Problemi di Fisica

I Vettori

PROBLEMA

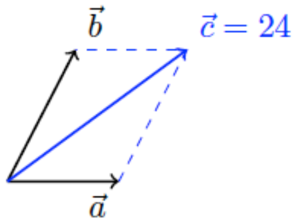
Testo *[I0002]* Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rispettivamente di moduli $a = 12$ e $b = 16$, disegnateli in modo tale che la loro somma sia un vettore $\vec{c}$ il cui modulo valga $c = 28$. Ripetete l'esercizio in modo tale che $c = 4$; $c = 10$; $c = 20$; $c = 24$.

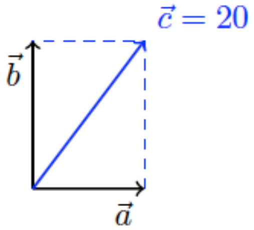
SOLUZIONE

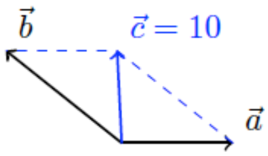
Spiegazione Il modulo della somma di due vettori dipende dai moduli di quei due vettori e dall'angolo compreso tra i due vettori. Visto che il testo dell'esercizio dice quanto valgono i due vettori, per risolvere l'esercizio bisogna indicare quanto vale l'angolo tra di essi. Questo è conseguenza della regola del parallelogrammo.

Svolgimento

- Affinchè il vettore somma $c = 28$ i due vettori devono essere paralleli e nello stesso verso
- Affinchè il vettore somma $c = 24$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo acuto
- Affinchè il vettore somma $c = 20$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo retto $\alpha = 90°$
- Affinchè il vettore somma $c = 10$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo ottuso
- Affinchè il vettore somma $c = 4$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo piatto $\alpha = 180°$

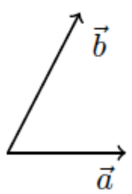




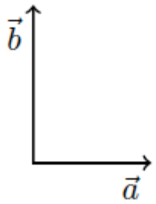


PROBLEMA

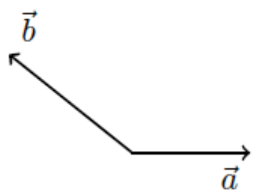
Testo *[I0007]* Esegui le operazioni indicate con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

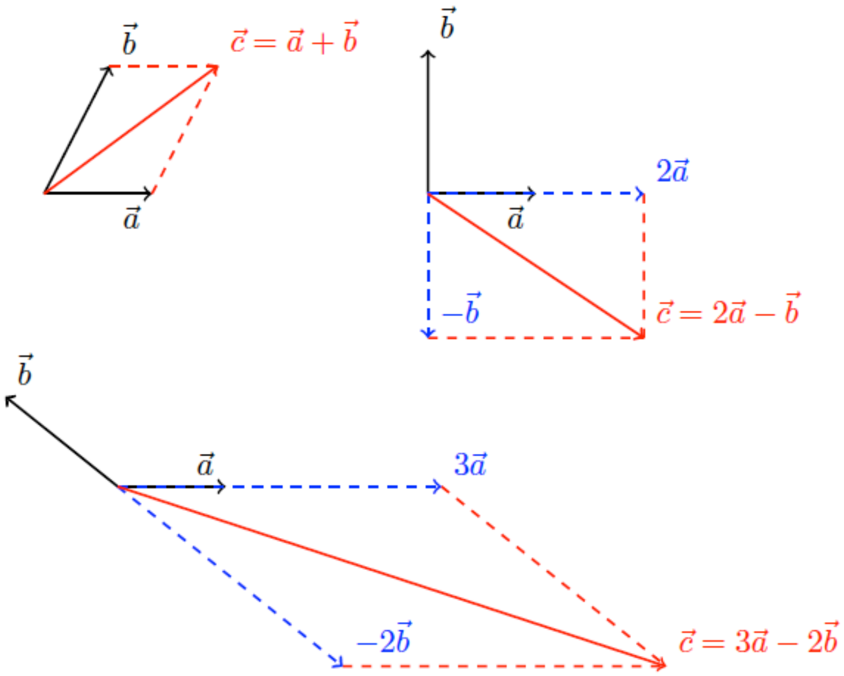


$\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

SOLUZIONE

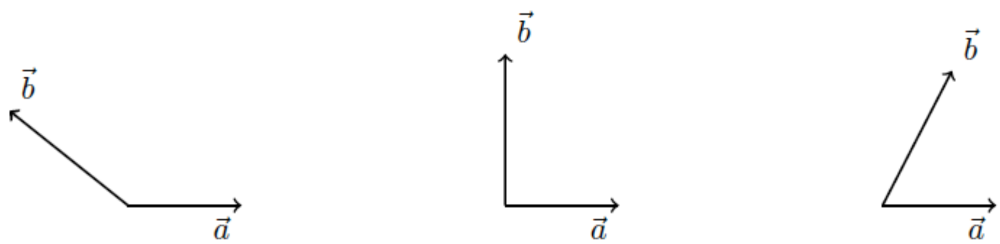
Spiegazione In questo esercizio bisogna eseguire due tipi di operazioni con i vettori: il prodotto di un vettore per uno scalare e la somma di vettori. Prima si esegue il prodotto di un vettore per uno scalare, e poi si fa la somma dei risultati.

Svolgimento In rosso troverete la soluzione del problema; in blu i vettori necessari per arrivare a trovare tale soluzione.



PROBLEMA

Testo *[I0008]* Disegna il vettore che annulla i due vettori disegnati qui di seguito



SOLUZIONE

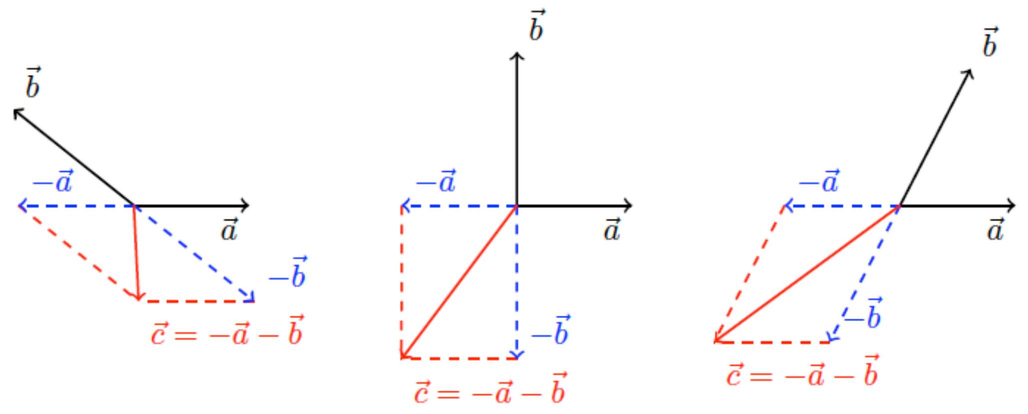
Spiegazione Il vettore $\vec{c}$ che annulla i vettori indicati $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è quello per cui vale la relazione

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

e quindi

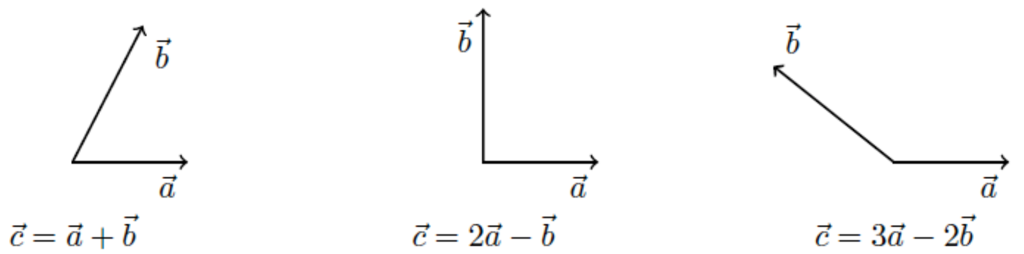
$$\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$$

Svolgimento



PROBLEMA

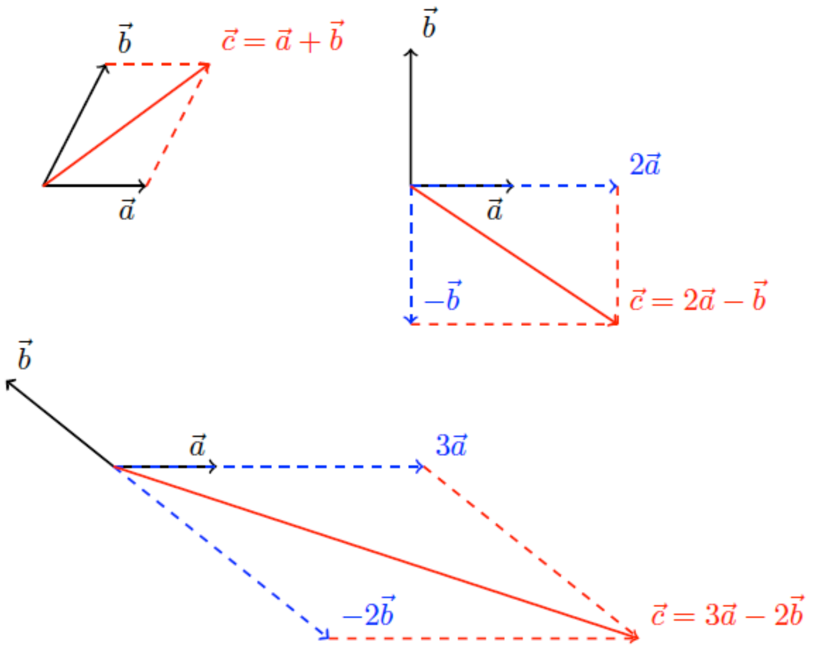
Testo *[I0007]* Esegui le operazioni indicate con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$:



SOLUZIONE

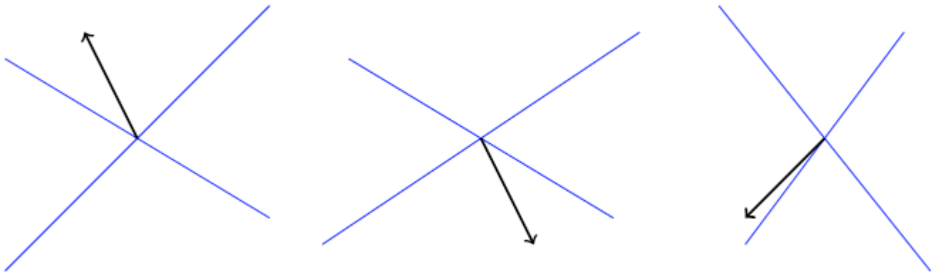
Spiegazione In questo esercizio bisogna eseguire due tipi di operazioni con i vettori: il prodotto di un vettore per uno scalare e la somma di vettori. Prima si esegue il prodotto di un vettore per uno scalare, e poi si fa la somma dei risultati.

Svolgimento In rosso troverete la soluzione del problema; in blu i vettori necessari per arrivare a trovare tale soluzione.



PROBLEMA

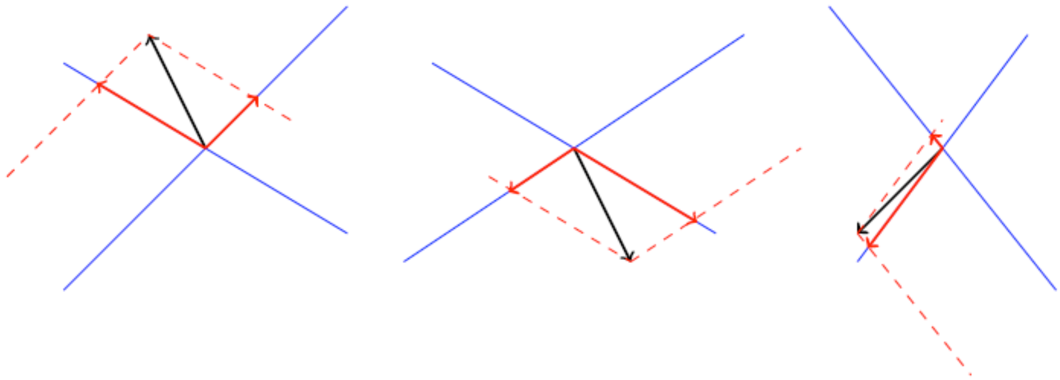
Testo *[I0009]* Scomponi i seguenti vettori lungo le direzioni indicate



SOLUZIONE

Spiegazione La scomposizione di un vettore consiste nel trovare i due vettori che sommati danno il vettore dato.

Svolgimento



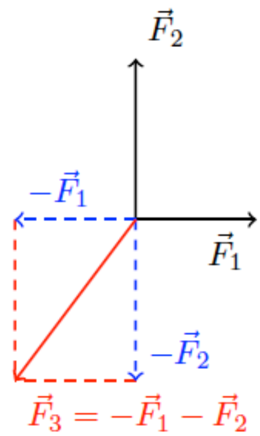
PROBLEMA

Testo *[I0011]* Disegna, e calcolane il valore, il vettore $\vec{F_3}$ che annulla la somma dei vettori $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ di valore rispettivamente $F_1 = 1,5\,kN$ e $F_2 = 800\,N$ posti perpendicolari tra loro.

SOLUZIONE

Spiegazione I due vettori dati possono essere sommati. La somma tra il vettore risultato ed il vettore che voi dovete indicare, deve dare come risultato zero. Quindi il vettore che dovete indicare deve essere uguale e opposto al vettore somma tra i due vettori indicati nel problema.

Svolgimento



Il modulo del vettore $\vec{F}_3$ deve essere uguale al modulo del vettore $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e si calcola

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{(1500\,N)^2 + (800\,N)^2} = 1700\,N$$

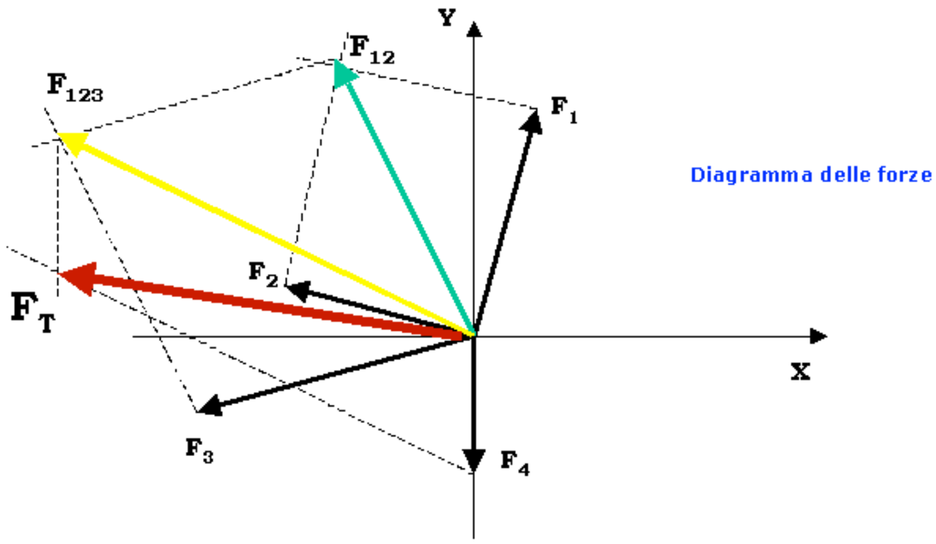
PROBLEMA

Determinare la risultante, sia dal punto di vista grafico che analitico, delle seguenti forze:

$\mathbf{F_1}$ = (2; 6) $\mathbf{F_2}$ = (-4; 2) $\mathbf{F_3}$ = (-6; -3) $\mathbf{F_4}$ = (0; -4)

SOLUZIONE

Metodo grafico



Metodo analitico

Tenendo presente il verso delle componenti delle quattro forze, le componenti della forza totale sono date da:

$$F_{XT} = \sum F_X = 2-4-6+0 = -8N \qquad F_{YT} = \sum F_Y = 6+2-3-4 = 1N \qquad \mathbf{F} = (-8;\ 1)$$

per cui il modulo della forza totale è dato da:

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{(-8)^2 + (1)^2} = \sqrt{65} = 8.1N$$

mentre l'argomento è:

$$tg\alpha = \frac{F_{yT}}{F_{xT}} = \frac{1}{-8} = -0{,}125 \Rightarrow \alpha = -7{,}1° = 172{,}9°$$

PROBLEMA

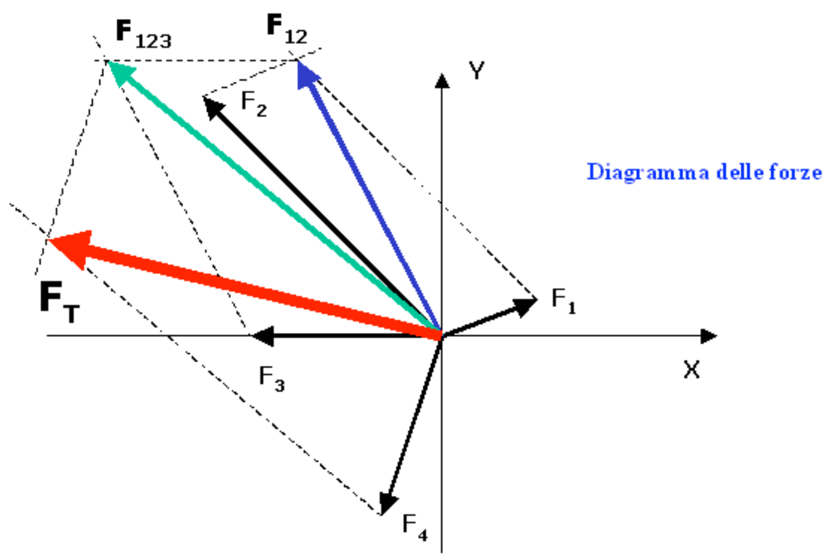
Determinare la risultante, sia dal punto di vista grafico che analitico, delle seguenti forze:

F_1 = 30 N $\alpha_1 = 30°$ F_2 = 140 N $\alpha_2 = 135°$

F_3 = 70 N $\alpha_3 = 180°$ F_4 = 80 N $\alpha_4 = 250°$

SOLUZIONE

Metodo grafico



Metodo analitico

Le componenti delle singole forze sono:

$$F_{1X} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 30 \cdot \cos 30° = 26N$$
$$F_{1Y} = F_1 \cdot \text{sen}\alpha_1 = 30 \cdot \text{sen}30° = 15N$$

$$F_{2X} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 140 \cdot \cos 135° = -99N$$
$$F_{2Y} = F_2 \cdot \text{sen}\alpha_2 = 140 \cdot \text{sen}135° = 99N$$

$$F_{3X} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 70 \cdot \cos 180° = -70N$$
$$F_{3Y} = 0$$

$$F_{4X} = F_4 \cdot \cos\alpha_4 = 80 \cdot\cdot \cos 250° = -27N$$
$$F_{4Y} = F_4 \cdot \text{sen}\alpha_4 = 80 \cdot \text{sen}250° = -75N$$

Le componenti della forza totale sono date da:

$$F_{XT} = \sum F_X = 26 - 99 - 70 - 27 = -170N \qquad F_{YT} = \sum F_Y = 15 + 99 + 0 - 75 = 39N$$

F = (-170; 39)

Pertanto l'intensità della forza risultante è data da:

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{(-170)^2 + (39)^2} = \sqrt{28900 + 1521} = \sqrt{30421} = 174N$$

mentre l'argomento è:

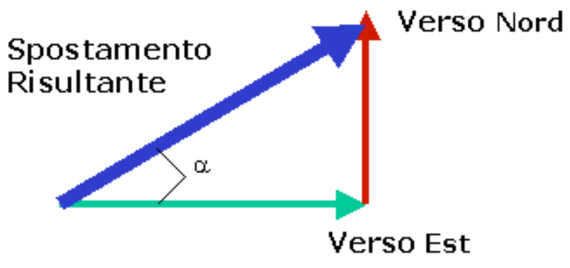
$$\text{tg}\alpha = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{39}{-170} = -0{,}23 \qquad \alpha = -13° = 167°$$

PROBLEMA

Un'automobile si sposta di 40 km verso est e di 30 km verso nord. Determinare lo spostamento risultante.

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente il problema:



dove il vettore risultante è stato trovato applicando la regola della poligonale, detta anche punta – coda.

Il modulo e l'argomento dello spostamento risultante sono dati da:

$$S = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50\text{km} \qquad tg\alpha = \frac{30}{40} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$$

PROBLEMA

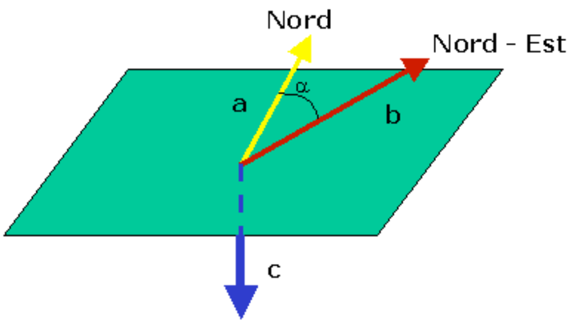
Il vettore **a** è rivolto verso Nord ed ha intensità a = 4,0. Il vettore **b** è rivolto verso Nord – Est, formando un angolo di 30° con il primo, ed ha intensità b = 6,5. Determinare il loro prodotto scalare e vettoriale.

SOLUZIONE

Prodotto scalare

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = 4{,}0 \cdot 6{,}5 \cdot \cos 30° = 22{,}5$$ c = scalare

Prodotto vettoriale



$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$

$$c = a \cdot b \cdot sen\alpha = 4{,}0 \cdot 6{,}5 \cdot sen30° = 13$$

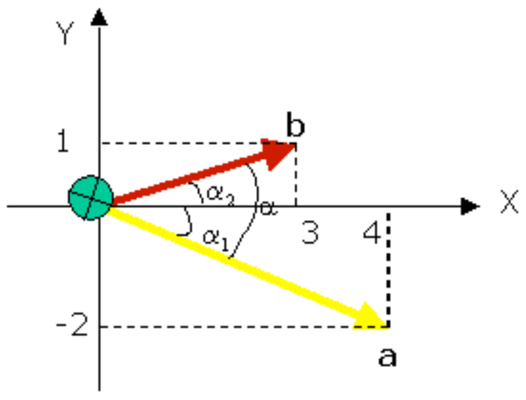
c è un vettore di modulo 13, diretto perpendicolarmente al piano contenente i vettori **a** e **b** e orientato verso il basso (regola del cavatappi o regola della mano destra).

PROBLEMA

Siano dati il vettore **a** = (4; -2) ed il vettore **b** = (3; 1). Calcolare il prodotto scalare e vettoriale.

SOLUZIONE

Rappresentiamo i due vettori su un sistema di assi cartesiani:




Simbolo che rappresenta un vettore perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b** e con verso uscente dal piano (il vettore è diretto verso l'osservatore)


Simbolo che rappresenta un vettore perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b** e con verso entrante nel piano (opposto all' l'osservatore)

Calcoliamo modulo ed argomento di ogni singolo vettore:

$$a = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 4{,}5 \qquad tg\alpha_1 = \frac{-2}{4} = -0{,}5 \Rightarrow \alpha_1 = -26{,}6°$$

$$b = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3{,}2 \qquad tg\alpha_2 = \frac{1}{3} = 0{,}3 \Rightarrow \alpha_2 = 18{,}4°$$

Pertanto l'angolo tra i due vettori sarà:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 45°$$

In definitiva:

<u>Prodotto scalare</u>

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = 4{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot \cos 45° = 10{,}2$$ c = scalare

<u>Prodotto vettoriale</u>

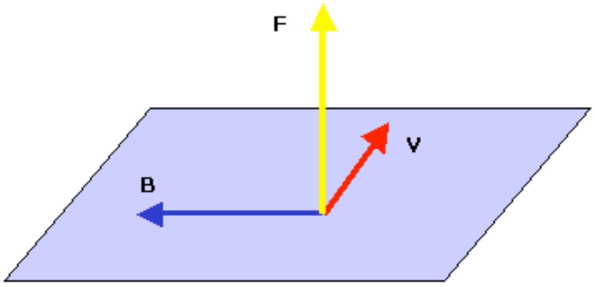
$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$
$$c = a \cdot b \cdot sen\alpha = 4{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot sen45° = 10{,}2$$

c è un vettore di modulo 10,2 e diretto perpendicolarmente al piano contenente i vettori **a** e **b** e con verso uscente dal piano, cioè verso l'osservatore (regola del cavatappi o regola della mano destra).

PROBLEMA

Un protone ($p=1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m=1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) entra in un campo magnetico uniforme $B=0{,}30$ T, con una velocità $V=1{,}0 \cdot 10^4$ m/s perpendicolare al campo magnetico. Calcolare la forza magnetica sul protone.

SOLUZIONE



Gli esperimenti dimostrano che una carica elettrica immersa in un campo magnetico subisce una forza magnetica data da:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \otimes \vec{B}$$

Poiché **F** è una grandezza vettoriale, avrà un'intensità pari a:

$$F = q \cdot V \cdot B \cdot \mathrm{sen}\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{4} \cdot 0{,}30 \cdot 1 = 4{,}8 \cdot 10^{-16}\,N \qquad \text{dove:} \qquad \alpha = 90° \Rightarrow \mathrm{sen}90° = 1$$

Un verso e una direzione dati dalla regola della mano destra:

ponendo il pollice della mano destra nel verso della velocità e le altre dita nel verso del campo magnetico, la forza magnetica avrà direzione perpendicolare al palmo della mano e verso uscente.

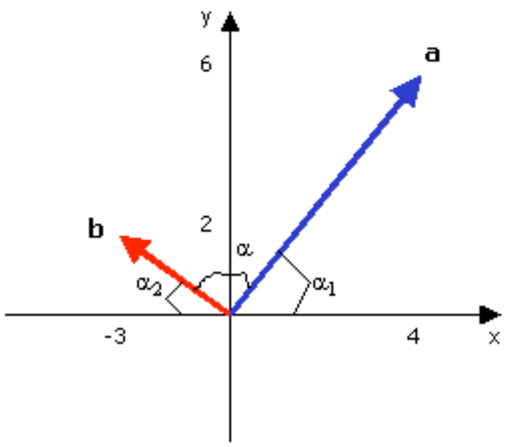
PROBLEMA

Dati i vettori **a** = (4; 6) e **b** = (-3; 2), calcolare il loro prodotto scalare e vettoriale.

SOLUZIONE

Poiché sono note le coordinate cartesiane dei vettori, calcoliamo il prodotto scalare e vettoriale nel seguente modo:

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 = 0$$



$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b} \Rightarrow$

<u>punto di applicazione</u>: lo stesso dei vettori **a** e **b**

<u>direzione</u>: perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b**

<u>verso</u>: entrante

<u>intensità</u>: $c = a_x b_y - a_y b_x = 4 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) = 26$

Esprimendo i vettori **a** e **b** attraverso le coordinate polari (modulo ed argomento):

$$a = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7{,}21 \qquad \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{6}{4} = 1{,}5 \Rightarrow \alpha_1 = 56{,}3°$$

$$b = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = 3{,}6 \qquad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{2}{-3} = -0{,}67 \Rightarrow \alpha_1 = -33{,}7°$$

il prodotto scalare e vettoriale si calcolano come:

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = ab \cdot \cos\alpha = 7{,}21 \cdot 3{,}6 \cdot \cos 90° = 0$$

$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b} \Rightarrow$

<u>punto di applicazione</u>: lo stesso dei vettori **a** e **b**
<u>direzione</u>: perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b**
<u>verso</u>: entrante
<u>intensità</u>: $c = ab \cdot \mathrm{sen}\alpha = 7{,}21 \cdot 3{,}6 \cdot \mathrm{sen}90° = 26$

dove: $\alpha = 180° - (56{,}3 + 33{,}7°) = 90°$