Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA SCRITTA MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo
Data: 4/10/2025 Classe: 4B

1. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali:

$$2^{2x+4}\cdot 3^x = \frac{2}{3^{x+3}} \qquad 4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0 \qquad 3\cdot 8^x = 3^x$$

$$(2^{x-1}-1)(3^{2x+1}-9) > 0 \qquad 2^{x+1} \geq 5^{1-x} \qquad 3^{x+1} = 3-\sqrt{10}$$

Soluzione

$2^{2x+4}\cdot 3^x = \frac{2}{3^{x+3}}$

$\frac{2^{2x+4}\cdot 3^x\cdot 3^{x+3}}{2} = 1$

$2^{2x+3}\cdot 3^{2x+3} = 1$

$6^{2x+3} = 6^0 \rightarrow 2x+3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$

$t = 2^x \qquad t^2 = 2^{2x} = 4^x$

$t^2 - 6t + 8 = 0 \qquad t_{1,2} = 3\pm 1 = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}\right.$

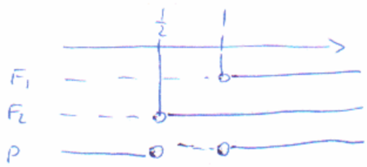
$2^x = 2 \rightarrow x = 1$

$2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$

$(2^{x-1}-1)(3^{2x+1}-9) \geq 0$

$F_1 > 0$: $2^{x-1}-1 > 0$; $2^{x-1} > 2^0$; $x-1 > 0$; $x > 1$

$F_2 > 0$: $3^{2x+1}-9 > 0$; $3^{2x+1} > 3^2$; $2x+1 > 2$; $2x > 1$; $x > \frac{1}{2}$



$x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1$

$3\cdot 8^x = 3^x$

$\log(3\cdot 8^x) = \log 3^x$

$\log 3 + \log 8^x = x\log 3$

$\log 3 + x\log 8 = x\log 3$

$\log 3 = x(\log 3 - \log 8)$

$x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 8}$

$2^{x+1} \geq 5^{1-x}$

$\log 2^{x+1} \geq \log 5^{1-x}$

$(x+1)\log 2 \geq (1-x)\log 5$

$x\log 2 + \log 2 \geq \log 5 - x\log 5$

$x(\log 2 + \log 5) \geq \log 5 - \log 2$

$x\log 10 \geq \log\frac{5}{2}$

$x \geq \log\frac{5}{2}$

$3^{x+1} = 3-\sqrt{10}$

impossibile

2. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni logaritmiche:

$$2logx - log(2x+1) + log3 = log(x-2)$$

$$log_2(e^{2x} - e^x) > 1 \qquad ln^2x + lnx - 2 < 0$$

Soluzione

$2\log x - \log(2x+1) + \log 3 = \log(x-2)$

C.A. $\begin{cases} x>0 \\ 2x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x>-\frac{1}{2} \\ x>2 \end{cases} \rightarrow x>2$

$\log x^2 + \log 3 = \log(x-2) + \log(2x+1)$

$\log 3x^2 = \log(2x^2-3x-2)$

$3x^2 = 2x^2 - 3x - 2$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-3\pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \text{ non accett.} \\ -1 \text{ non accett.} \end{cases}$ $S = \emptyset$

$$\log_2(e^{2x} - e^x) > 1$$

Qui basta sostituire $\log_{10} x = t$ e trasformare l'equazione logaritmica in un'equazione algebrica fratta:

$$\frac{1+t}{t-1} - \frac{t+3}{2-2t} = \frac{11}{2}$$

Tale equazione, risolta con i metodi usuali (ed un po' di pazienza!), dà la soluzione $t = 2$, sotto le C.E. $t-1 \neq 0$ e $2-2t \neq 0$.

Ciò implica che:

$$\log_{10} x = 2 \Rightarrow x = 10^2$$

L'unica C.E. qui è $x > 0$, sicuramente soddisfatta dalla soluzione trovata, che è pertanto accettabile.

Esponenziamo tutti i membri in base 2, che essendo $2 > 1$ non altera la disugualianza fra gli esponenti:

$$e2^{\log_2(e^{2x}-e^x)} > 2^1 \Rightarrow e^{2x} - e^x > 2$$

La disequazione risolvente è pertanto:

$$e^{2x} - e^x - 2 > 0$$

Per risolverla basta ovviamente sostituire $e^x = t$, avendo:

$$t^2 - t - 2 > 0 \Rightarrow t < -1 \vee t > 2$$

Risostituendo, si ha che $e^x < -1 \vee e^x > 2$. La prima disequazione è impossibile, mentre la seconda è soddisfatta per $x > \log 2$.

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} e^{2x} - e^x & > & 0 \\ x & > & \log 2 \end{cases}$$

La prima disequazione va risolta notando che:

$$e^{2x} - e^x > 0 \Rightarrow e^{2x} > e^x \Rightarrow 2x > x \Rightarrow x > 0$$

Il sistema risolvente diviene:

$$\begin{cases} x & > & 0 \\ x & > & \log 2 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, visto che $\log 2 \simeq 0,69 > 0$, si ha:

$$x > \log 2$$

$$\ln^2 x + \ln x - 2 < 0$$

Campo di esistenza:

$$x > 0$$

Introducendo l'incognita ausiliaria:

$$t = \ln x$$

l'equazione diventa:

$$t^2 + t - 2 < 0 \Rightarrow -2 < t < 1$$

Quindi la soluzione è:

$$-2 < t < 1 \Rightarrow -2 < \ln x < 1 \Rightarrow e^{-2} < x < e$$

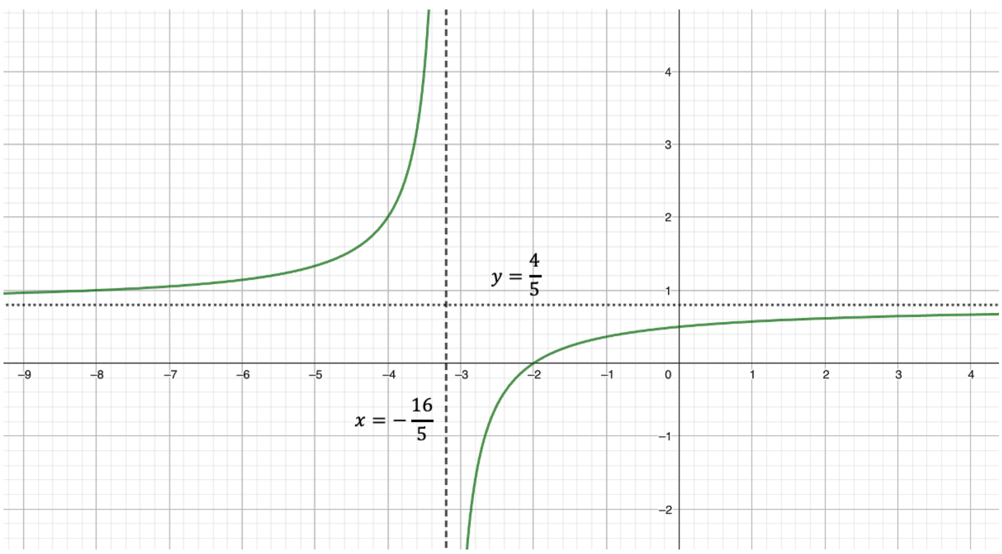
3. Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 16}{5x^2 + 6x - 32} \qquad f(x) = \frac{3x - 27}{3x^2 + 20x + 12}$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} \qquad f(x) = \frac{\ln x}{3\ln x - 1} \qquad f(x) = e^x - 1 - x$$

Soluzione

$$f(x) = \frac{4x^2 - 16}{5x^2 + 6x - 32}$$



$$f(x)=\frac{e^x-1}{2e^x+1}$$

- *Classificazione*

Funzione esponenziale fratta (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$2e^x+1\neq 0 \;\rightarrow\; \forall x\in R \;\rightarrow\; D=\left]-\infty;+\infty\right[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{2e^{-x}+1}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani (non è né pari e né dispari).

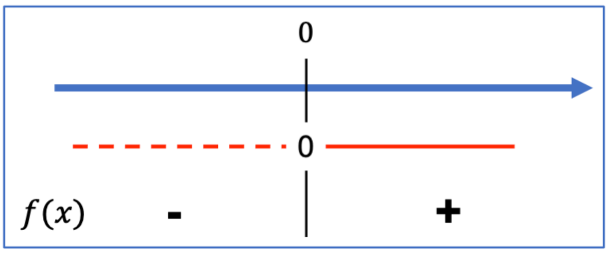
- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X:\begin{cases} y=\dfrac{e^x-1}{2e^x+1} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \frac{e^x-1}{2e^x+1}=0 \;\rightarrow\; e^x-1=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; O=(0;0)$$

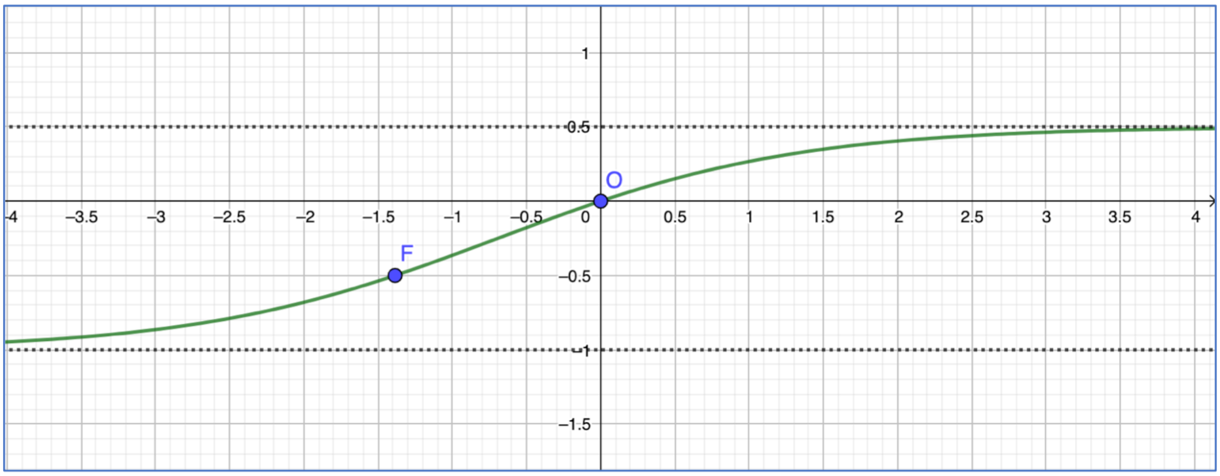
$$Y:\begin{cases} y=\dfrac{e^x-1}{2e^x+1} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \; O=(0;0)$$

- *Segno della funzione*

$$f(x)>0 \;\rightarrow\; \frac{e^x-1}{2e^x+1}>0 \;\rightarrow\; \begin{cases} e^x-1>0 \\ 2e^x+1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \forall x\in D \end{cases}$$



- *Grafico della funzione*



$$f(x) = \frac{\ln x}{3\ln x - 1}$$

- *Classificazione*

Funzione logaritmica fratta (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3\ln x - 1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq \dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{\frac{1}{3}} \end{cases} \rightarrow \ D = \left]0; \sqrt[3]{e}\right[\cup \left]\sqrt[3]{e}; +\infty\right[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x) = \frac{\ln(-x)}{3\ln(-x) - 1} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie (né pari, né dispari).

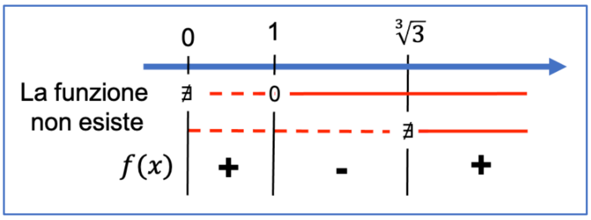
- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

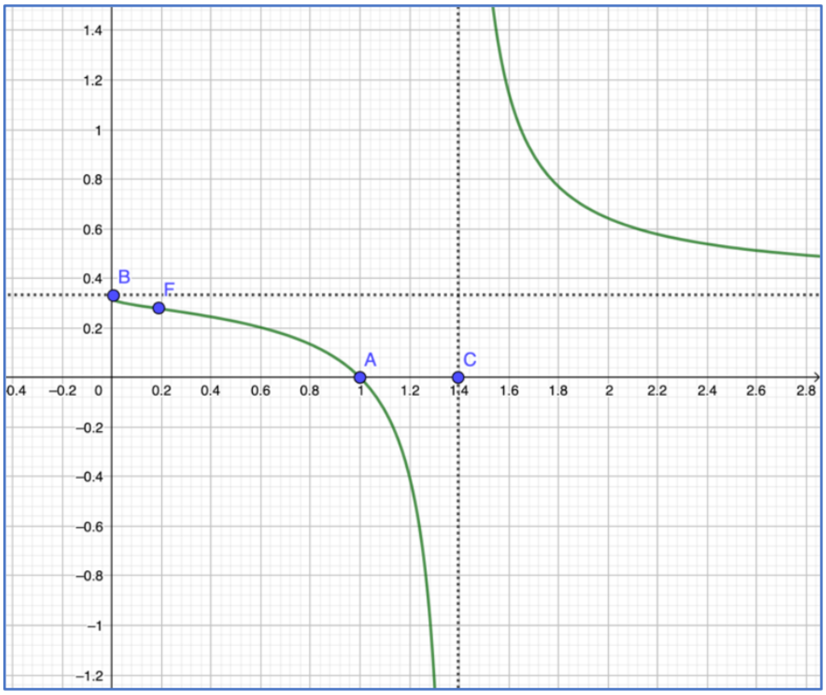
$$X: \begin{cases} y = \dfrac{\ln x}{3\ln x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \ \frac{\ln x}{3\ln x - 1} = 0 \ \rightarrow \ \ln x = 0 \ \rightarrow x = 1 \ \rightarrow \ A = (1; 0)$$

$$Y: \begin{cases} y = \dfrac{\ln x}{3\ln x - 1} \\ x = 0 \notin D \end{cases} \rightarrow \ \nexists \ intersezioni$$

- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \ \rightarrow \ \frac{\ln x}{3\ln x - 1} > 0$$
$$\rightarrow \begin{cases} \ln x > 0 \\ 3\ln x - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \sqrt[3]{e} \end{cases}$$





$$f(x) = e^x - 1 - x$$

- *Classificazione*

Funzione esponenziale (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\forall x \in R \rightarrow \ D =]-\infty; +\infty[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x) = e^{-x} - 1 + x \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani (non è né pari e né dispari).

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

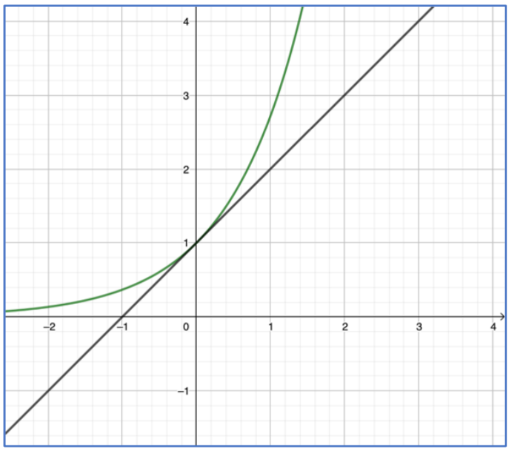
$$X: \begin{cases} y = e^x - 1 - x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow e^x - 1 - x = 0 \rightarrow e^x = x + 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow O = (0;0)$$

$$Y: \begin{cases} y = e^x - 1 - x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow O = (0;0)$$

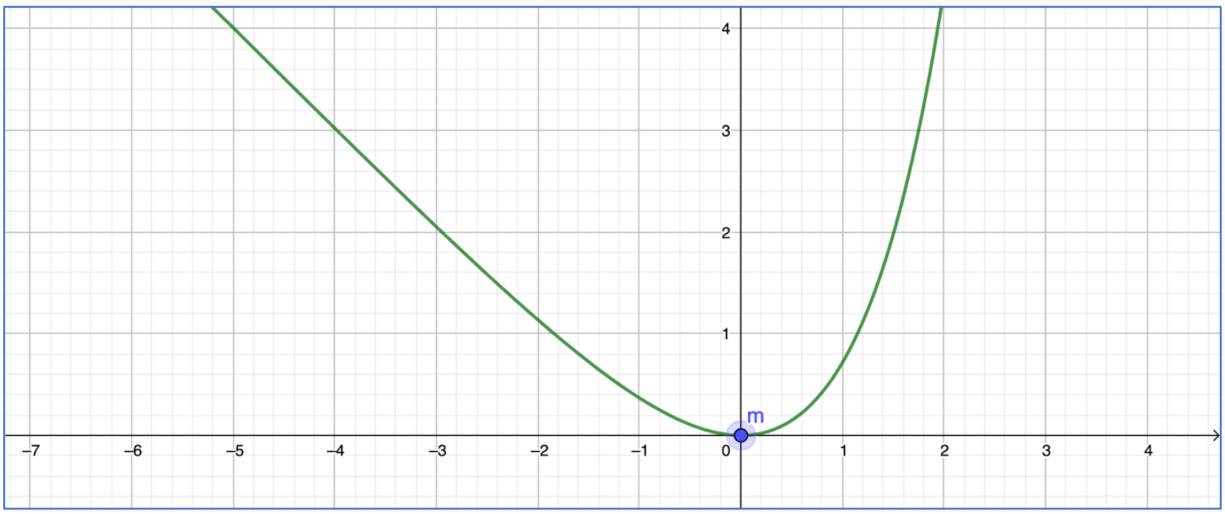
- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \rightarrow e^x - 1 - x > 0 \rightarrow e^x > x + 1$$

La disequazione va risolta per via grafica. Dal grafico si nota che la funzione $y=e^x$ è sempre maggiore della funzione $y=x+1$, per cui la funzione $y=e^x-1-x$ è sempre positiva.



- *Grafico della funzione*



1. Durante una spedizione archeologica, viene rinvenuto un frammento di ossa umano. Le analisi rilevano una presenza di carbonio-14 uguale al 15% di quello presente in un organismo vivente. Il tempo di dimezzamento del carbonio-14 è di 5730 anni. Stima l'età del reperto. La legge del decadimento è:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \qquad dove: \tau = \frac{T_{1/2}}{ln2}$$

Soluzione

La vita media del ^{14}C è data dalla seguente relazione:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{ln2} = \frac{5730}{ln2} = 8268\ anni$$

Utilizzando la legge del decadimento radioattivo:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

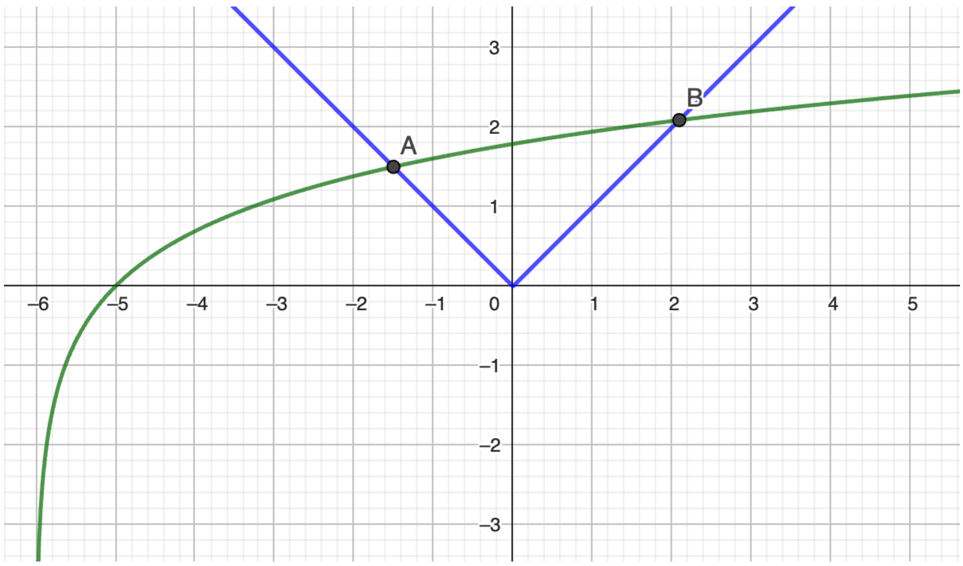
e tenendo presente che il ^{14}C è uguale al 15% di quello presente in un organismo vivente, si ottiene:

$$0{,}15N_0 = N_0 e^{-t/\tau} \xrightarrow{da\ cui} e^{-t/\tau} = 0{,}15 \rightarrow t = -\tau ln0{,}15 = -8268 \cdot ln0{,}15 = 15.685\ anni$$

2. Risolvere graficamente la seguente equazione:

$$ln(x+6) - |x| = 0$$

Soluzione



L'equazione ammette due soluzioni:

$$-2 < x_1 < -1 \qquad 2 < x_1 < 3$$