Problemi di Fisica

Elaborazione dei dati sperimentali

PROBLEMA

Nella seguente tabella riportiamo alcune regole per esprimere qualunque numero mediante una potenza di 10:

$100000000 = 1 \cdot 10^9$ $456789 = 45{,}6789 \cdot 10^4$ $32{,}1 = 0{,}321 \cdot 10^2$ $0{,}65 = 0{,}00065 \cdot 10^3$	**La base 10 viene elevata ad una potenza positiva pari al numero dei salti che compie la virgola verso sinistra**
$0{,}0000001 = 1 \cdot 10^{-7}$ $2{,}431 = 243{,}1 \cdot 10^{-3}$ $574{,}23 = 5742{,}3 \cdot 10^{-1}$ $0{,}00034 = 34 \cdot 10^{-5}$	**La base 10 viene elevata ad una potenza negativa pari al numero dei salti che compie la virgola verso destra**

PROBLEMA

Le misure di due grandezze fisiche x e y fra loro dipendenti sono espresse dai seguenti valori numerici:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32

Qual è la relazione matematica tra x e y?

□ $y = 2x^2$ □ $y = 0{,}5x^2$ □ $y = 0{,}5x$ □ $y = 2x$

Soluzione

La relazione matematica che lega la variabile dipendente y alla variabile indipendente x sarà quella per cui sostituendo al posto della x i valori indicati in tabella si ottengono i rispettivi valori delle y:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32
$y = 2x^2$	2	8	18	32	50	72	88	128
$y = 0{,}5x^2$	**0,5**	**2**	**4,5**	**8**	**12,5**	**18**	**24,5**	**32**
$y = 0{,}5x$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$y = 2x$	2	4	6	8	10	12	14	16

Dalla tabella si ricava immediatamente che la relazione matematica cercata è:

$$y = 0{,}5x^2$$

dove la variabile y è direttamente proporzionale al quadrato della variabile x.

PROBLEMA

Le misure di due grandezze fisiche x e y fra loro dipendenti sono espresse dai seguenti valori numerici:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,4	5,6	12,6	22,4	35	50,4	68,6	89,6

Qual è la relazione matematica tra x e y?

□ $y = 1,4x$ □ $y = 1,4x^2$ □ $y = 2x + 1,6$ □ $y = 4x + 0,6$

Soluzione

La relazione matematica che lega la variabile dipendente y alla variabile indipendente x sarà quella per cui sostituendo al posto della x i valori indicati in tabella si ottengono i rispettivi valori delle y:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,4	5,6	12,6	22,4	35	50,4	68,6	89,6
y = 1,4x	1,4	2,8	4,2	5,6	7	8,4	9,8	11,2
$y = 1,4x^2$	**1,4**	**5,6**	**12,6**	**22,4**	**35**	**50,4**	**68,6**	**89,6**
y = 2x + 1,6	3,6	5,6	7,6	9,6	11,6	13,6	15,6	17,6
y = 4x + 0,6	4,6	8,6	12,6	16,6	20,6	24,6	28,6	32,6

Dalla tabella si ricava immediatamente che la relazione matematica cercata è:

$$y = 1,4\ x^2$$

dove la variabile y è direttamente proporzionale al quadrato della variabile x.

PROBLEMA

Le misure di due grandezze fisiche x e y fra loro dipendenti sono espresse dai seguenti valori numerici:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7,2	8,2

Qual è la relazione matematica tra x e y?

□ $y = 2,4x$ □ $y = 1,2x$ □ $y = x + 0,2$ □ $y = x /1,2$

Soluzione

La relazione matematica che lega la variabile dipendente y alla variabile indipendente x sarà quella per cui sostituendo al posto della x i valori indicati in tabella si ottengono i rispettivi valori delle y:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7,2	8,2
y = 2,4x	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	11,2
y = 1,2x	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6
y = x + 0,2	**1,2**	**2,2**	**3,2**	**4,2**	**5,2**	**6,2**	**7,2**	**8,2**
y = x / 1,2	0,83	1,7	2,5	3,3	4,2	5	5,8	6,7

Dalla tabella si ricava immediatamente che la relazione matematica cercata è:

$$y = x + 0,2$$

dove la variabile y è direttamente proporzionale in maniera lineare alla variabile x.

PROBLEMA

Le misure di due grandezze fisiche x e y fra loro dipendenti sono espresse dai seguenti valori numerici:

x	1	2	3	4	5	6
y	90	45	30	22,5	18	15

Qual è la relazione matematica tra x e y?

□ $y = 90 / x^2$ □ $y = 10x$ □ $y = 10x^2 + 5$ □ $y = 90 / x$

Soluzione

La relazione matematica che lega la variabile dipendente y alla variabile indipendente x sarà quella per cui sostituendo al posto della x i valori indicati in tabella si ottengono i rispettivi valori delle y:

x	1	2	3	4	5	6
y	90	45	30	22,5	18	15
$y = 90 / x^2$	90	22,5	10	5,6	3,6	2,5
y = 10x	10	20	30	40	50	60
$y = 10x^2 + 5$	15	45	95	165	255	365
y = 90 / x	90	45	30	22,5	18	15

Dalla tabella si ricava immediatamente che la relazione matematica cercata è:

$$y = 90 / x$$

dove la variabile y è inversamente proporzionale in maniera lineare alla variabile x.

PROBLEMA

REGOLE SULLE CIFRE SIGNIFICATIVE

Definizione: le cifre significative sono quelle cifre note con certezza più la prima cifra incerta.

Esempio: se effettuiamo una misura di tempo ed otteniamo il valore di 24,6 s, significa che abbiamo adoperato uno strumento che apprezza fino ai decimi di secondo, per cui l'incertezza sulla misura è dell'ordine dei decimi. Pertanto la misura ha tre cifre significative, di cui le prime due sono quelle certe e la terza è quella incerta.

1. Il numero di cifre significative si determina contando la cifra incerta e tutte quelle alla sua sinistra fino all'ultima cifra diversa da zero.
2. Gli zeri iniziali a sinistra non devono essere contati come cifre significative:

   0,03 ha una sola cifra significativa; 0,0043 ha due cifre significative

3. Gli zeri finali a destra vanno contati come cifre significative:

   0,0030 ha due cifre significative; 0,00430 ha tre cifre significative

4. Quando calcoliamo il valore di una grandezza a partire da altre grandezze note con una data incertezza, il grado di precisione del risultato non può essere superiore al minimo grado di precisione delle grandezze note:
5.

   $$X = x_1 + x_2 = 2{,}866 + 1{,}82 = 4{,}686 \text{ m} = 4{,}69 \text{ m}$$

6. L'ultima cifra significativa si aumenta di uno se la cifra successiva è un numero ≥ 5; altrimenti rimane invariata.
7. L'errore va indicato con una o al massimo due cifre significative.
8. Una misura non può avere cifre di posto superiore all'ultima cifra dell'errore:

   $x = (8{,}41 \pm 0{,}02)$ mm <u>Giusto</u> $x = (8{,}413 \pm 0{,}02)$ mm <u>Sbagliato</u>

PROBLEMA

Quale delle seguenti misure è la più precisa:

$$x_1 = (345 \pm 1) \text{ m} \qquad x_2 = (3{,}42 \pm 0{,}1) \qquad x_3 = (32{,}1 \pm 0{,}8)$$

Soluzione

Per stabilire la misura più precisa bisogna calcolare l'errore relativo percentuale per ciascuna di esse:

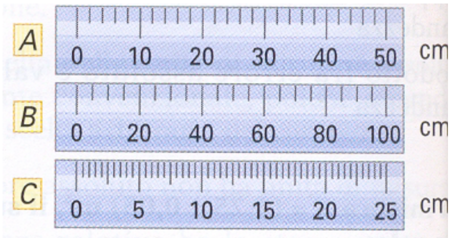
$$E_R\% = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100$$

$E_{R1}\% = \frac{1}{345} \cdot 100 = 0{,}29\%$ $E_{R2}\% = \frac{0{,}1}{3{,}42} \cdot 100 = 2{,}92\%$ $E_{R3}\% = \frac{0{,}8}{32{,}1} \cdot 100 = 2{,}49\%$

Pertanto la misura più precisa è la prima in quanto ad essa corrisponde l'errore relativo percentuale più basso.

PROBLEMA

Ricavare la sensibilità dei seguenti righelli:



Soluzione

Righello A:

- ✓ Da 0 a 10 cm ci sono 5 divisioni.
- ✓ 1 divisione = 2 cm (2 · 5 = 10 cm)
- ✓ La sensibilità è la più piccola variazione della grandezza fisica che lo strumento è in grado di misurare, ossia corrisponde ad 1 divisione:

SENSIBILITA' = 1 divisione = 2 cm

Righello B:

- ✓ Da 0 a 20 cm ci sono 4 divisioni.
- ✓ 1 divisione = 5 cm (5 · 4 = 20 cm)
- ✓ La sensibilità è la più piccola variazione della grandezza fisica che lo strumento è in grado di misurare, ossia corrisponde ad 1 divisione:

SENSIBILITA' = 1 divisione = 5 cm

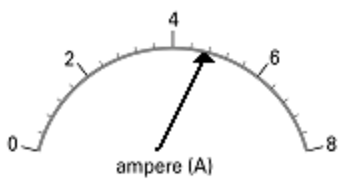
Righello C:

- ✓ Da 0 a 5 cm ci sono 10 divisioni.
- ✓ 1 divisione = 0,5 cm (0,5 · 10 = 5 cm)
- ✓ La sensibilità è la più piccola variazione della grandezza fisica che lo strumento è in grado di misurare, ossia corrisponde a 1 divisione:

SENSIBILITA' = 1 divisione = 0,5 cm

PROBLEMA

Scrivere il risultato della misura diretta indicata dallo strumento in figura:



Soluzione

Lo strumento è un amperometro e misura l'intensità di corrente. Le caratteristiche strumentali sono:

PORTATA: 8 A SENSIBILITA': 0,4 A

L'intensità di corrente misurata dallo strumento è pari a:

$$I = 4,8\ A$$

in quanto 1 divisione = 0,4 A

Scegliendo la sensibilità come l'errore assoluto commesso nell'esecuzione nella misura, il risultato della misura diretta è:

$$\mathbf{I = (4,8 \pm 0,4)\ A}$$

PROBLEMA

Data la serie di misure in millimetri:

4,15	4,10	4,20	4,20	4,30	4,10	4,25	4,05	4,25

- ✓ calcolare il valore medio
- ✓ calcolare l'errore massimo
- ✓ scrivere la misura con le giuste cifre significative

Soluzione

- Per definizione il valore medio è dato da:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{4,15 + 4,10 + 4,20 + 4,20 + 4,30 + 4,10 + 4,25 + 4,05 + 4,25}{9} = 4,18\ mm$$

- Per definizione l'errore massimo o semidispersione è dato da:

$$\varepsilon_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{4,30 - 4,05}{2} = 0,125 cm$$

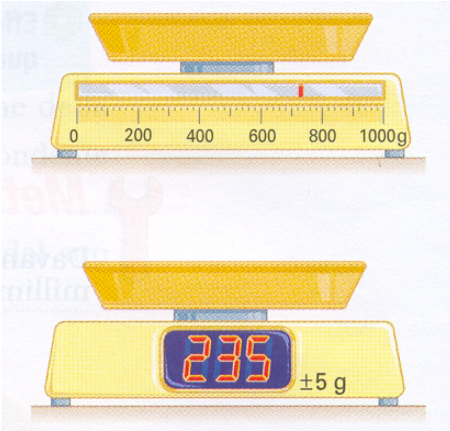
- Regola - L'errore assoluto va scritto con una o al massimo due cifre significative e la misura non può avere cifre decimali superiori a quelle dell'errore assoluto.

Se scegliamo di scrivere l'errore assoluto con una cifra significativa, la misura verrà indicata come:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_a = (4,2 \pm 0,2)\ mm$$

PROBLEMA

In figura sono riportate due bilance per la misurazione della massa, la prima analogica e la seconda digitale. Dopo averle esaminate:



- individua quale delle due bilance è più sensibile
- scrivi la misura rilevata da ciascuna bilancia
- individua la misura più precisa

Soluzione

- Prima risposta

Bilancia analogica → **SENSIBILITA'** = 1 divisione = 20 g

Bilancia digitale → **SENSIBILITA'** = errore assoluto = 5 g

Conclusione: la bilancia digitale è più sensibile

- Seconda risposta

Bilancia analogica $\Rightarrow$ $m = (740 \pm 20)$ g

Bilancia digitale $\Rightarrow$ $m = (235 \pm 5)$ g

- Terza risposta:

Per stabilire la misura più precisa bisogna calcolare l'errore relativo percentuale per ciascuna di esse:

$$E_{R1}\% = \frac{20}{740} \cdot 100 = 2{,}7\% \qquad E_{R2}\% = \frac{5}{235} \cdot 100 = 2{,}1\%$$

Pertanto la misura più precisa è quella della bilancia digitale in quanto ad essa corrisponde l'errore relativo percentuale più basso.

PROBLEMA

Le dimensioni a, b, c di un parallelepipedo vengono misurate con un errore relativo percentuale del 9% e la sua massa m con un errore del 15%. I valori misurati sono:

$$a = 0{,}24\ \text{m} \qquad b = 0{,}21\ \text{m} \qquad c = 0{,}28\ \text{m} \qquad m = 14\ \text{kg}$$

Calcolare la densità del parallelepipedo e la sua incertezza.

Soluzione

Definizione di densità $\Rightarrow \sigma = \dfrac{m}{V}$

Il volume del parallelepipedo è dato da:

$$V = a \cdot b \cdot c = 0,24 \cdot 0,21 \cdot 0,28 = 0,014\ m^3$$

e l'errore relativo percentuale su di esso è:

$$E_{RV}\% = E_{Ra}\% + E_{Rb}\% + E_{Rc}\% = 9\% + 9\% + 9\% = 27\%$$

La densità sarà:

$$\sigma = \frac{14}{0,014} = 1000 kg/m^3$$

e l'errore relativo percentuale su di essa:

$$E_{R\sigma}\% = E_{Rm}\% + E_{RV}\% = 15\% + 27\% = 42\%$$

L'incertezza sulla densità verrà calcolata come formula inversa dell'errore relativo percentuale:

$$E_{R\sigma}\% = \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \cdot 100 \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{E_{R\sigma}\% \cdot \sigma}{100} = \frac{42 \cdot 1000}{100} = 420 m^3$$

In definitiva la densità verrà scritta come:

$$\sigma = (1000 \pm 420) m^3$$

PROBLEMA

La pressione esercitata su un tavolo rettangolare, le cui dimensioni sono a = (3,42 ± 0,25) m e b = (5,36 ± 0,22) m, da una forza F = (24,3 ± 0,3)N, è data da:

$$p = F/S$$

Qual è la misura di p?

Soluzione

Innanzitutto determiniamo il valore della pressione p:

$$p = 24,3/18,3 = 1,33\ N/m^2$$

dove: $S = a \cdot b = 3,42 \cdot 5,36 = 18,3\ m^2$

L'errore relativo su S è dato da:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,25}{3,42} + \frac{0,22}{5,36} = 0,11$$

L'errore relativo su p è:

$$\frac{\Delta p}{p} = \left(\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S}\right) = \left(\frac{0,3}{24,3} + 0,11\right) = 0,12$$

Pertanto l'errore assoluto su p sarà:

$$\Delta p = p \cdot 0,12 = 1,33 \cdot 0,12 = 0,16 N/m^2$$

In definitiva la misura p assume la seguente scrittura:

$$p = (1,33 \pm 0,16)\ N/m^2$$

PROBLEMA

Una sfera rotola lungo un piano inclinato, la cui lunghezza è di 1,780 m. Il tempo impiegato viene misurato con un cronometro, e la misura viene ripetuta 11 volte, ottenendo i seguenti valori:

Tempo (s)	0,71	0,67	0,72	0,71	0,68	0,73	0,67	0,75	0,70	0,67	0,74

Calcolare la velocità media.

Soluzione

Definizione di velocità media $\Rightarrow V = \frac{S}{t}$

dove:

$$S = (1,780 \pm 0,0005) m$$

Sul tempo, invece, abbiamo effettuato più misure, per cui dobbiamo determinare il valor medio e la sua incertezza.

Per comodità di calcolo costruiamo la seguente tabella:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0,71	0,01	0,0001
0,67	-0,03	0,0009
0,72	0,02	0,0004
0,71	0,01	0,0001
0,68	-0,02	0,0004
0,73	0,03	0,0009
0,67	-0,03	0,0009
0,75	0,05	0,0025
0,70	0	0
0,67	-0,03	0,0009
0,74	0,04	0,0016
$x = \frac{\sum x_i}{n} = 0,70 s$		$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0,0087$

Quindi:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}0087}{11}} = 0{,}028s$$

Pertanto la misura tempo verrà scritta come:

$$t = (0{,}70 \pm 0{,}028)s$$

Adesso possiamo calcolare la velocità:

$$V = \frac{1{,}78}{0{,}70} = 2{,}54m/s$$

e la sua incertezza:

$$\Delta V = \frac{S}{t} \cdot \left(\frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}}\right) = 2{,}54 \cdot \left(\frac{0{,}0005}{1{,}78} + \frac{0{,}028}{0{,}70}\right) = 0{,}10m/s$$

In definitiva scriveremo:

$$V = (2{,}54 \pm 0{,}10)m/s$$

PROBLEMA

Supponiamo di aver misurato la massa di un blocco di legno con una bilancia di precisione (sensibilità S = 0,01 g) e di aver ottenuto le seguenti misure in grammi:

MISURE							
10,55	10,67	10,46	10,48	10,74	10,72	10,53	10,95
10,76	10,84	10,98	10,95	10,49	10,81	10,62	10,75
10,59	10,63	10,77	10,66	10,74	10,56	10,73	10,78
10,86	10,52	10,69	10,60	10,70	10,88	10,61	10,73
10,64	10,68	10,71	10,66	10,72	10,65	10,57	10,60

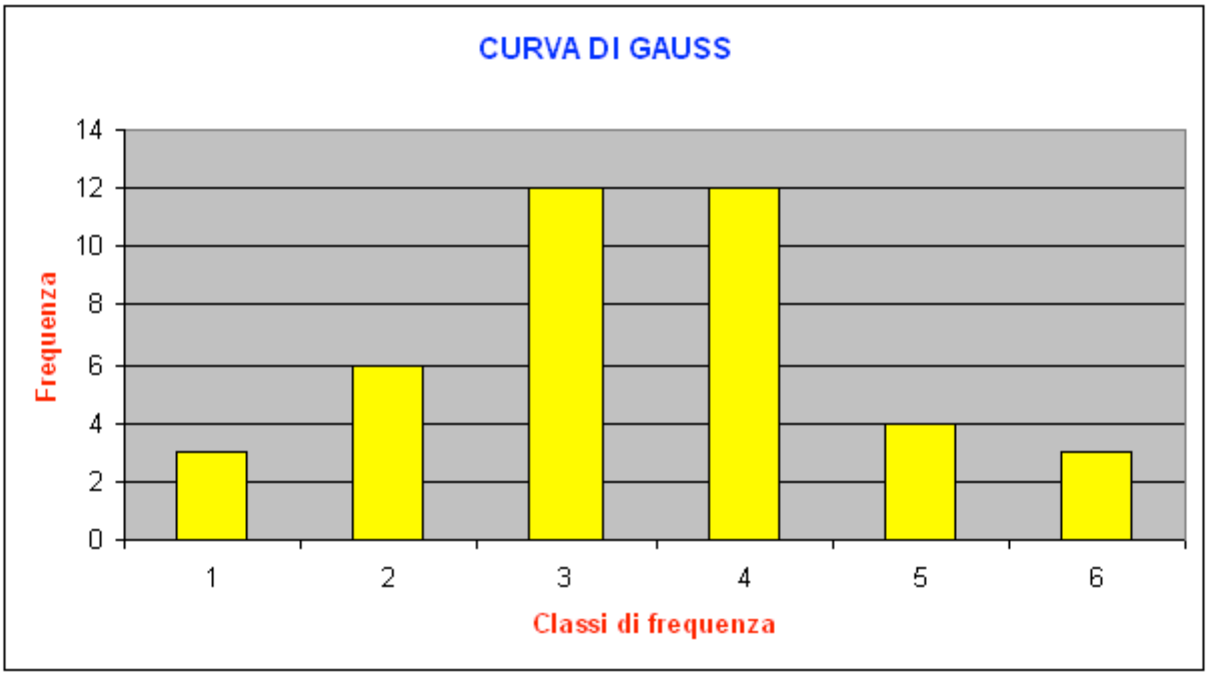
a) Ricavare la distribuzione delle misure
b) Calcolare il valor medio e la deviazione standard

Soluzione

a) Suddividiamo i dati in **classi di frequenza**, cioè definire degli intervalli di ampiezza determinata e contare quante misure cadono al loro interno, per meglio valutare la loro distribuzione.

CLASSE	1	2	3	4	5	6
AMPIEZZA	10,40 – 10,49	10,50 – 10,59	10,60 – 10,69	10,70 – 10,79	10,80 – 10,89	10,90 – 10,99
FREQUENZA	3	6	12	12	4	3

Riportiamo le varie classi di misure e loro frequenze su un istogramma.



L'istogramma, come si può notare, tende ad assumere la caratteristica forma a campana, cioè rappresenta un'approssimazione della **curva di Gauss**. Tale approssimazione è tanto migliore quanto maggiore è il numero delle misure effettuate.

Si dimostra che tutte le distribuzioni casuali di valori, come sono le misura sperimentali, all'aumentare del numero di valori tendono ad assumere la forma della curva di Gauss.

Sempre dall'analisi dell'istogramma, si nota che la maggior parte delle misure si addensa intorno al valor medio.

b) Costruiamo la tabella relativa all'elaborazione dei dati sperimentali:

X_i	f_i	$f_i \cdot X_i$	$(X_i - \bar{x})$	$(X_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (X_i - \bar{x})^2$
10,45	3	31,35	-0,2425	0,05881	0,17642
10,55	6	63,30	-0,1425	0,02031	0,12184
10,65	12	127,80	0,0425	0,00181	0,02168
10,75	12	129,00	0,0575	0,00331	0,03967
10,85	4	43,40	0,1575	0,02481	0,09922
10,95	3	32,85	0,2575	0,06631	0,19892
	$N = \sum_{i=1}^{5} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{5} f_i \cdot X_i = 427,70$			$\sum_{i=1}^{5} f_i \cdot (X_i - \bar{x})^2 = 0,65775$

(Il programma di calcolo riporta tutte le cifre decimali) dove:

X = valore centrale della classe di frequenza
f = frequenza
$\overline{x}$ = valor medio

La media delle misure ed il relativo errore (deviazione standard) si calcolano come:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i \cdot X_i}{N} = \frac{427.70}{40} = 10{,}70g \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} f_i \cdot (X_i - \overline{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{0{,}65775}{40}} = 0{,}10g$$

Pertanto, il risultato della misura è:

$$x = \overline{x} \pm \sigma = (10{,}70 \pm 0{,}10)g$$

PROBLEMA

Misurando il volume V e la corrispondente massa M di alcuni pezzi di ferro si sono ottenuti i seguenti risultati:

DATI SPERIMENTALI								
V (cm^3)	1	2	3	4	5	6	7	8
M (g)	7,8	15,4	23,7	31,2	39,0	48,0	52,5	63,2

Determinare attraverso la retta dei minimi quadrati la dipendenza funzionale di M da V:

M = f(V)

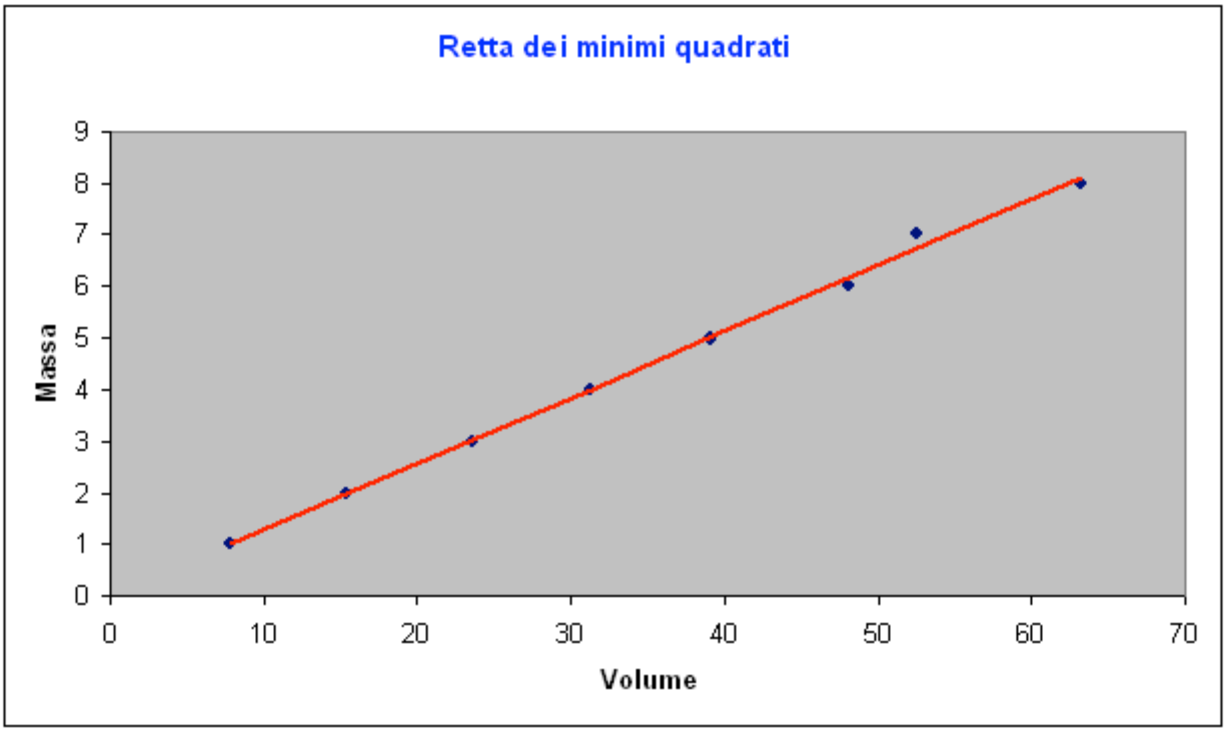
Soluzione

Una quantità che tiene conto del grado di correlazione tra M e V è il cosiddetto coefficiente di Pearson, che calcoliamo attraverso l'utilizzo del foglio elettronico:

$$r = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2\right]}} = 0{,}999$$

Poiché il valore di r è molto prossimo ad uno, significa che tra M e V vi è una correlazione di tipo lineare.

Utilizzando sempre il foglio elettronico EXCEL, o altri, ricaviamo la retta che meglio approssima i dati sperimentali (retta dei minimi quadrati):



$$k = \frac{327,3}{42,4} = 7,7$$

In definitiva ciò che abbiamo trovato, tè la definizione di densità:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V$$

che nel caso del ferro assume proprio il valore di 7,8 g/cm^3.