FISICA

STATICA

Equilibrio dei solidi

Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica

EQUILIBRIO DI UN PUNTO MATERIALE

Un corpo è in equilibrio quando è fermo e continua a restare fermo. Ma quali condizioni devono essere soddisfatte affinché un corpo rimanga in equilibrio?

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DI UN PUNTO MATERIALE

Un punto materiale, fermo in un certo sistema di riferimento, rimane in equilibrio quando, in quel riferimento, è nulla la risultante delle forze che agiscono su di esso:

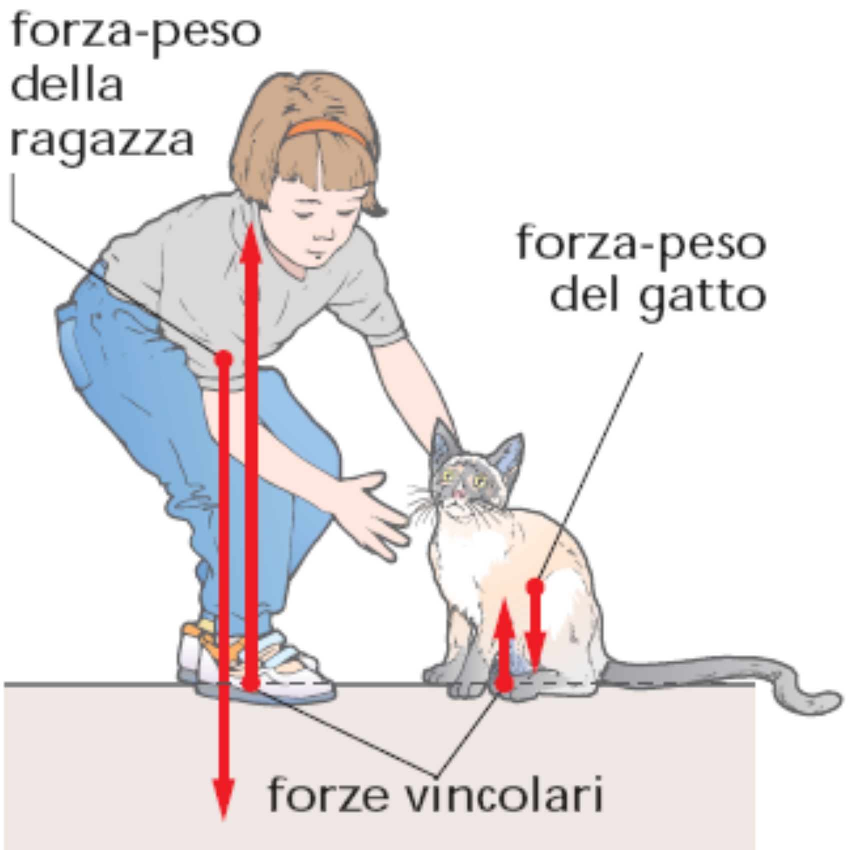
$$\boxed{\Sigma \vec{F} = 0}$$

In genere gli oggetti non sono liberi di muoversi. Il loro comportamento dipende dalla presenza di vincoli:

un **vincolo** è qualsiasi condizione che limita il moto di un corpo.

In meccanica, essendo solo le forze capaci di modificare lo stato di quiete o di moto di un sistema, l'azione dei vincoli si esplica attraverso un insieme di forze dette **forze vincolari** o **reazioni vincolari** che agiscono sui punti del sistema, limitandone il moto.

❑ Equilibrio su un piano orizzontale



Il pavimento (il vincolo) esercita sulla ragazza (o sul gatto) una forza vincolare uguale e opposta alla forza peso della ragazza (o del gatto). La ragazza (o il gatto) rimane in equilibrio (ferma) perché:

forza vincolare + forza peso = 0

Sul libro agisce la forza peso **F**, ma il tavolo (vincolo) reagisce con una forza **R** (reazione vincolare) uguale e contraria che permette al libro di rimanere in equilibrio:

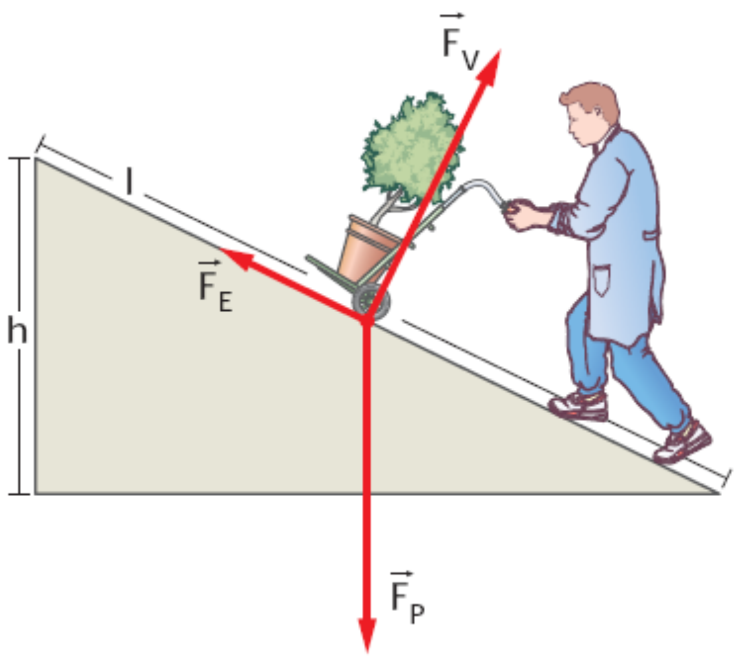
$$\boxed{\vec{F} + \vec{R} = 0}$$

Le forze vincolari vanno contate nella condizione di equilibrio.

❑ Equilibrio su un piano inclinato

Le tre forze che agiscono sul carrello sono:

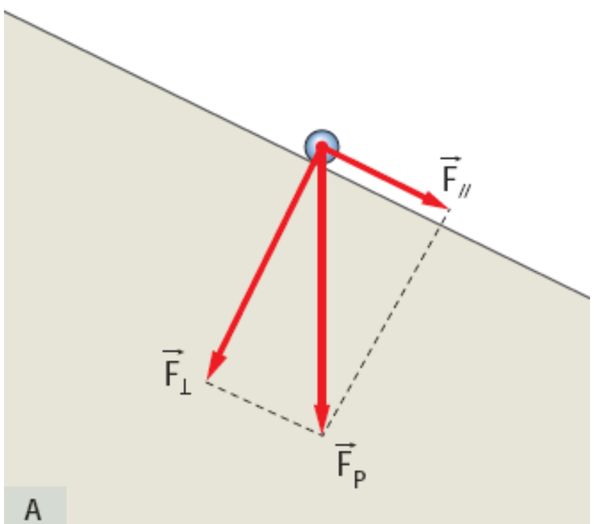
- ✓ la forza-peso del vaso+carrello
- ✓ la forza equilibrante dell'uomo
- ✓ la forza vincolare perpendicolare al piano



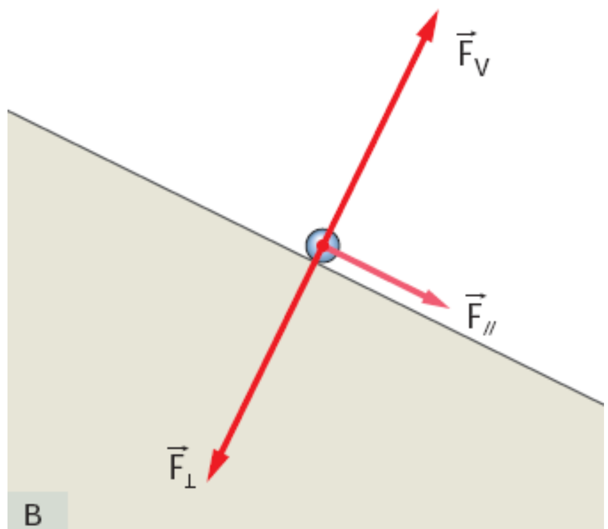
Ma $\mathbf{F}_E$ equilibra quale forza?

Scomponiamo la forza peso $\mathbf{F_P}$ nelle sue componenti. Scegliamo il seguente sistema di assi cartesiani: l'asse delle x lungo il piano inclinato; l'asse delle y perpendicolare al piano inclinato:

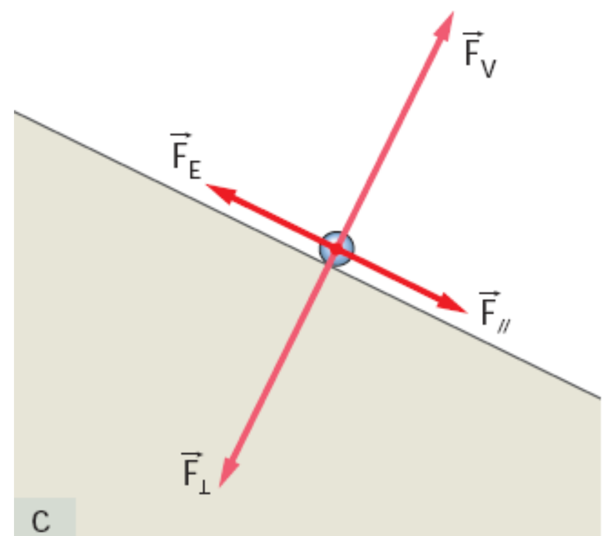
▶ Visto che $\vec{F}_V$ agisce in direzione perpendicolare al piano inclinato, è conveniente scomporre $\vec{F}_P$ in due componenti $\vec{F}_\perp$ e $\vec{F}_{//}$.



▶ Il vettore componente $\vec{F}_\perp$, perpendicolare al piano, è compensato esattamente da $\vec{F}_V$, perché il punto non si stacca dal piano.



▶ Resta il componente $\vec{F}_{//}$, parallelo al piano. Perché l'oggetto sia fermo va applicata su di esso la forza equilibrante $\vec{F}_E = -\vec{F}_{//}$.



La condizione di equilibrio per il punto materiale sul piano inclinato è:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_E = F_{//} \Rightarrow F_E = F_P \cdot \mathrm{sen}\alpha = mg \cdot \frac{h}{L}}$$

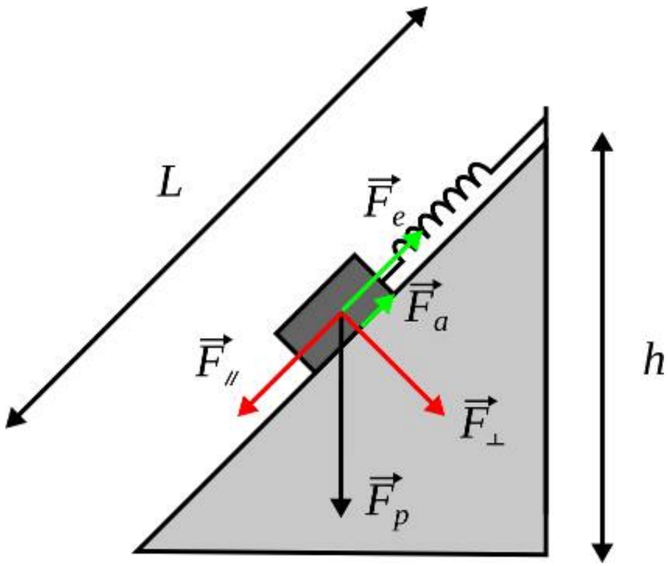
RICORDA

$$\boxed{F_{//} = F_P \cdot \mathrm{sen}\alpha}$$

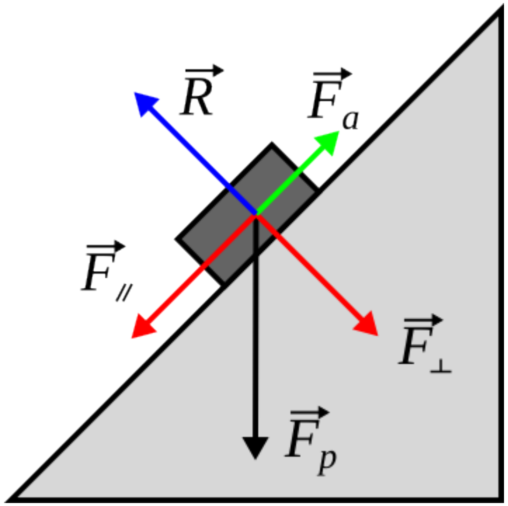
$$\boxed{F_{\perp} = F_P \cdot \cos\alpha}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\alpha = \frac{h}{L}}$$

La condizione di equilibrio per un punto materiale su un piano inclinato può riguardare altre situazioni.



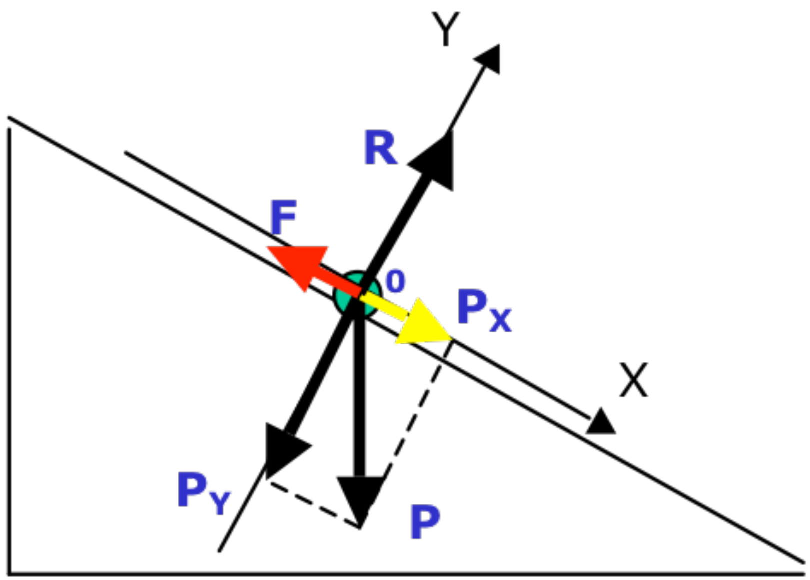
$$\Sigma\vec{F} = 0$$
$$F_e = F_{//} \Rightarrow kx = P\text{sen}\alpha$$



$$\Sigma\vec{F} = 0$$
$$F_a = F_{//} \Rightarrow \mu_s F_\perp = P\text{sen}\alpha \Rightarrow \mu_s P\cos\alpha = P\text{sen}\alpha$$

ESEMPIO

Un libro, che ha peso 4N, viene mantenuto in equilibrio su un piano inclinato alto 0,4 m e lungo 0,8 m. Trascurando l'attrito, determina la forza necessaria a mantenere in equilibrio il libro.



1. Dopo aver fissato un sistema di assi cartesiani, disegnare tutte le forze che agiscono sul libro in equilibrio.

2. Un punto materiale è in equilibrio se la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla:

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

3. Infatti la componente **P**$_Y$ della forza peso **P** è controbilanciata dalla reazione vincolare **R**:

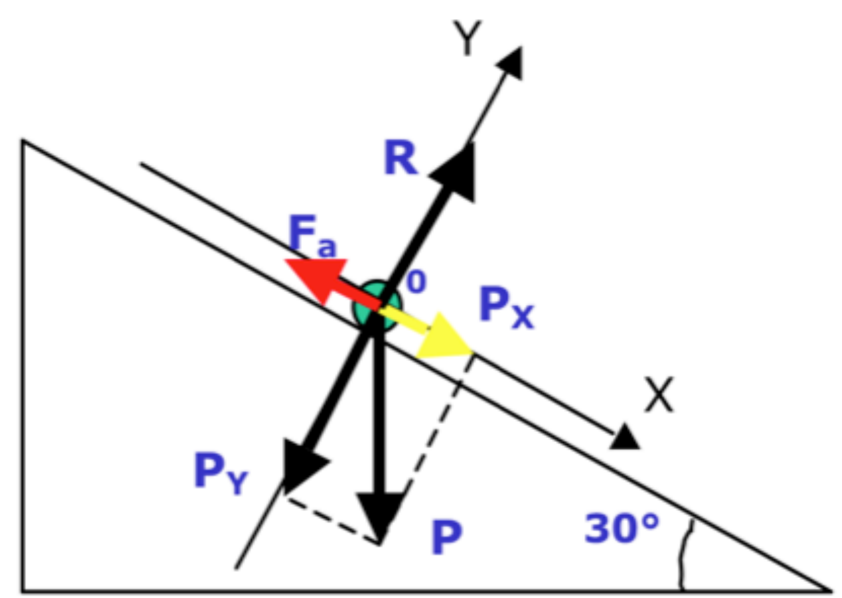
$$\vec{P}_y = -\vec{R}$$

4. Mentre la componente **P**$_X$ è controbilanciata dalla forza **F** che dobbiamo applicare per mantenere in equilibrio il libro ed il suo valore è dato da:

$$F = P_x = P \cdot sen\alpha = P \cdot \frac{h}{L} = \frac{0,4}{0,8} \cdot 4 = 2N$$

ESEMPIO

Un corpo è posto su un piano inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale. Sapendo che il coefficiente di attrito statico fra corpo e piano vale 0.4, stabilire se il corpo è in equilibrio.



$$P_x = P \cdot \operatorname{sen}\alpha$$
$$P_Y = P \cdot \cos\alpha$$

1. Dopo aver fissato un sistema di assi cartesiani, disegnare tutte le forze che agiscono sul corpo in equilibrio.

2. Un punto materiale è in equilibrio se la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = 0}$$

3. La componente **P**$_Y$ della forza peso **P** è controbilanciata dalla reazione vincolare **R**:

$$\boxed{\vec{P}_y = -\vec{R}}$$

4. Verifichiamo se la componente $\mathbf{P}_X$ è controbilanciata dalla forza di attrito $\mathbf{F}_a$:

$$F_a = P_x$$

$$\mu_s \cdot P_y = P \cdot sen\alpha \Rightarrow \mu_s \cdot \cancel{P} \cdot \cos\alpha = \cancel{P} \cdot sen\alpha$$

$$\mu_s = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = tg30° = 0,58$$

5. Il corpo per essere in equilibrio dovrebbe avere un coefficiente di attrito pari o superiore a 0,58. Poiché il coefficiente di attrito statico fra corpo e piano vale 0.4, inferiore a quello calcolato, la conclusione è che il corpo non è in equilibrio per cui scivola lungo il piano.

EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

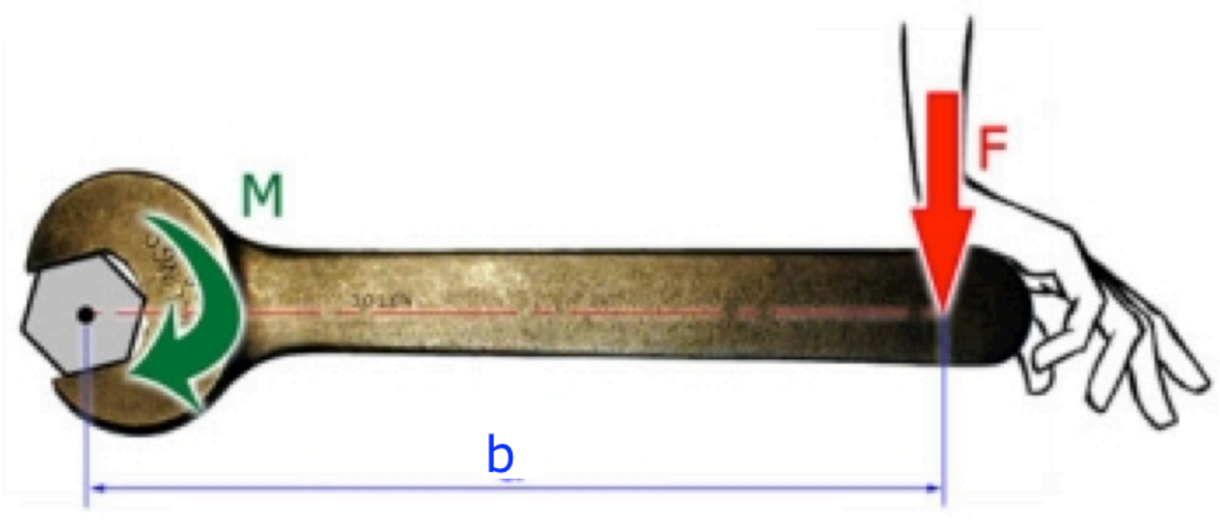
Il **corpo rigido** è un oggetto esteso che non viene deformato, qualsiasi sia la forza ad esso applicata.

Un corpo rigido, a differenza del punto materiale, può **ruotare** oltre che **traslare**.

Ma quali sono le condizioni di equilibrio per un corpo rigido? Dobbiamo prima introdurre alcuni concetti.

Momento di una forza

La rotazione della chiave è tanto più agevole quanto maggiore è la distanza (braccio) della forza applicata rispetto al bullone. Dunque, l'effetto di rotazione non dipende soltanto dalla forza ma anche dal braccio.

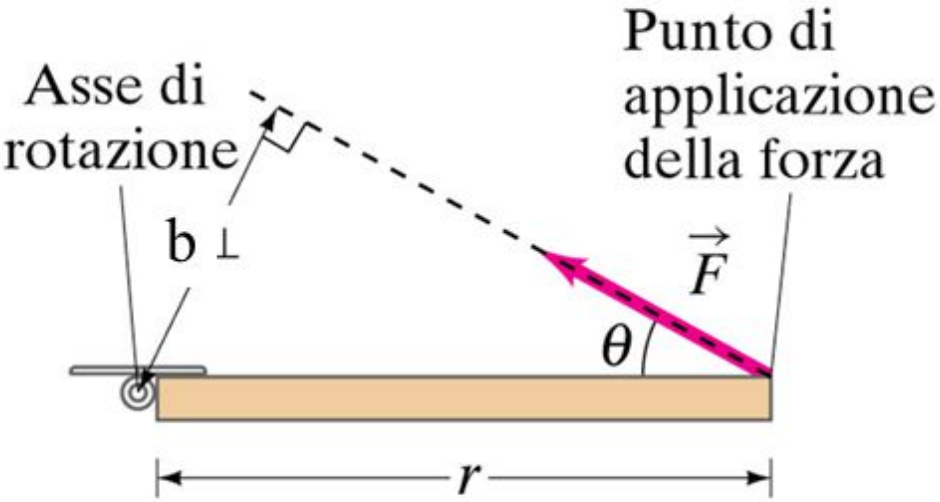


L'effetto di rotazione di una forza è espresso dal suo momento **M** così definito:

MOMENTO DI UNA FORZA

Il momento **M** di una forza rispetto ad un punto rappresenta la capacità della forza di produrre una rotazione intorno a quel punto. E' un vettore definito come il prodotto vettoriale tra **F** ed **r**:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \otimes \vec{F}}$$



$$\boxed{b = r \cdot \mathrm{sen}\theta}$$

Unità di misura:
[N•m]

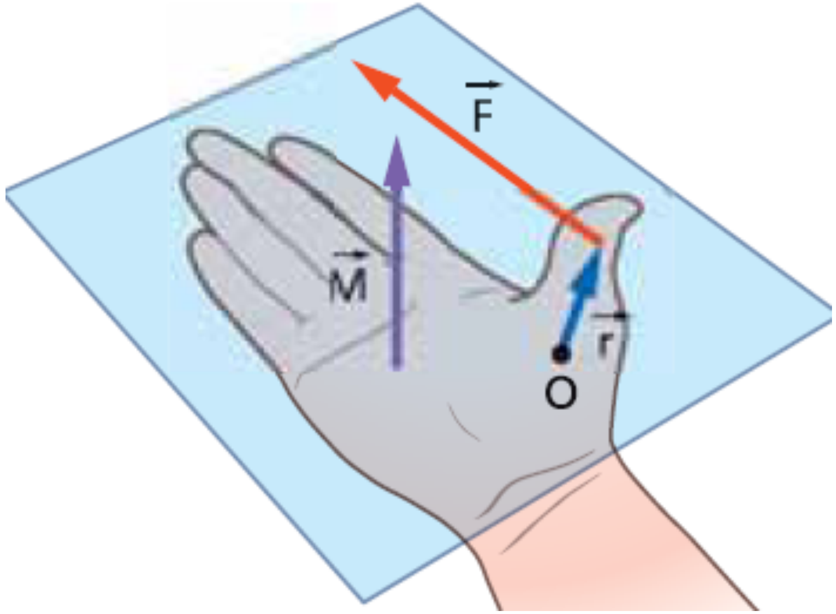
Dunque, il momento **M** di una forza ha tutte le caratteristiche di un prodotto vettoriale:

MOMENTO DI UNA FORZA

- Modulo:

$$M = F \bullet b \bullet \text{sen}\theta$$

- direzione perpendicolare al piano contenente **F** e O
- verso della regola della mano destra

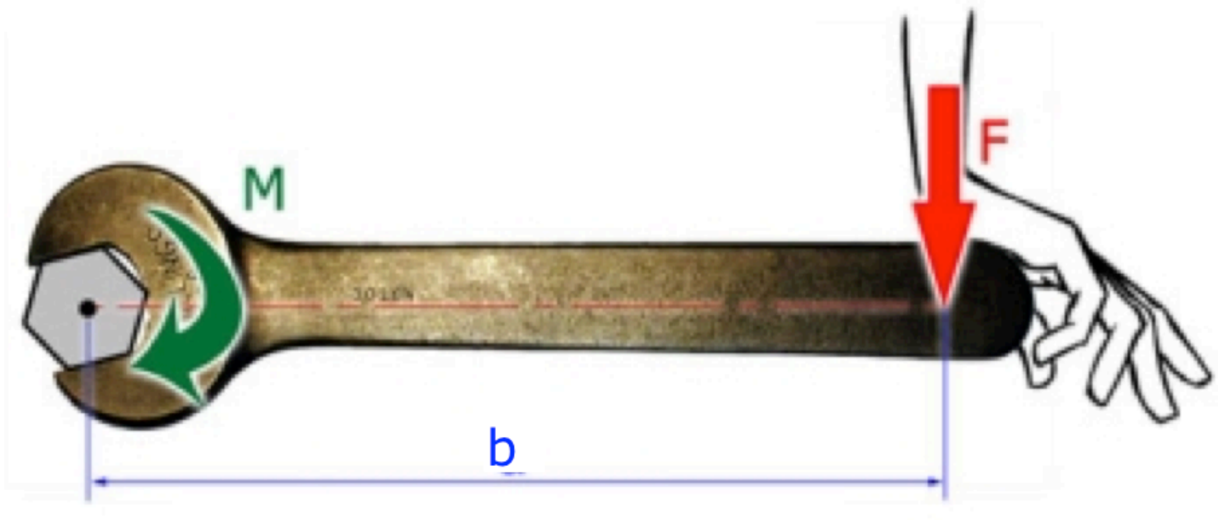


Nella maggior parte dei casi ci riferiremo alla situazione in cui la forza **F** è perpendicolare al vettore **r**:

$$\boxed{b = r \cdot \operatorname{sen}\theta \xrightarrow{\theta=90°;\ \operatorname{sen}\theta=1} b = r}$$

Ossia, il braccio coincide con r, per cui:

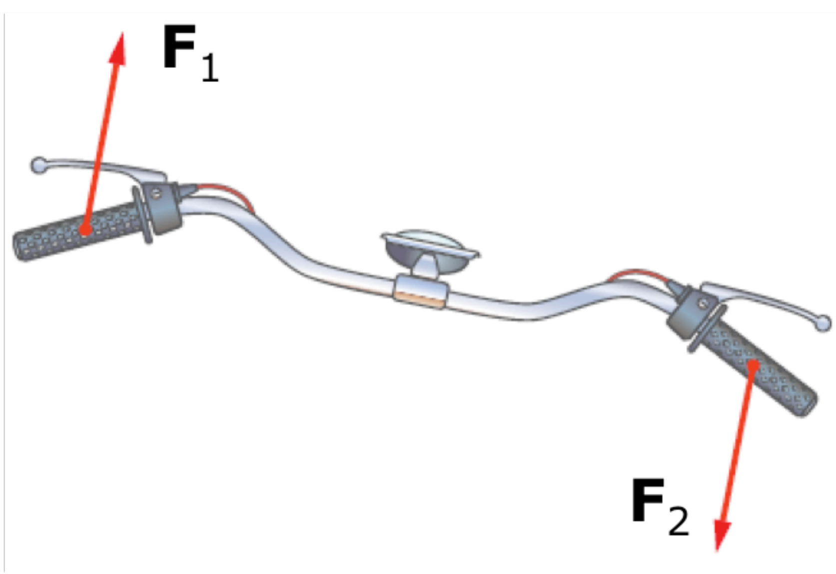
$$\boxed{M = F \cdot b}$$

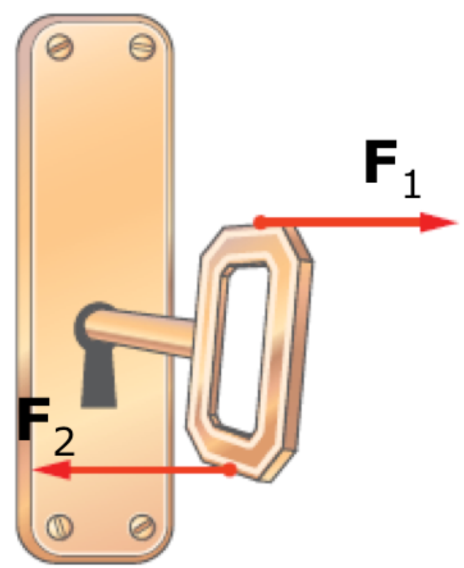


Momento di una coppia di forze

Una **coppia di forze** è l'insieme di due forze uguali e opposte applicate in due punti di un corpo rigido.

L'effetto di rotazione è descritto dal **momento della coppia**.





Il momento **M** di una coppia ha intensità data da:

momento della coppia (N · m)

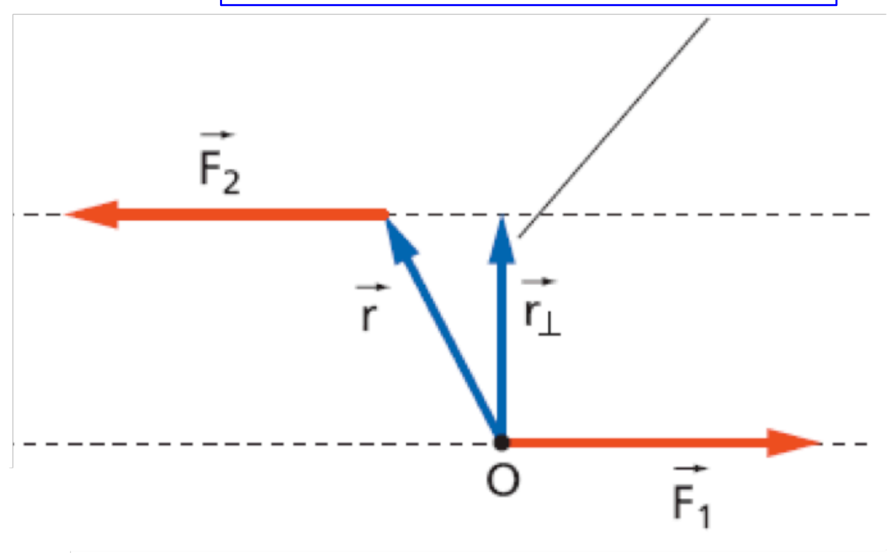
forza (N)

$$M = Fd$$

distanza (m)

Il momento di una coppia non dipende dal particolare punto O rispetto al quale lo si calcola. Quindi, è conveniente scegliere come punto O il punto P di applicazione di una delle due forze.

d=braccio=distanza tra le rette d’azione delle due forze



Condizione di equilibrio per un corpo rigido

Un corpo rigido può spostarsi nello spazio (traslare) e può ruotare.

Un corpo rigido, inizialmente fermo, è in equilibrio se:

✧ Non tende a traslare

✧ Non tende a ruotare

Poiché le forze causano la traslazione e i momenti delle forze la rotazione, le condizioni di equilibrio per un corpo rigido sono due.

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO PER UN CORPO RIGIDO

Un corpo rigido fermo rimane in equilibrio quando:

1. La somma vettoriale delle forze applicate su di esso è uguale a zero:

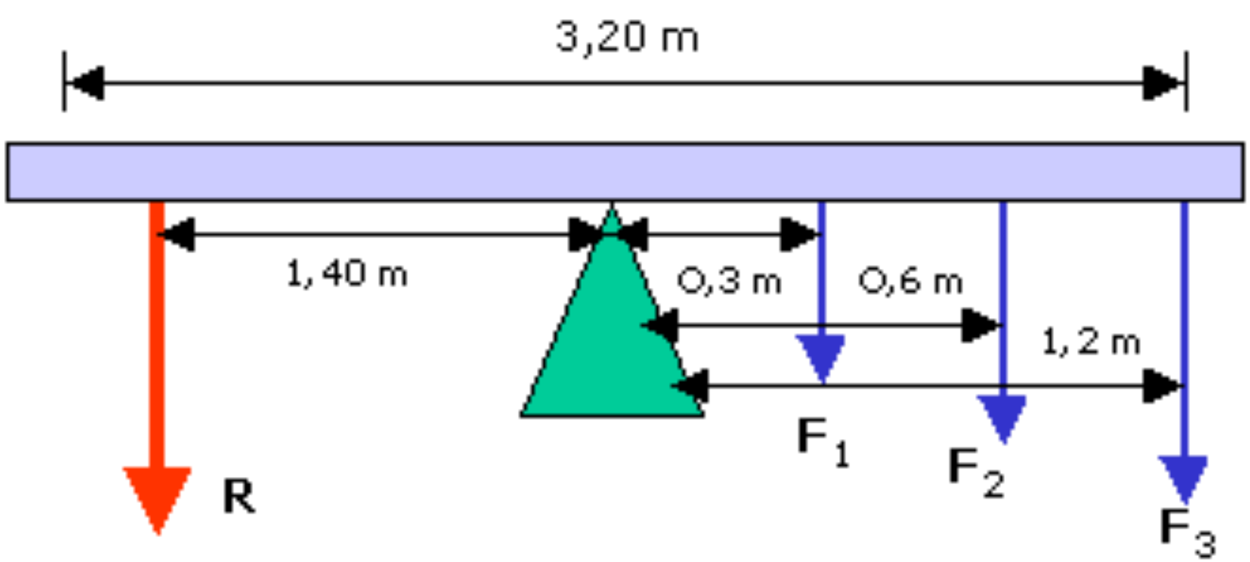
$$\boxed{\Sigma\vec{F} = 0}$$

1. La somma vettoriale dei momenti delle forze applicate a esso, calcolati rispetto a un punto qualsiasi, è uguale a zero:

$$\boxed{\Sigma\vec{M} = 0}$$

Esempio

Una trave lunga 3,20 m ha il fulcro nel punto medio. Da una stessa parte rispetto ad essa sono applicate le forze di 20 N, 70 N, 100 N, a distanza, rispettivamente, di 30 cm, 60 cm, 120 cm dal fulcro. Quale forza occorre applicare alla distanza di 1,40 m dal fulcro, ma dalla parte opposta rispetto alle precedenti, per equilibrare la trave?



1. La condizione di equilibrio di un corpo rigido affinché non ruoti, impone che la somma vettoriale dei momenti, rispetto al punto fisso detto fulcro, deve essere nulla:

$$\boxed{\Sigma \vec{M} = 0}$$

2. **Strategia risolutiva**: i momenti sono positivi se, agendo da soli, imprimono alla trave una rotazione in senso orario. I momenti sono negativi se, agendo da soli, imprimono alla trave una rotazione in senso antiorario:

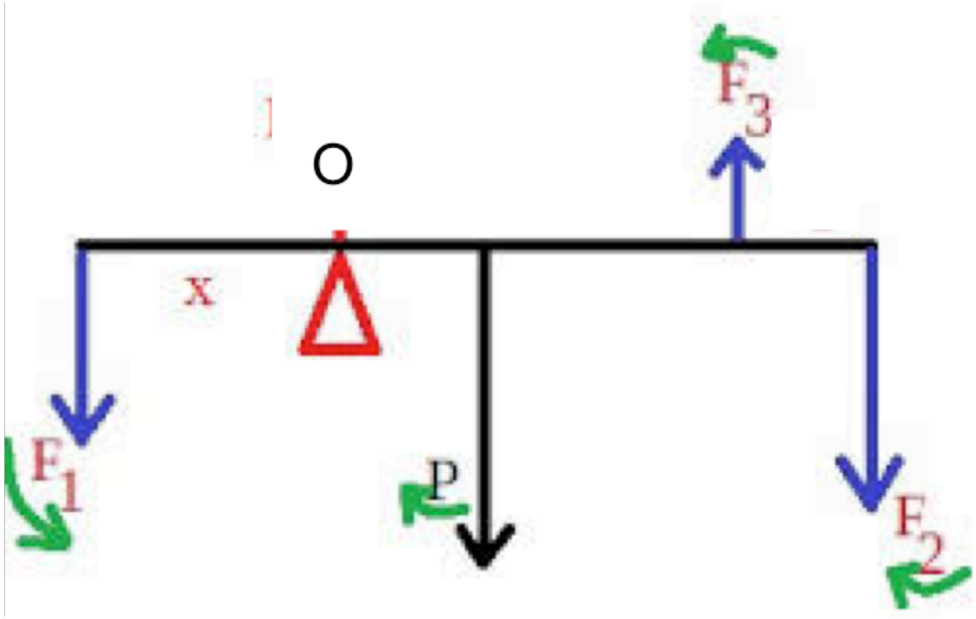
$$\boxed{M_1 + M_2 + M_3 - M_R = 0}$$

3. Sostituendo ai momenti le loro definizioni, otteniamo la seguente equazione nell'incognita R:

$$20 \cdot 0,3 + 70 \cdot 0,6 + 100 \cdot 1,2 - 1,4 \cdot R = 0 \Rightarrow R = \frac{168}{1,4} = 120N$$

Esempio

Ad una trave, che ha il fulcro nel punto O, sono applicate le seguenti forze: F_1=10 N, F_2=20 N, F_3=5 N, P=25 N. I bracci delle forze rispetto al punto O sono: b_1=x; b_2=60 cm, b_3=40 cm, b_P=20 cm. Calcolare il braccio della forza **F_1** affinché la trave sia in equilibrio.



1. La condizione di equilibrio di un corpo rigido affinché non ruoti, impone che la somma vettoriale dei momenti, rispetto al punto fisso detto fulcro, deve essere nulla:

$$\boxed{\Sigma\vec{M} = 0}$$

2. **Strategia risolutiva**: i momenti sono positivi se, agendo da soli, imprimono alla trave una rotazione in senso orario. I momenti sono negativi se, agendo da soli, imprimono alla trave una rotazione in senso antiorario:

$$\boxed{-M_1 + M_2 - M_3 + M_P = 0}$$

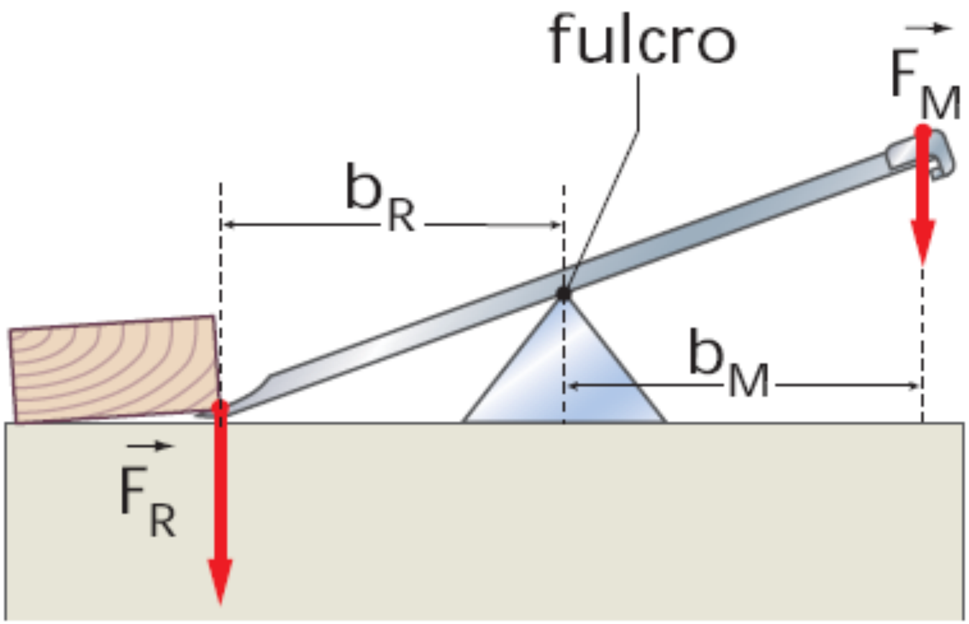
3. Sostituendo ai momenti le loro definizioni, otteniamo la seguente equazione nell'incognita x:

$$-10x + 20 \cdot 0,6 - 5 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,2 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ m}$$

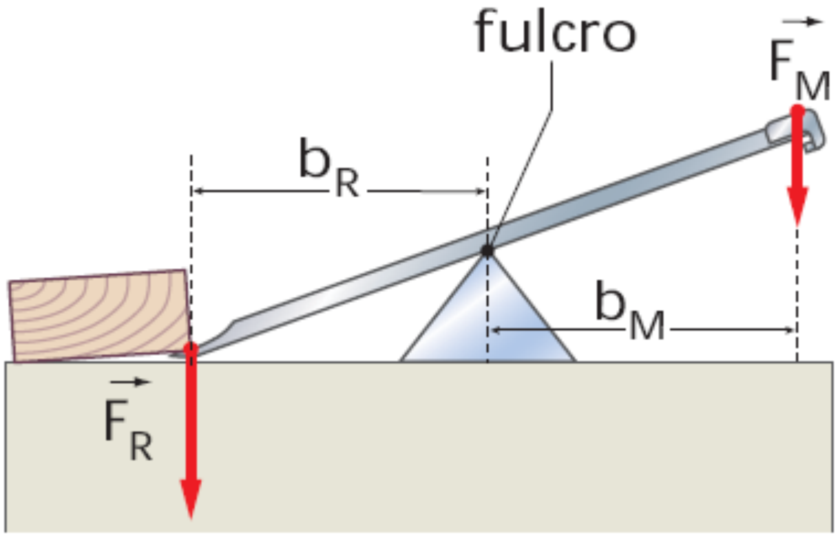
LE LEVE

Le **leve** sono formate da un'asta rigida che può ruotare intorno ad un punto fisso detto fulcro.

Le leve sono dispositivi per amplificare o ridurre le forze.



F_M = forza motrice
F_R = forza resistente
b_M e b_R = bracci delle due forze rispetto al fulcro



Applichiamo le condizioni di equilibrio di un corpo rigido alla leva.

$$\boxed{\Sigma\vec{M} = 0 \Rightarrow M_M - M_R = 0 \Rightarrow M_M = M_R}$$

La leva è in equilibrio quando il momento della forza motrice è uguale al momento della forza resistente.

Ovvero:

$$F_M \cdot b_M = F_R \cdot b_R \Rightarrow \boxed{F_M = \frac{b_R}{b_M} \cdot F_R}$$

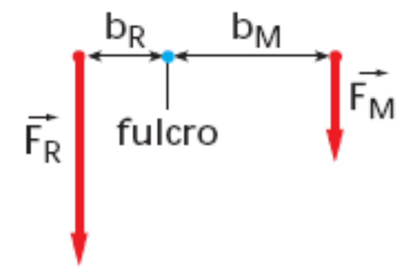
$$F_M = \frac{b_R}{b_M} \cdot F_R$$

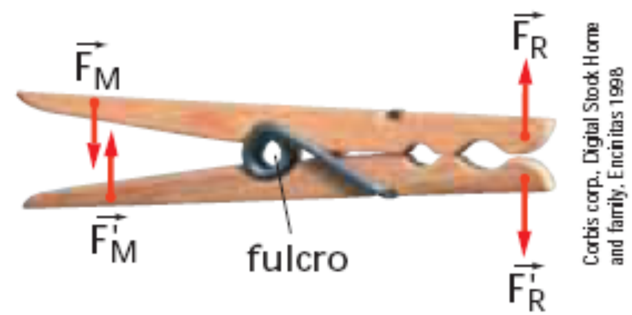
$$\begin{cases} \text{vantaggiosa}: F_M < F_R \ \text{ se } \ b_M > b_R \\ \text{svantaggiosa}: F_M > F_R \ \text{ se } \ b_M < b_R \\ \text{indiferrente}: F_M = F_R \ \text{ se } \ b_M = b_R \end{cases}$$

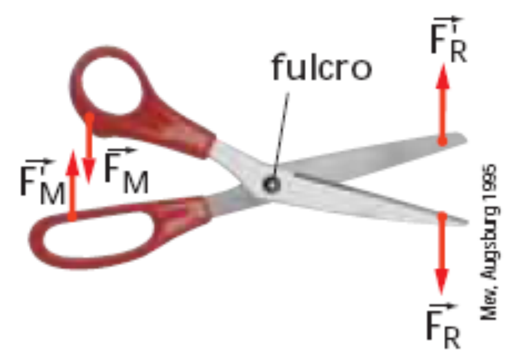
TIPI DI LEVE

Leve di primo genere

Il fulcro è posto tra le due forze

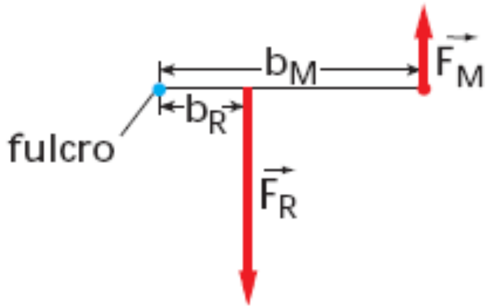




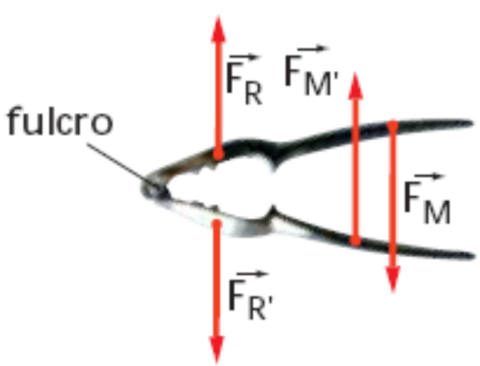


Leve di secondo genere

La forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice



Background & Objects, Photo-disc, Seattle, Washington 1993



D. Lorenzini, Bologna 2003

$$F_M = \frac{b_R}{b_M} \cdot F_R$$

sempre vantaggiosa

$F_M < F_R$ perchè $b_M > b_R$

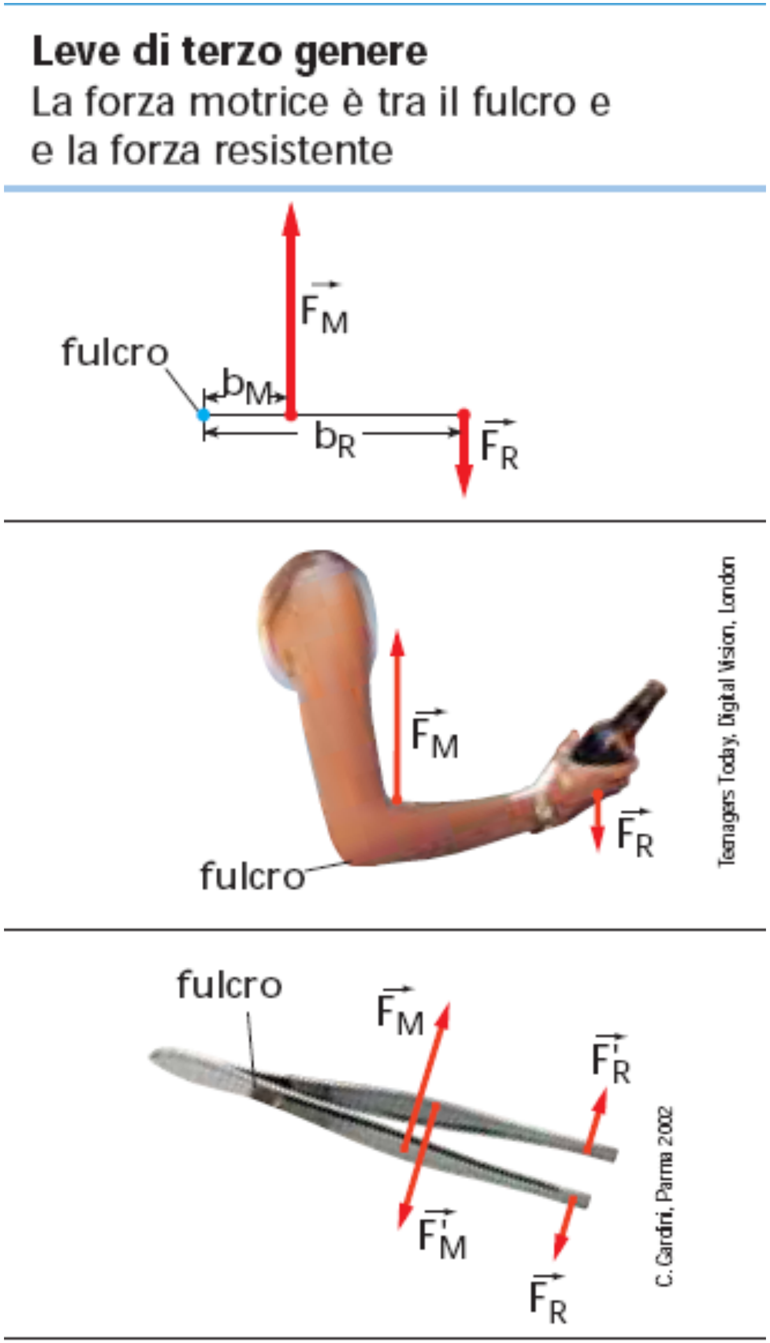
Amplificano le forze

$$F_M = \frac{b_R}{b_M} \cdot F_R$$

sempre svantaggiosa

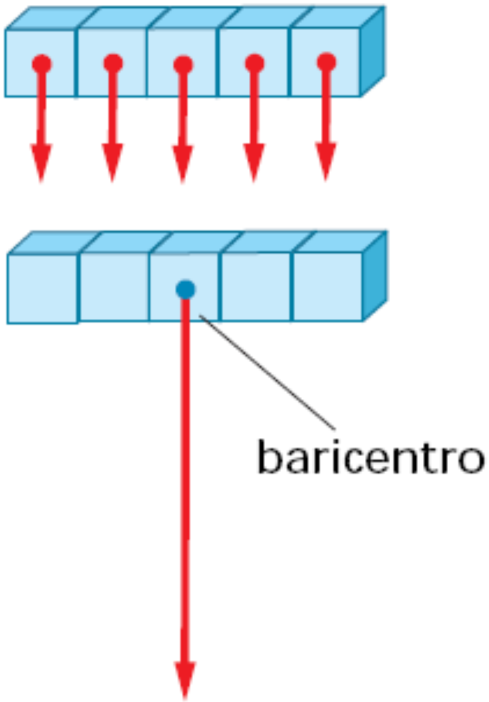
$F_M > F_R$ perchè $b_M < b_R$

Riducono le forze



IL BARICENTRO

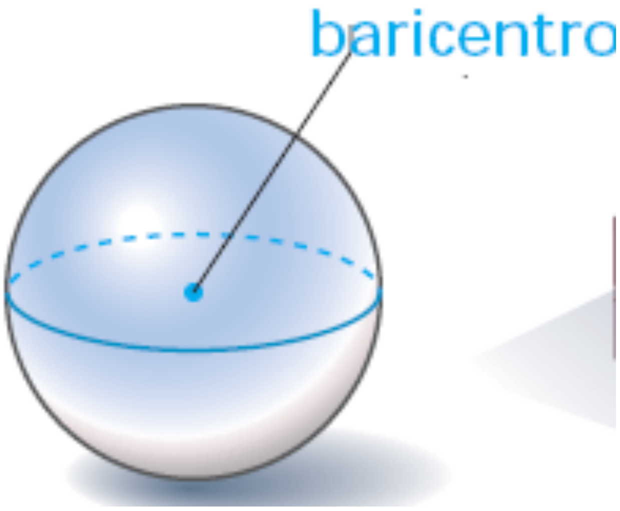
Se immaginiamo un corpo rigido come l'insieme di tante piccolissime parti (volumetti), la forza peso totale che si esercita sul corpo rigido sarà la somma vettoriale delle forze peso che agiscono su ciascun volumetto. Tale forza peso totale avrà come punto di applicazione il baricentro.

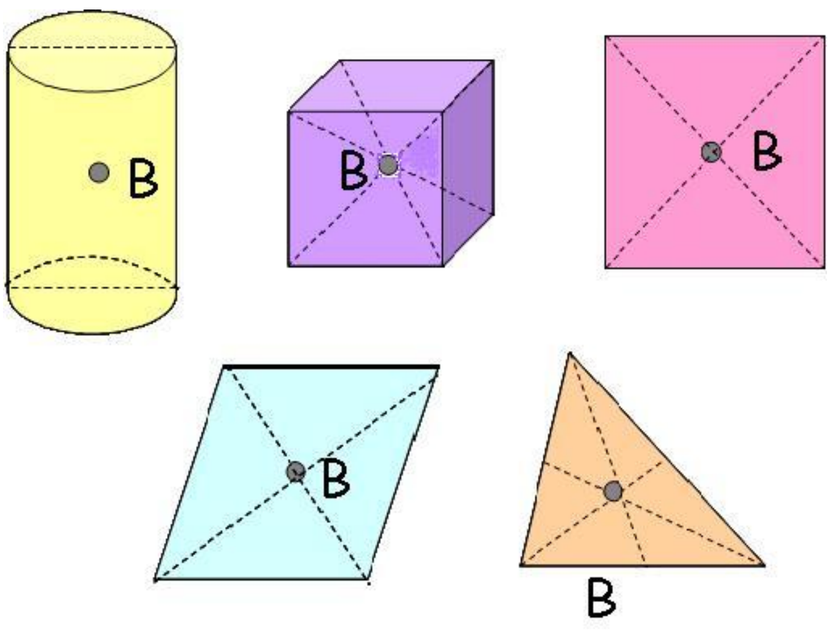


Il baricentro o centro di gravità di un corpo rigido è il punto di applicazione della forza-peso, risultante delle piccole forze parallele applicate ad ogni volumetto del corpo.

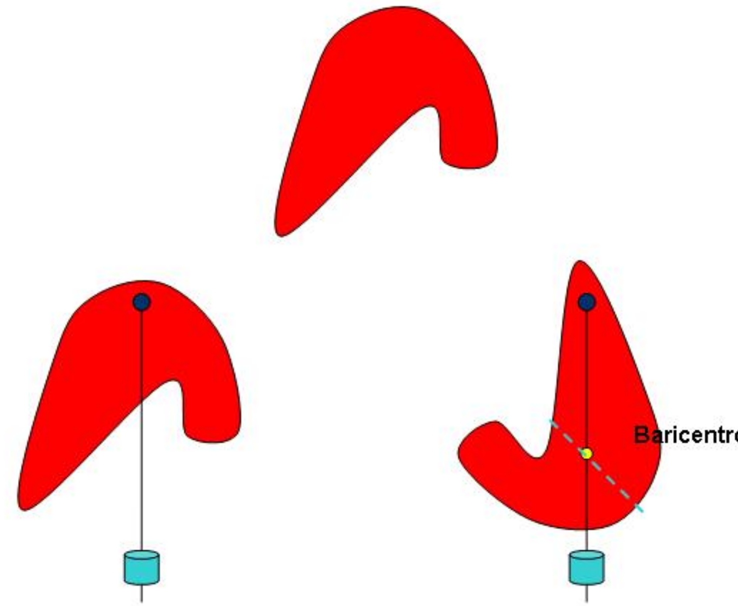
Ma dove si trova il baricentro?

Se un corpo ha un centro di simmetria (figure regolari), il baricentro è in quel punto.





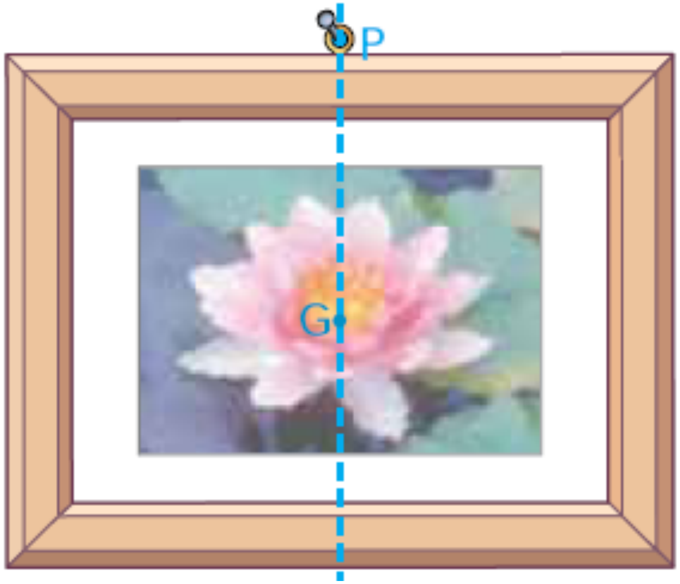
Per corpi irregolari e disomogenei non è facile individuare a prima vista il baricentro. Spesso, questo punto si trova dove la massa è più concentrata e non nel punto di simmetria.



In altri casi il baricentro di un corpo rigido si trova fuori dal corpo stesso, come nel caso di una persona piegata.

Qual è la condizione affinché un corpo appeso sia in equilibrio?

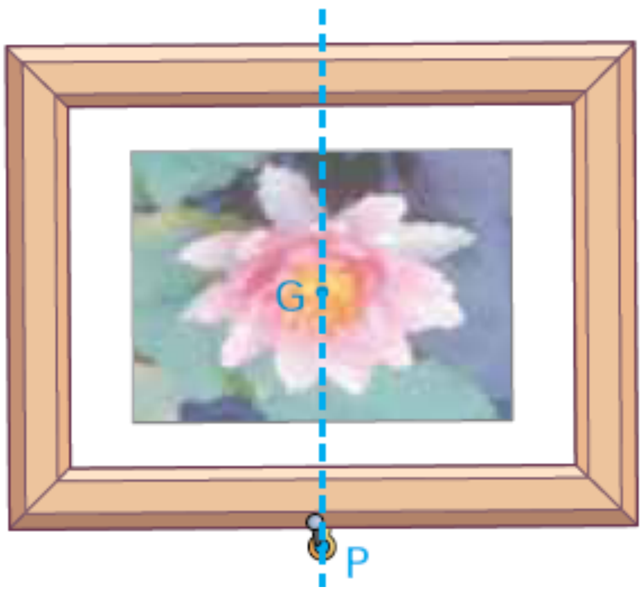
Un corpo appeso in un punto *P* è in equilibrio se il baricentro *G* si trova sulla verticale passante per *P*.



► Se è appeso dall'alto, è in *equilibrio stabile*: se lo si sposta di poco, ritorna nella precedente posizione di equilibrio.

La forza risultante è controbilanciata dal vincolo ($\Sigma\mathbf{F}=0$) e il momento della forza peso risultante, che è applicata in G, è nulla rispetto al punto fisso P ($\Sigma\mathbf{M}=0$).

Le stesse considerazioni valgono per le seguenti altre condizioni di equilibrio:

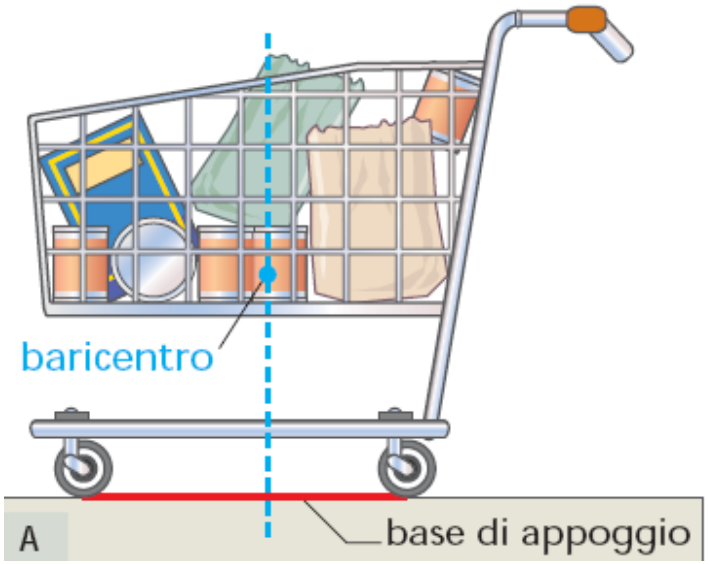


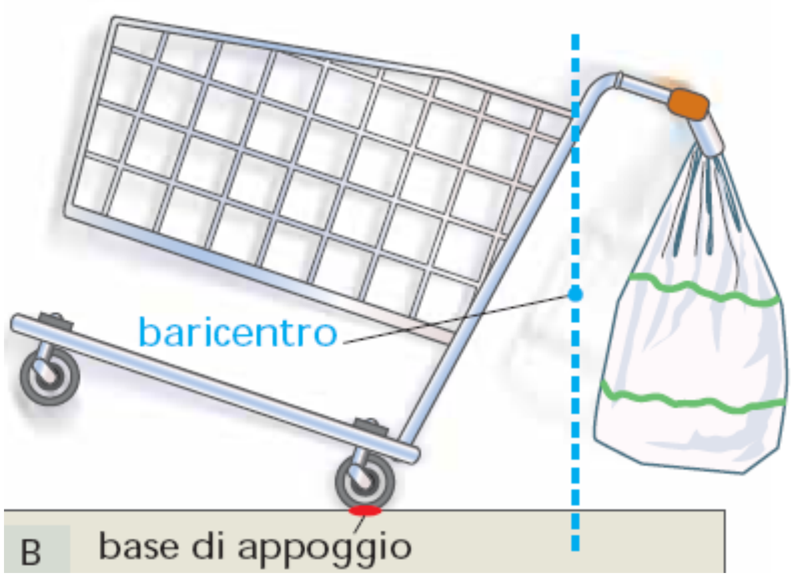
▶ Se è appeso dal basso, è in *equilibrio instabile*: se lo si sposta di poco, non ritorna nella precedente posizione di equilibrio.

▶ Se è appeso nel baricentro, è in *equilibrio indifferente*: se lo si sposta, rimane in una nuova posizione di equilibrio.

E per un corpo appoggiato su un piano, qual è la condizione di equilibrio?

Un corpo appoggiato su un piano è in equilibrio se la retta verticale passante per il baricentro *G* interseca la base di appoggio.





È in equilibrio

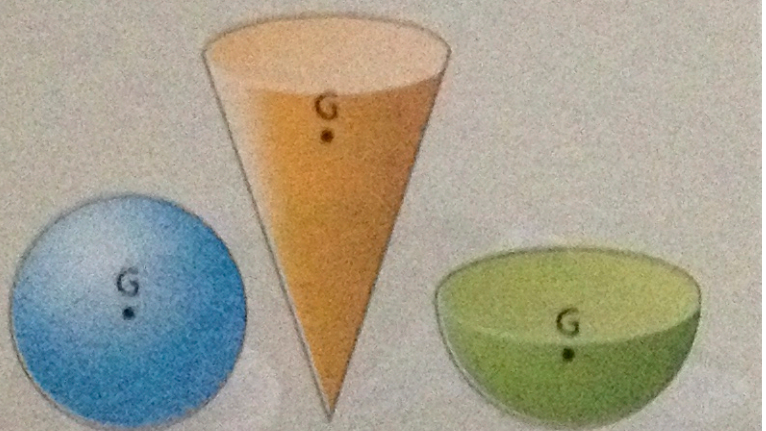
Non è in equilibrio

Perché la torre di Pisa non cade?

La torre di Pisa è in equilibrio perché la verticale, che passa per il suo baricentro, cade all’interno della base di appoggio.

DOMANDA

Guarda gli oggetti nella figura (sfera, cono, semisfera).



▶ Come puoi classificare la posizione di equilibrio di ciascuno di essi (stabile, instabile, indifferente)?

RISPOSTA

Sfera: equilibrio indifferente

Cono: equilibrio instabile

Semisfera: equilibrio stabile