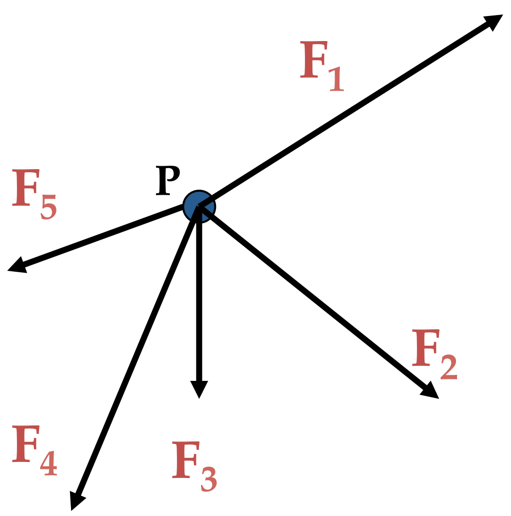
Discussione

La distanza in linea d'aria tra *A* e *C* deve essere minore della somma delle due distanze da *A* a *B* e da *B* a *C*. In effetti, la somma di queste ultime è (30 cm + 40 cm) = = 70 cm, che è maggiore della lunghezza dello spostamento totale, pari a 50 cm.

esempio

Fissare nel punto P cinque vettori con intensità, direzione, verso scelti arbitrariamente e determinare la risultante sia con il metodo del parallelogramma che con quello della poligonale.

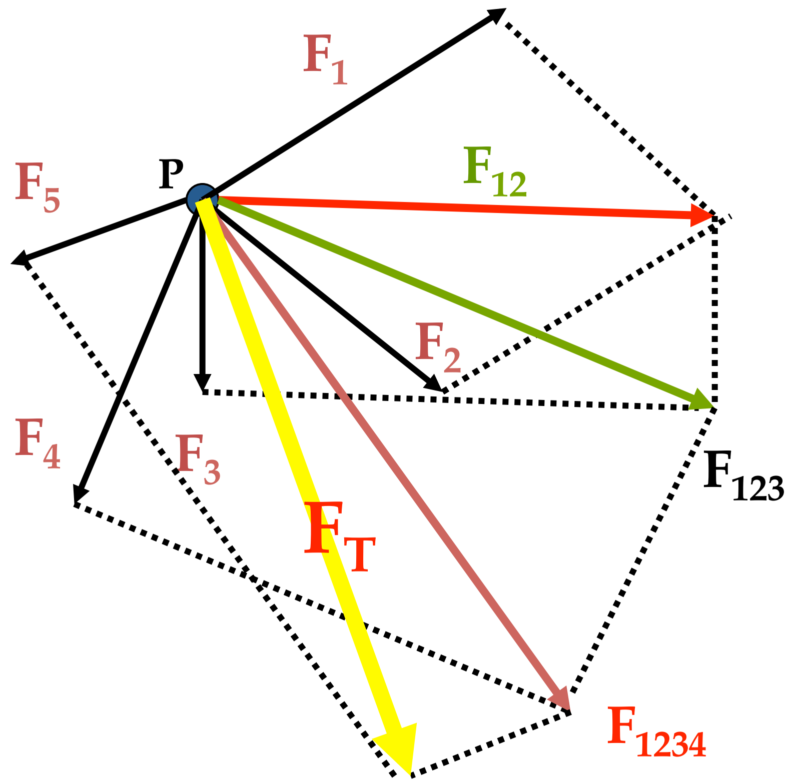
Fissiamo i seguenti vettori con le relative intensità:

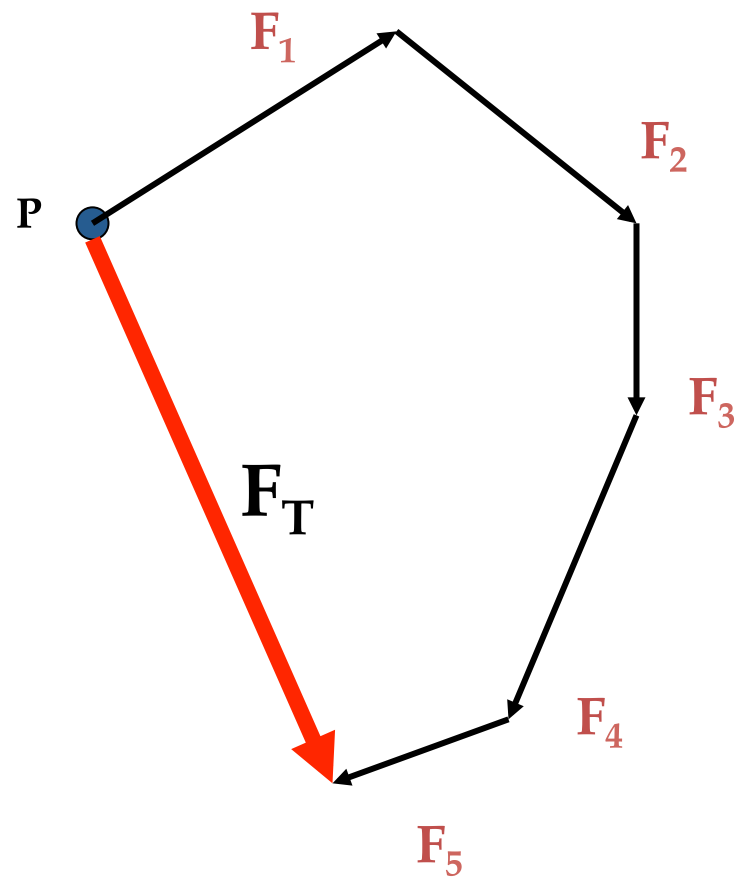


F_1=30 N F_2=20 N F_3=10 N
F_4=25 N F_5=15 N

scala: 5 N = 1 cm

METODO DEL PARALLELOGRAMMA	METODO PUNTA-CODA

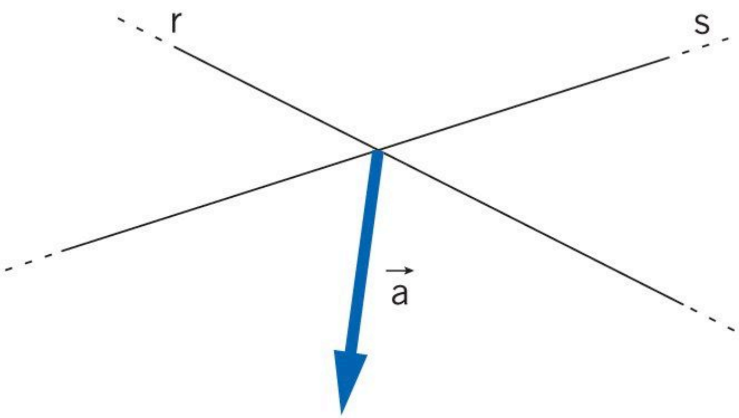


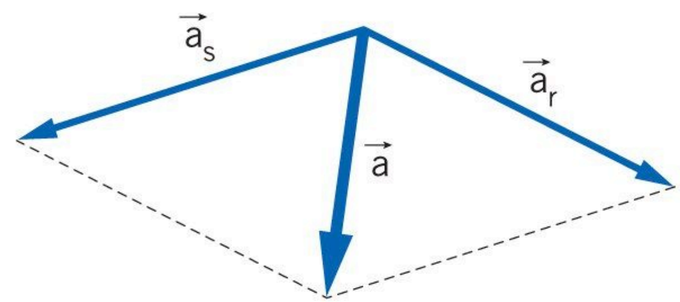


I due metodi sono equivalenti: L'intensità della risultante F_T si determina nel seguente modo: $F_T = 10 \times 5 = 50$ N, dove 10 cm, per esempio, è la lunghezza del vettore F_T misurata con una riga.

SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE

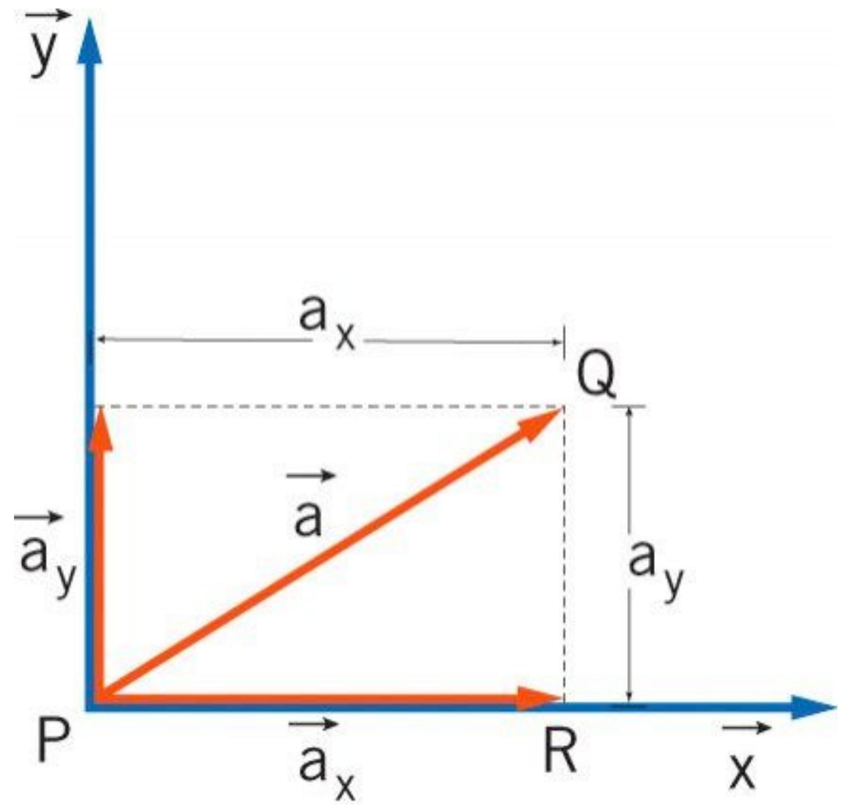
E' l'operazione inversa della somma vettoriale: dato un vettore **a**, trovare le sue due componenti $\mathbf{a}_s$ e $\mathbf{a}_r$ (lungo direzioni prefissate) tali che la loro somma vettoriale $\mathbf{a}_s+\mathbf{a}_r$ sia uguale al vettore $\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_r$





Dato il vettore **a** e due direzioni qualsiasi r e s, applicando la regola del parallelogramma al contrario, otteniamo le componenti $\mathbf{a}_s$ e $\mathbf{a}_r$ lungo le direzioni prefissate in modo che $\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_r$

Il caso che ci interessa maggiormente è quello in cui le direzioni prefissate sono quelle degli assi cartesiani (X,Y), per cui il vettore **a** viene scomposto nelle componenti $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_{y:}$



MOLTIPLICAZIONE DI UN NUMERO PER UN VETTORE

Esempio

Sia F=10 N una forza applicata ad un corpo. Se triplichiamo la forza, quanto vale la forza risultante?

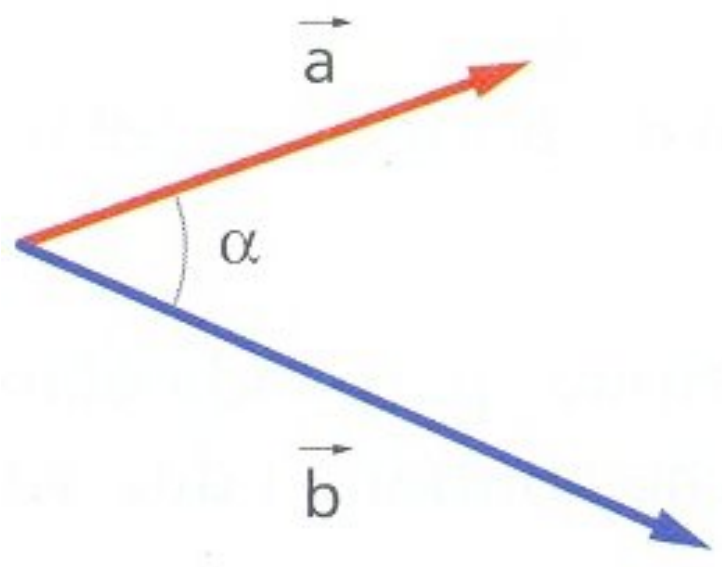
F = 10 N $\qquad$ F_T = 30 N

Il prodotto di un numero k per un vettore **F** dà come risultato un vettore $\mathbf{F}_T$ che ha lo stesso punto di applicazione, direzione e verso del vettore **F** ed un modulo k volte quello di **F**:

$$\mathbf{F}_T = k \cdot \mathbf{F}$$

PRODOTTO TRA DUE VETTORI

Esistono due tipi di prodotti tra vettori: il prodotto scalare e il prodotto vettoriale.



PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare tra due vettori **a** e **b** dà come risultato uno scalare S dato da:

$$\boxed{S = \vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\alpha}$$

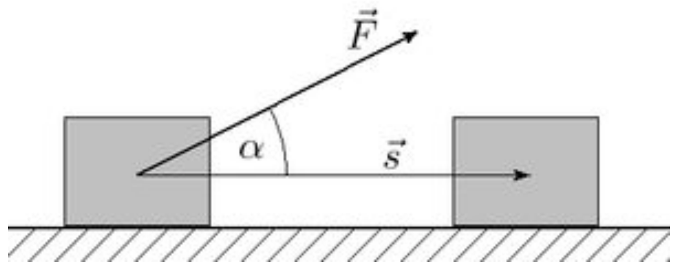
$a, b \rightarrow \text{moduli dei vettori } \vec{a} \text{ e } \vec{b}$

$\alpha \rightarrow \text{angolo tra i due vettori } \vec{a} \text{ e } \vec{b}$

Esempio

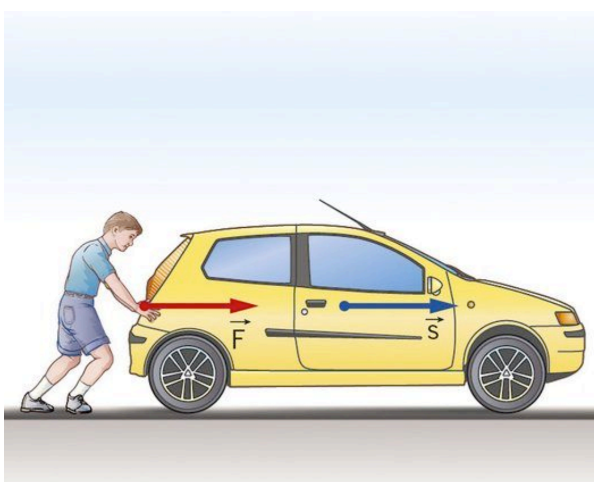
La grandezza fisica "lavoro" è un esempio di prodotto scalare, infatti è definita come il prodotto scalare tra il vettore forza **F** e il vettore spostamento **s** :

$$L = \vec{F} \bullet \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha \quad [\text{Joule (J)}]$$



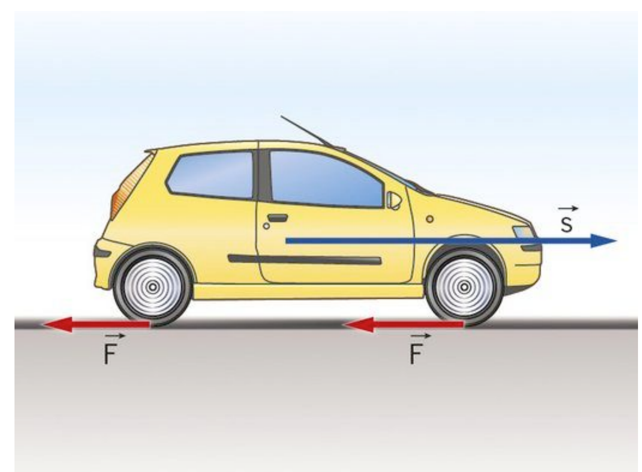
Lavoro motore (lavoro positivo)

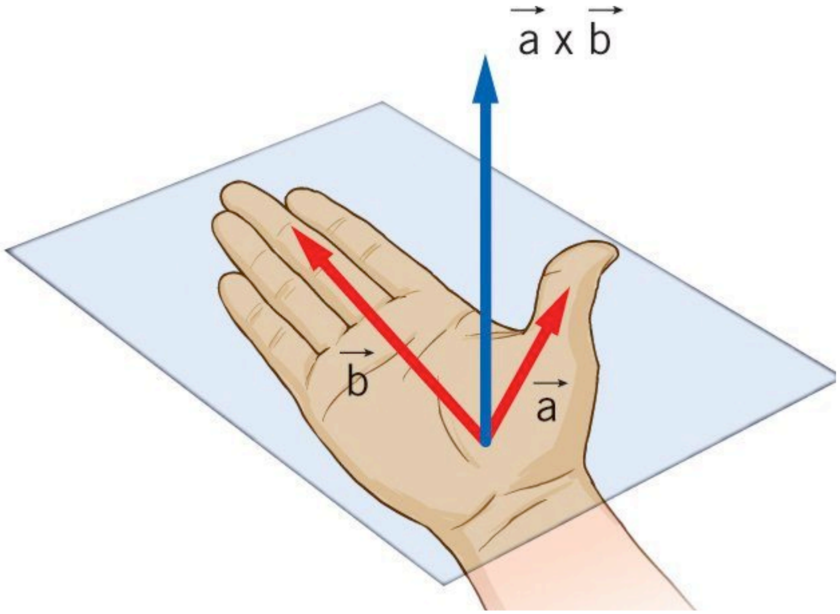
$$0 < \alpha < 90° \rightarrow L > 0$$



Lavoro resistente (lavoro negativo)

$$90° < \alpha < 180° \rightarrow L < 0$$





Regola mano destra: se si pone il pollice della mano destra nel verso del vettore **a** e le altre dita nel verso del vettore **b**, il vettore **V**=**a**⊗**b** è uscente dal palmo della mano.

PRODOTTO VETTORIALE

Il prodotto vettoriale tra due vettori **a** e **b** dà come risultato un vettore **V=a⊗b** che ha come direzione quella perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b**, come verso quello della regola della mano destra (o regola equivalente) e come modulo

$$\boxed{V = ab\,sen\alpha}$$

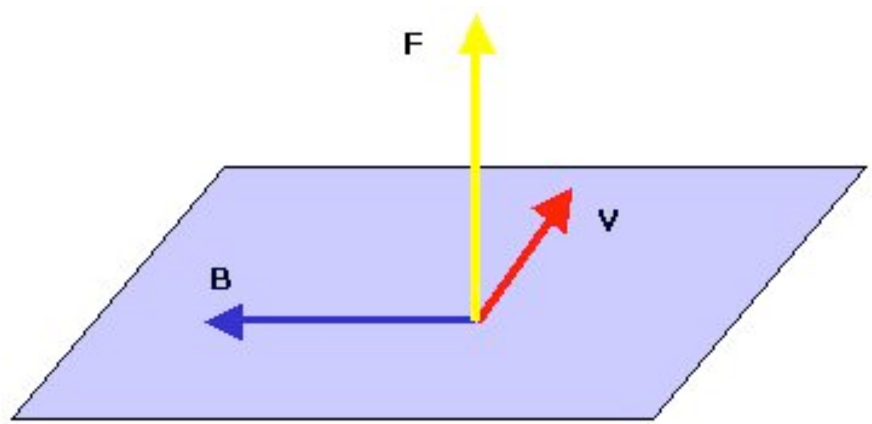
$a,b \rightarrow$ moduli dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$\alpha \rightarrow$ angolo tra i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Esempio

Una carica elettrica q che entra con velocità **v** dentro un campo magnetico **B**, subisce una forza magnetica **F** (devia dalla sua traiettoria) data dal prodotto vettoriale tra **v** e **B**:

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \otimes \vec{B})}$$



modulo di F

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot sen\alpha$$

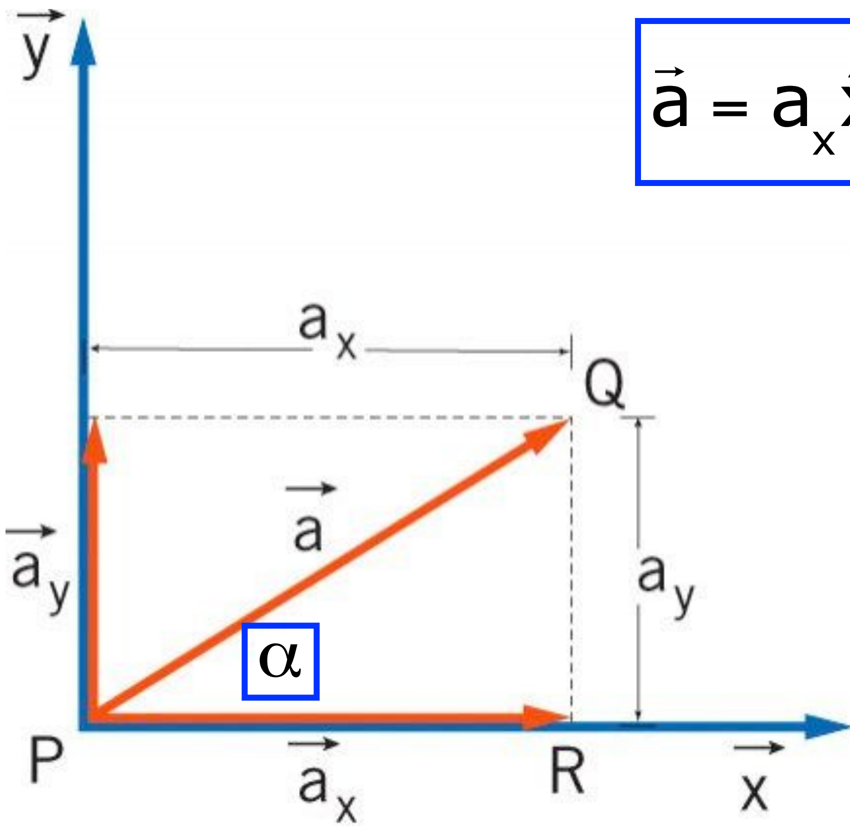
direzione e verso

regola della mano destra

Ponendo il pollice della mano destra nel verso della velocità **v** e le altre dita nel verso del campo magnetico **B**, la forza magnetica **F** avrà direzione perpendicolare al palmo della mano e verso uscente.

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DI UN VETTORE

Abbiamo visto che un vettore **a** può essere scomposto tramite le componenti $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$ prese sugli assi cartesiani. Pertanto, il vettore **a** può essere espresso tramite le sue componenti $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$:



$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} \xrightarrow{\text{oppure}} \vec{a} = (\vec{a}_x ; \vec{a}_y)$$

modulo di $\vec{a}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

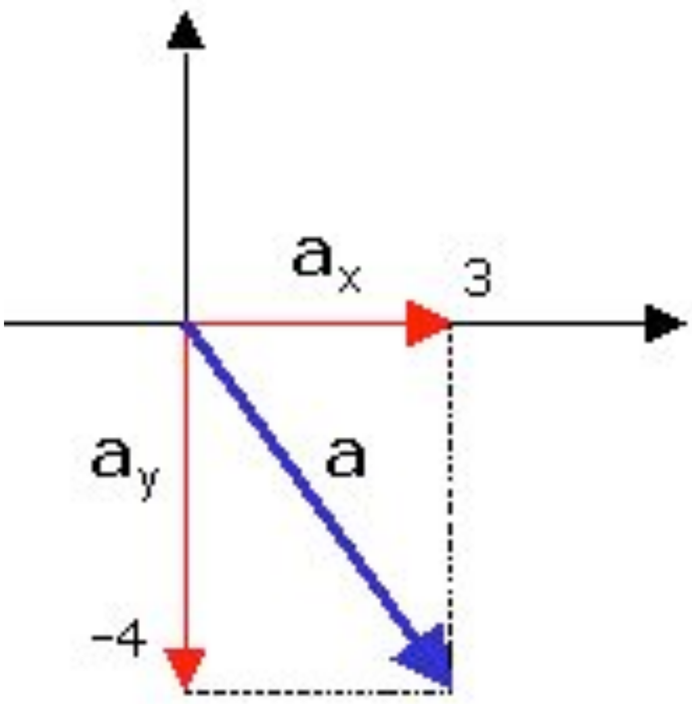
angolo α

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x} \xrightarrow{\text{calcolatrice}} \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\alpha$$

Esempio

Rappresentare nel piano cartesiano il seguente vettore:

$$\boxed{\vec{a} = 3\hat{x} - 4\hat{y} \xrightarrow{\text{oppure}} \vec{a} = (3;-4)}$$

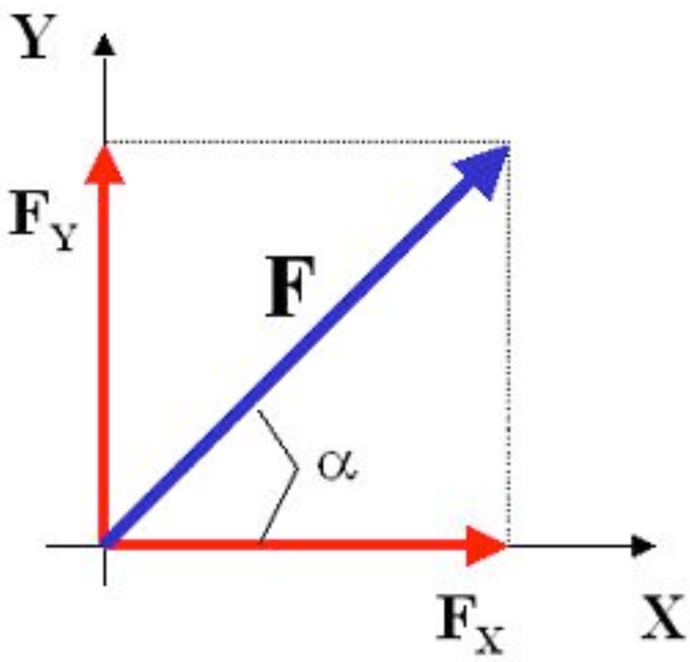


$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$tg\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \xrightarrow{calcolatrice} \alpha \cong 53°$$

Esempio

Il vettore forza **F** è così rappresentato:



Componenti del vettore **F**	Modulo del vettore **F**	Argomento del vettore **F**
$F_X = F \cdot \cos\alpha$ $F_Y = F \cdot \mathrm{sen}\alpha$	$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$	$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_Y}{F_X}$ $\alpha = \mathrm{arctg}\alpha$

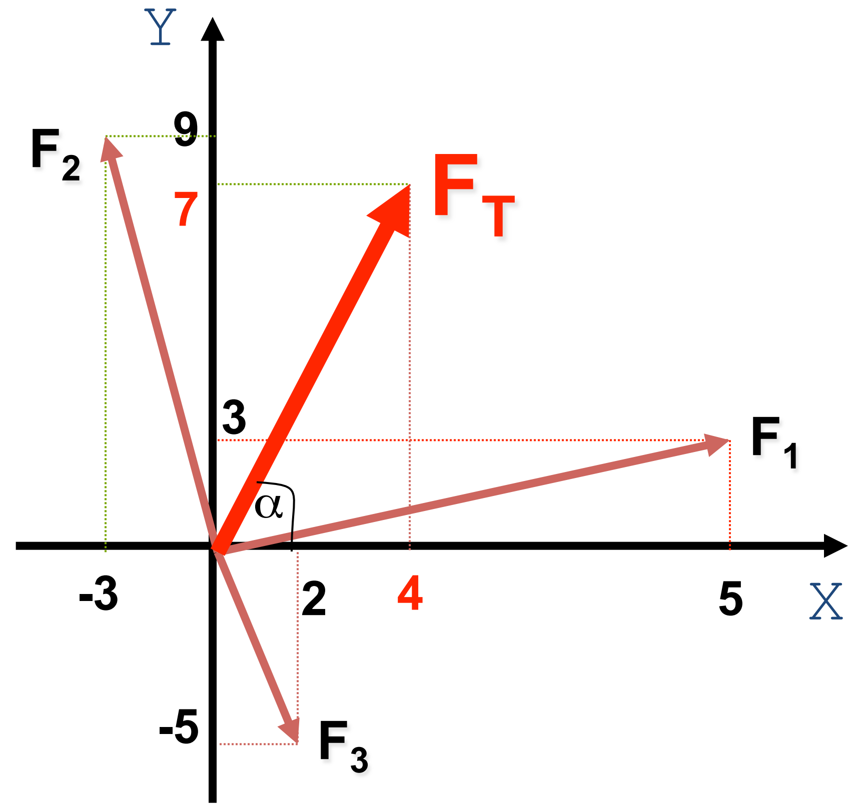
Esempio

Determinare la risultante delle seguenti forze che agiscono su un corpo posto nell'origine degli assi cartesiani:

$F_1=(5;\ 3)$ $F_2=(-3;\ 9)$ $F_3=(2;\ -5)$

Somma di vettori: metodo analitico

- ✓ Si rappresentano i vettori sul piano cartesiano
- ✓ Si calcolano le coordinate del vettore risultante
- ✓ Si applica il teorema di Pitagora per calcolare l'intensità del vettore risultante e le nozioni di trigonometria per calcolare il suo argomento
- ✓ Si disegna il vettore risultante



$$F_{Tx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x} = 5 - 3 + 2 = 4N$$

$$F_{Ty} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} = 3 + 9 - 5 = 7N$$

$$F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = 8,1N$$

$$tg\alpha = \frac{F_{Ty}}{F_{Tx}} = \frac{7}{4} = 1,75 \Rightarrow \alpha = 60,3°$$

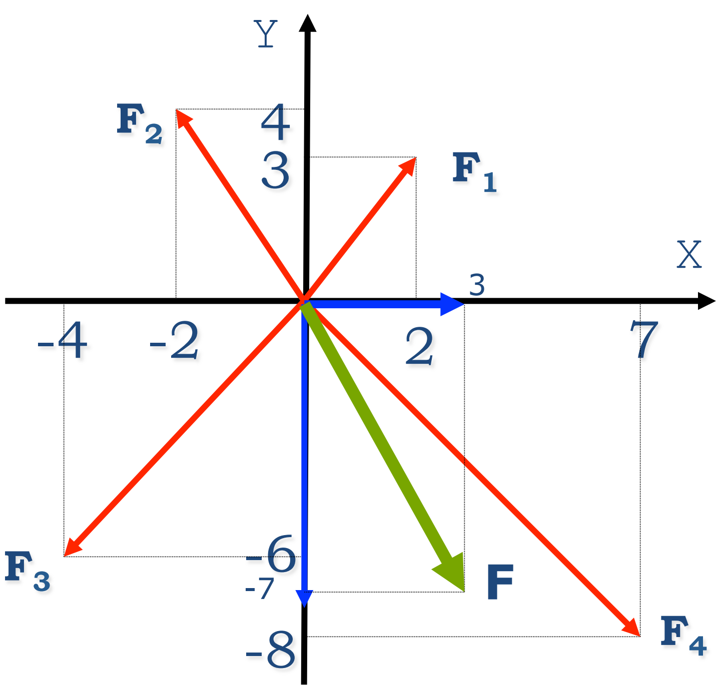
Esempio

Rappresentare nel piano cartesiano i seguenti vettori e determinare la loro risultante:

$F_1=(2;\ 3)$ $F_2 = (-2;\ 4)$ $F_3 = (-4;\ -6)$ $F_4 = (7;\ -8)$

COMPONENTI CARTESIANE DI UNA SOMMA DI VETTORI

Le componenti cartesiane del vettore somma di due o più vettori sono uguali alla somma delle componenti corrispondenti dei vettori sommati.



$$F_x = 2 - 2 - 4 + 7 = 3N$$

$$F_y = 3 + 4 - 6 - 8 = -7N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{9 + 49} = 7,6N$$

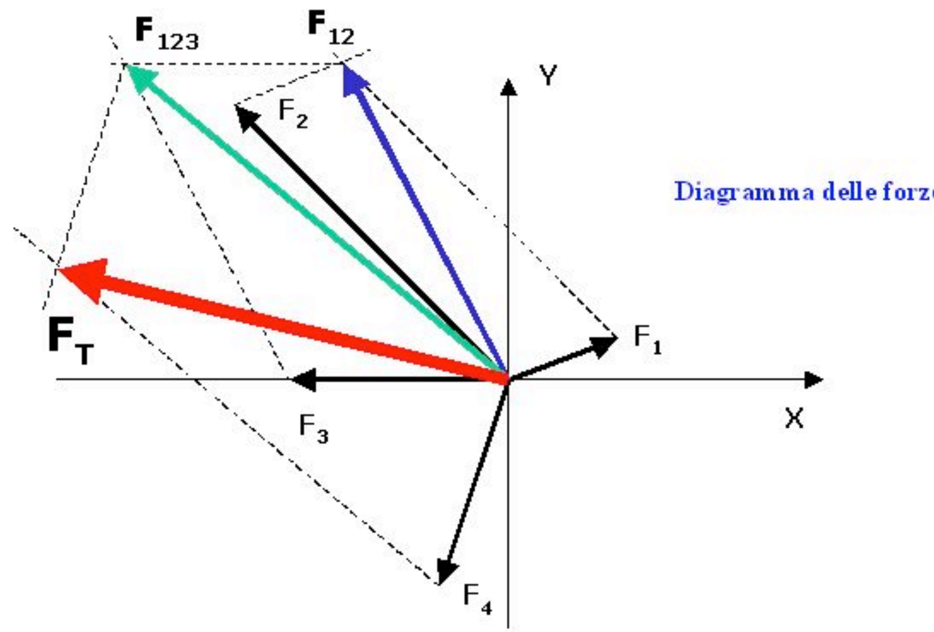
$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-7}{3} = -2,33 \xrightarrow{\text{calcolatrice}} \alpha \cong -67°$$

Esempio

Determinare la risultante delle seguenti forze, date in coordinate polari (modulo e angolo):

F_1=30 N α_1=30° F_2=140 N α_2=135° F_3 = 70 N α_3=180° F_4 = 80 N α_4=250°

Disegniamo le singole forze:



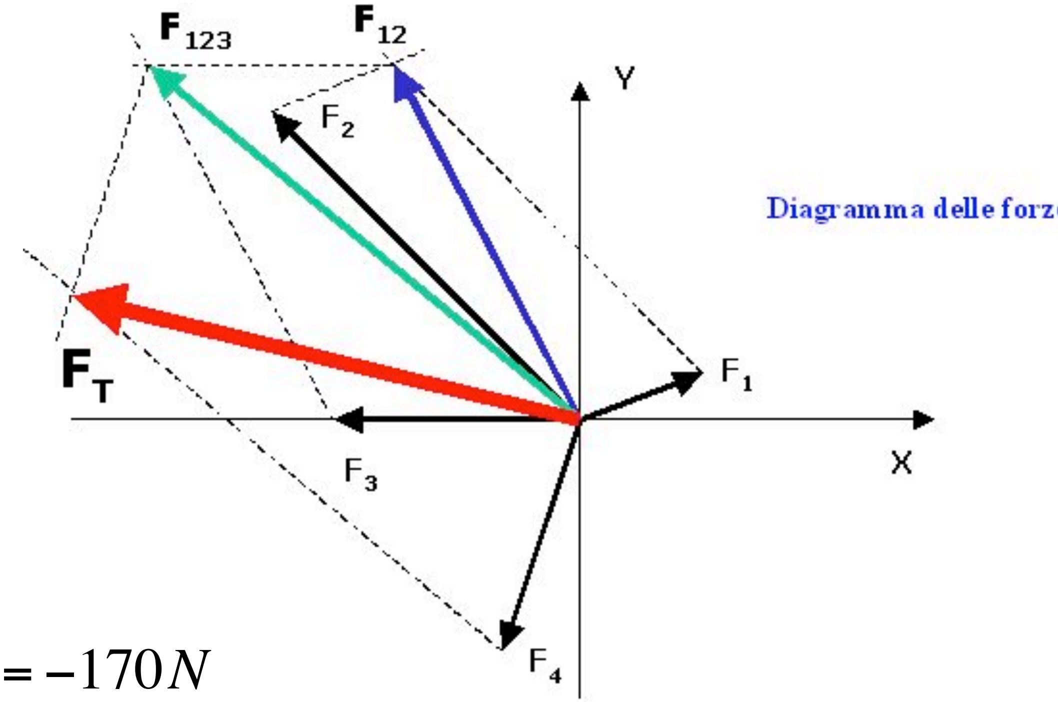
Le componenti delle singole forze sono:

$$F_{1X} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 30 \cdot \cos 30° = 26\text{N}$$
$$F_{1Y} = F_1 \cdot \text{sen}\alpha_1 = 30 \cdot \text{sen}30° = 15\text{N}$$

$$F_{2X} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 140 \cdot \cos 135° = -99\text{N}$$
$$F_{2Y} = F_2 \cdot \text{sen}\alpha_2 = 140 \cdot \text{sen}135° = 99\text{N}$$

$$F_{3X} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 70 \cdot \cos 180° = -70\text{N}$$
$$F_{3Y} = 0$$

$$F_{4X} = F_4 \cdot \cos\alpha_4 = 80 \cdot\cdot \cos 250° = -27\text{N}$$
$$F_{4Y} = F_4 \cdot \text{sen}\alpha_4 = 80 \cdot \text{sen}250° = -75\text{N}$$



La risultante è:

$$F_{XT} = \sum F_X = 26 - 99 - 70 - 27 = -170\,N$$

$$F_{YT} = \sum F_Y = 15 + 99 + 0 - 75 = 39\,N$$

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{(-170)^2 + (39)^2} = \sqrt{28900 + 1521} = \sqrt{30421} = 174\,N$$

$$tg\alpha = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{39}{-170} = -0,23 \xrightarrow{calcolatrice} \alpha = -13° = 167°$$