Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo

Data: 11/11/2025 Classe: 5B

1. Studiare le seguenti funzioni (facoltativo lo studio della concavità):

$$(1)\ f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+2} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1-2\ln x}{x^2}$$

Soluzione

$$(1)\ f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+2}$$

- *Classificazione*

Funzione algebrica razionale fratta

- *Dominio*

$$x^2-2x+2\neq 0 \;\rightarrow\; \forall x\in R \;\rightarrow\; D=]-\infty;+\infty[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x)=\frac{-x-1}{x^2+2x+2}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani (non è né pari e né dispari).

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

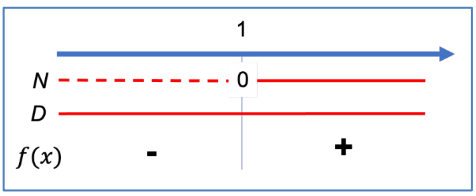
$$X:\begin{cases} y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{x^2-2x+2}=0 \;\rightarrow\; x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \;\rightarrow\; A=(1;0)$$

$$Y:\begin{cases} y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow B=\left(0;-\frac{1}{2}\right)$$

- *Segno della funzione*

$$f(x)>0 \;\rightarrow\; \frac{x-1}{x^2-2x+2}>0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2x+2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \forall x\in D \end{cases}$$



- *Comportamento della funzione agli estremi del campo e asintoti*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2x+2}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{grado\ N<grado\ D}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2x+2}=0\to y=0\quad asintoto\ orizzontale$$

L'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo.

- *Punti di discontinuità*

La funzione non presenta punti di discontinuità.

- *Crescenza e decrescenza, massimi e minimi, flessi orizzontali, flessi verticali, punti angolosi e cuspidi*

Derivata prima:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-2x+2)-(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{-x^2+2x}{(x^2-2x+2)^2}$$

Dominio della derivata:

$$x^2-2x+2\neq 0\ \to\ \forall x\in R\ \to\ D'=D=\,]-\infty;+\infty[$$

Non ci sono punti di non derivabilità e, quindi, flessi verticali, punti angolosi e cuspidi.

Punti stazionari:

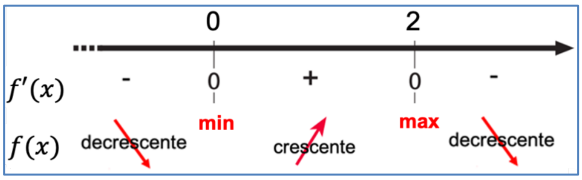
$$f'(x)=0\ \to\ \frac{-x^2+2x}{(x^2-2x+2)^2}=0\ \to\ -x^2+2x=0\ \to\ x=0;x=2\ \to\ punti\ stazionari$$

Crescenza e decrescenza:

$$f'(x)>0\ \to\ \frac{-x^2+2x}{(x^2-2x+2)^2}>0\ \to\ \begin{cases}-x^2+2x>0\\(x^2-2x+2)^2>0\end{cases}\ \to\ \begin{cases}0<x<2\\\forall x\in D\end{cases}$$

Massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale:

$$M=\left(2;\frac{1}{2}\right)\quad m=\left(0;-\frac{1}{2}\right)$$



- *Concavità e flessi a tangente obliqua*

Derivata seconda:

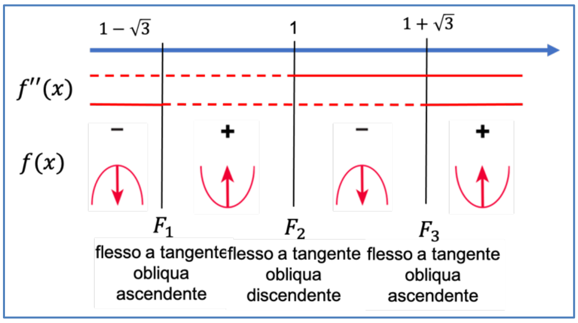
$$f''(x)=\frac{(-2x+2)(x^2-2x+2)^2-(-x^2+2x)\cdot 2(x^2-2x+2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^4}$$
$$=\frac{(2x-2)(x^2-2x-2)}{(x^2-2x+2)^3}$$

Concavità:

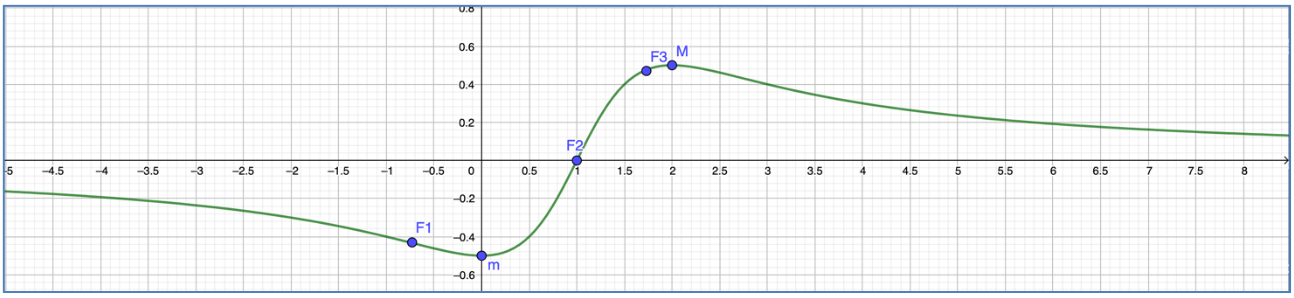
$$f''(x) > 0 \rightarrow \frac{(2x-2)(x^2-2x-2)}{(x^2-2x+2)^3} > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x-2>0 \\ x^2-2x-2>0 \\ (x^2-2x+2)^3>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<1-\sqrt{3} \cup x>1+\sqrt{3} \\ \forall x \in D \end{cases}$$

Flessi:

$$F_1 = (-0{,}73; -0{,}43) \quad F_2 = (1; 0{,}47)$$
$$F_3 = (1{,}73; 0{,}47)$$



- *Grafico della funzione*



$$2)\ f(x) = \frac{1-2\,ln\,x}{x^2}$$

- *Classificazione*

Funzione logaritmica fratta (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$x > 0 \quad \rightarrow \quad D =]0; +\infty[$$

- *Simmetrie*

La funzione, dato il suo dominio, non presenta simmetrie (né pari, né dispari).

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

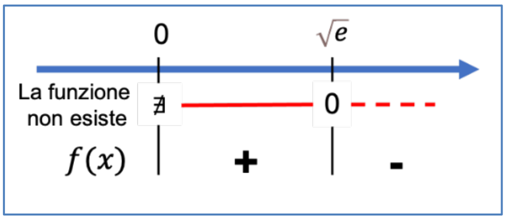
$$X: \begin{cases} y = \dfrac{1-2\,ln\,x}{x^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1-2\,ln\,x}{x^2} = 0 \rightarrow 1-2lnx = 0 \rightarrow lnx = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \rightarrow A = \left(\sqrt{e}; 0\right)$$

$$Y: \begin{cases} y = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^2} \\ x = 0 \notin D \end{cases} \rightarrow \nexists\ intersezioni$$

- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{1 - 2\ln x}{x^2} > 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - 2\ln x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \sqrt{e} \\ \forall x \in D \end{cases}$$



- *Comportamento della funzione agli estremi del campo e asintoti*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = +\infty \rightarrow x = 0\ asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow[]{\substack{confronto\ tra\ infiniti \\ la\ potenza\ (denominatore)\ è\ un\ infinito \\ di\ ordine\ superiore\ al\ logaritmo \\ (numeratore)}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = 0^+ \rightarrow$$

$$y = 0^+\ asintoto\ orizzontale$$

Lo stesso limite nella forma indeterminata avremmo potuto risolverlo con il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0^+$$

- *Punti di discontinuità*

Esiste un punto di discontinuità di 2ª specie:

$$0 = (0; 0)$$

- *Crescenza e decrescenza, massimi e minimi, flessi orizzontali, flessi verticali, punti angolosi e cuspidi*

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (1 - 2\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4(-1 + \ln x)}{x^3}$$

Dominio della derivata:

$$x > 0 \rightarrow D' = D =]0; +\infty[$$

Non ci sono punti di non derivabilità (flessi verticali, punti angolosi e cuspidi).

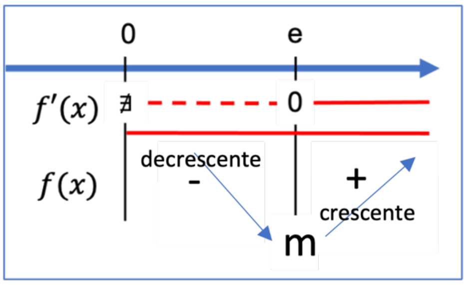
Punti stazionari:

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{4(-1+lnx)}{x^3}=0 \;\rightarrow\; -1+ln\,x=0 \;\rightarrow\; ln\,x=1 \;\rightarrow\; x=e \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; punto\ stazionario$$

Crescenza e decrescenza:

$$f'(x)>0 \;\rightarrow\; \frac{4(-1+lnx)}{x^3}>0$$

$$\rightarrow \begin{cases} -1+ln\,x>0 \\ x^3>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>e \\ x>0 \end{cases}$$



Massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale:

$$m=\left(e;-\frac{1}{e^2}\right)$$

- *Concavità e flessi a tangente obliqua*

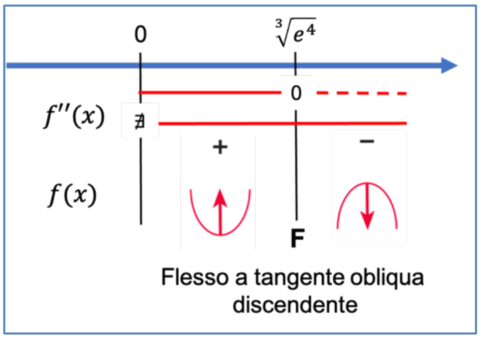
Derivata seconda:

$$f''(x)=\frac{\frac{4}{x}\cdot x^3-4(-1+lnx)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{4(4-3lnx)}{x^4}$$

Concavità:

$$f''(x)>0 \;\rightarrow\; \frac{4(4-3lnx)}{x^4}>0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 4-3lnx>0 \\ x^4>0 \end{cases}$$

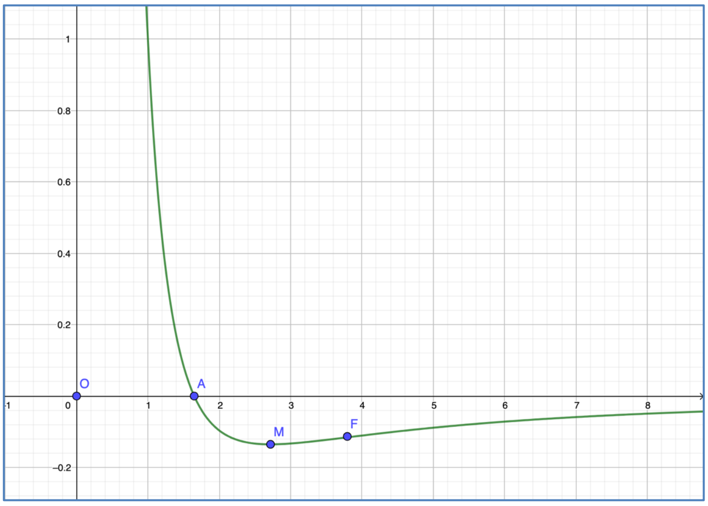
$$\rightarrow \begin{cases} lnx<\frac{4}{3} \\ \forall x\in D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^4} \\ \forall x\in D \end{cases}$$



Flessi:

$$F=\left(\sqrt[3]{e^4};-0{,}1\right)$$

- *Grafico della funzione*



2. Verificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Soluzione

$$|f(x)-l|<\varepsilon\ \rightarrow \left|\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\right|<\varepsilon$$

Facciamo alcuni passaggi algebrici per esprimere la quantità in valore assoluto in una forma più semplice:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}-2\sqrt{3}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}-2\sqrt{3}=\sqrt{x}+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{x}-\sqrt{3}$$

Quindi:

$$|\sqrt{x}-\sqrt{3}|<\varepsilon\rightarrow\ -\varepsilon<\sqrt{x}-\sqrt{3}<\varepsilon\rightarrow\sqrt{3}-\varepsilon<\sqrt{x}<\sqrt{3}+\varepsilon\ \rightarrow(\sqrt{3}-\varepsilon)^2<x<(\sqrt{3}+\varepsilon)^2$$

L'intervallo:

$$\left](\sqrt{3}-\varepsilon)^2;(\sqrt{3}+\varepsilon)^2\right[$$

è un intorno completo per il punto $x_0=3$, per cui il limite è vero, ossia è verificato.

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(1-cos2x)}{sinx}\qquad\qquad (2)\ \lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}$$

Soluzione

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)((1-cos2x))}{sinx}\xrightarrow{cos2x=1-2sin^2x}\lim_{x\to 0}(1-1+2sin^2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}=\lim_{x\to 0}(2sin^2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}$$

$$=\lim_{x\to 0}(2sin^2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}=\lim_{x\to 0}2sinx(x+1)=2\cdot 0\cdot(0+1)=0$$

$$(2)\ \lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow[x\to -2\ y\to 0]{y=x+2\ \to\ x=y-2}\ \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\ \xrightarrow{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}\ =1$$

4. Verificare se le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} & se\ x < 2 \\ ln(2x - 3) & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

Soluzione

Condizione di continuità:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} ln(2x - 3) = 0 \end{cases} \rightarrow \ la\ funzione\ è\ discontinua\ in\ x = 2$$

5. Calcolare le seguenti derivate:

$$(1)\ y = \frac{(x - 1)e^x}{x} \qquad (2)\ y = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

Soluzione

$$(1)\ f(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x}$$

$$y' = \frac{[e^x + (x - 1)e^x]x - (x - 1)e^x}{x^2} = \frac{x^2e^x - (x - 1)e^x}{x^2} = \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{x^2}$$

$$(2)\ y = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$