Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo

Data: 11/11/2025 Classe: 5B

1. Studiare le seguenti funzioni (facoltativo lo studio della concavità):

$$(1)\ f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2} \qquad\qquad (2)\ f(x)=\frac{ln^2x-lnx}{x}$$

Soluzione

$$(1)\ f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

- *Classificazione*

Funzione algebrica razionale fratta

- *Dominio*

$$(x-1)^2\neq 0\ \rightarrow\ x\neq 1\ \rightarrow\ D=\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x)=\frac{x^2}{(-x-1)^2}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani (non è né pari e né dispari).

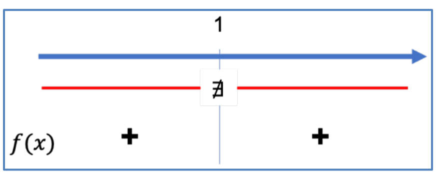
- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X:\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2} \\ y=0 \end{cases}\ \rightarrow\ \frac{x^2}{(x-1)^2}=0\ \rightarrow\ x^2=0\ \rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ O=(0;0)$$

$$Y:\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2} \\ x=0 \end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\ \rightarrow\ O=(0;0)$$

- *Segno della funzione*

$$f(x)>0\ \rightarrow\ \frac{x^2}{(x-1)^2}>0\ \rightarrow\ \begin{cases} x^2>0 \\ (x-1)^2>0 \end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases} \forall x\in D \\ \forall x\in D \end{cases}$$



La funzione è sempre positiva nel suo campo di esistenza.

- *Comportamento della funzione agli estremi del campo e asintoti*

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty \quad \to \quad x=1 \ \ asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{grado\ N=grado\ D}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1\to y=1 \ \ asintoto\ orizzontale$$

L'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo.

- *Punti di discontinuità*

La funzione presenta una discontinuità nel punto:

$$A=(1;0)$$

- *Crescenza e decrescenza, massimi e minimi, flessi orizzontali, flessi verticali, punti angolosi e cuspidi*

Derivata prima:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-x^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-2x}{(x-1)^3}$$

Dominio della derivata:

$$(x-1)^3\neq 0 \ \to \ x\neq 1 \ \to \ D'=D=\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[$$

Il punto x=1 non appartiene al dominio della funzione, per cui non può essere considerato come un punto di non derivabilità. Pertanto, la funzione non presenta flessi verticali, punti angolosi e cuspidi.

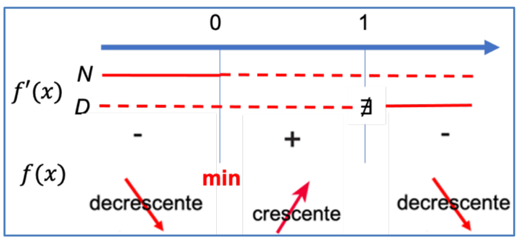
Punti stazionari:

$$f'(x)=0 \to \frac{-2x}{(x-1)^3}=0 \to -2x=0 \ \to \ x=0 \to punto\ stazionario$$

Crescenza e decrescenza:

$$f'(x)>0 \ \to \ \frac{-2x}{(x-1)^3}>0 \ \to$$

$$\begin{cases}-2x>0\\(x-1)^3>0\end{cases} \to \begin{cases}x<0\\x>1\end{cases}$$



Massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale:

$$m=(0;0)$$

Nel punto x=1 la funzione non è definita, per cui non può essere un punto di massimo.

- *Concavità e flessi a tangente obliqua*

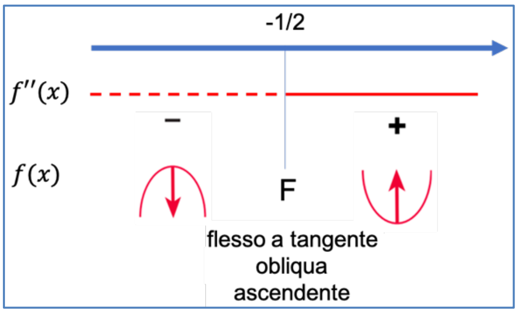
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - (-2x)\cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$$

Concavità:

$$f''(x) > 0 \rightarrow \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4} > 0 \rightarrow$$

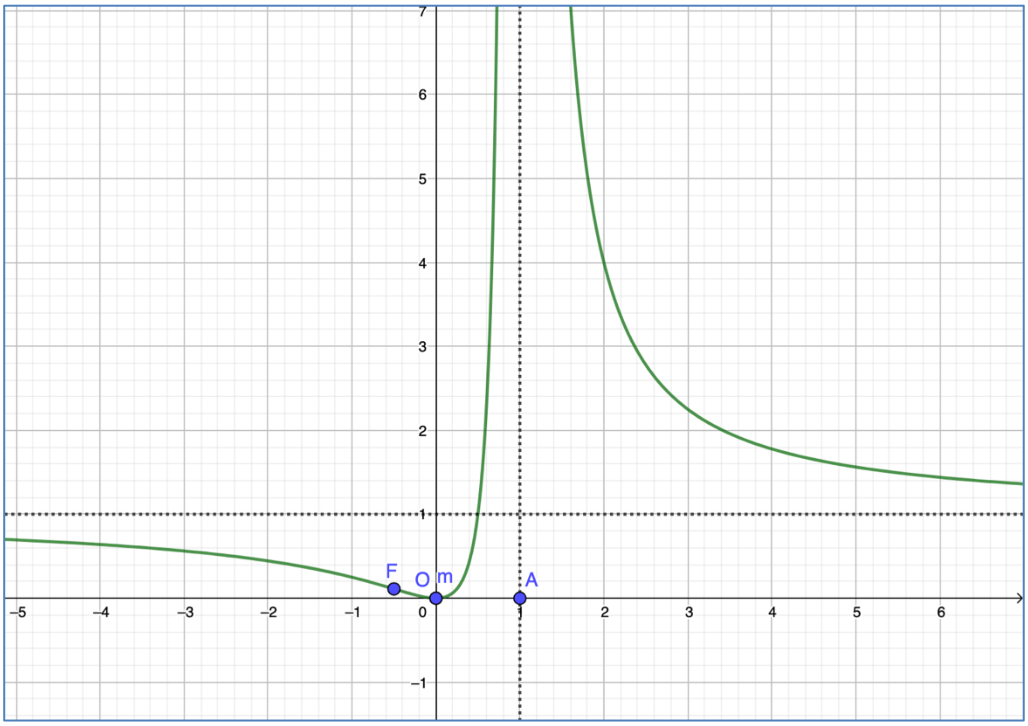
$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ (x-1)^4 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \forall x \in D \end{cases}$$



Flessi:

$$F = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{9}\right)$$

- *Grafico della funzione*



$$(2)\ f(x)=\frac{ln^2x-lnx}{x}$$

- *Classificazione*

Funzione logaritmica fratta (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \rightarrow\ x>0\ \rightarrow\ D=\,]0;+\infty[$$

- *Simmetrie*

La funzione, dato il suo dominio, non presenta simmetrie (né pari, né dispari).

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

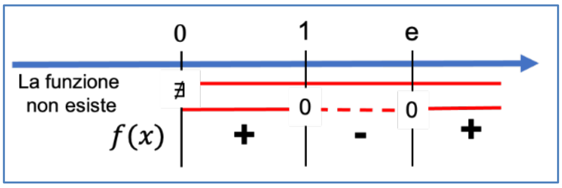
$$X:\begin{cases} y=\dfrac{ln^2x-lnx}{x} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow\ \frac{ln^2x-lnx}{x}=0\ \rightarrow ln^2x-lnx=0\ \rightarrow lnx(lnx-1)=0\ \rightarrow$$
$$lnx=0\ \rightarrow x=e^0=1\ \rightarrow A=(1;0)\ \rightarrow\ lnx=1\ \rightarrow\ x=e\ \rightarrow\ B=(e;0)$$

$$Y:\begin{cases} y=\dfrac{ln^2x-lnx}{x} \\ x=0\notin D \end{cases} \rightarrow\ \nexists\ intersezioni$$

- *Segno della funzione*

$$f(x)>0\ \rightarrow\ \frac{ln^2x-lnx}{x}>0\ \rightarrow$$

$$\begin{cases} ln^2x-lnx>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow\ \begin{cases} x<1\cup x>e \\ x>0 \end{cases}$$



- *Comportamento della funzione agli estremi del campo e asintoti*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{ln^2x-lnx}{x}=+\infty\ \rightarrow\ x=0\ \ asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln^2x-lnx}{x}=\frac{\infty}{\infty}\ \xrightarrow[]{\substack{confronto\ tra\ infiniti \\ la\ potenza\ (denominatore)\ \grave{e}\ un\ infinito \\ di\ ordine\ superiore\ al\ logaritmo \\ (numeratore)}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{ln^2x-lnx}{x}=0^+\ \rightarrow$$
$$y=0^+\ asintoto\ orizzontale$$

Lo stesso limite nella forma indeterminata avremmo potuto risolverlo con il teorema di De L'Hospital, applicato più volte:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln^2x-lnx}{x}=\frac{\infty}{\infty}\ \rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2lnx\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2lnx-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0$$

- *Punti di discontinuità*

Esiste un punto di discontinuità di 2ª specie:

$$0 = (0; 0)$$

- *Crescenza e decrescenza, massimi e minimi, flessi orizzontali, flessi verticali, punti angolosi e cuspidi*

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) \cdot x - (ln^2x - lnx) \cdot 1}{x^2} = \frac{-ln^2x + 3lnx - 1}{x^2}$$

Dominio della derivata:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \ x > 0 \ \rightarrow \ D' = D =]0; +\infty[$$

Non ci sono punti di non derivabilità (flessi verticali, punti angolosi e cuspidi).

Punti stazionari:

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \frac{-ln^2x + 3lnx - 1}{x^2} = 0 \ \rightarrow \ -ln^2x + 3lnx - 1 = 0$$

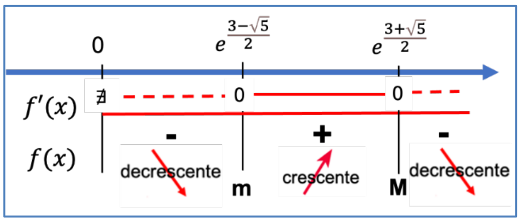
Risolviamo l'equazione attraverso l'introduzione della variabile ausiliaria:

$$-ln^2x + 3lnx - 1 = 0 \ \xrightarrow{lnx=z} \ z^2 - 3z + 1 = 0 \ \rightarrow \ z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \ \rightarrow \ lnx = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \ \rightarrow$$
$$x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \ \rightarrow \ lnx = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \ \rightarrow \ x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Esistono due punti stazionari.
Crescenza e decrescenza:

$$f'(x) > 0 \ \rightarrow \ \frac{-ln^2x + 3lnx - 1}{x^2} > 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} -ln^2x + 3lnx - 1 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \ \begin{cases} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ \forall x \in D \end{cases}$$

Massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale:



$$m = \left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; -0,16\right) \qquad M = \left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; 0,3\right)$$

- *Concavità e flessi a tangente obliqua*

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{2}{x}lnx + \frac{3}{x}\right) \cdot x^2 - (-ln^2x + 3lnx - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2ln^2x - 8lnx + 5}{x^3}$$

Concavità:

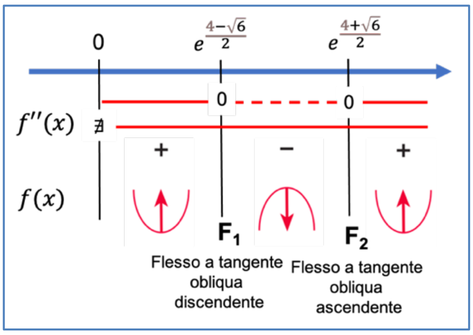
$$f''(x)>0 \;\rightarrow\; \frac{2ln^2x-8lnx+5}{x^3}>0 \;\rightarrow\; \begin{cases}2ln^2x-8lnx+5>0\\ x^3>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x<e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}} \cup x>e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}\\ x>0\end{cases}$$

dove la disequazione logaritmica è stata risolta introducendo la variabile ausiliaria:

$$2ln^2x-8lnx+5>0>0 \xrightarrow{lnx=z} 2z^2-8z+5>0 \;\rightarrow$$

$$z<\frac{4-\sqrt{6}}{2} \cup z>\frac{4+\sqrt{6}}{2} \;\rightarrow$$

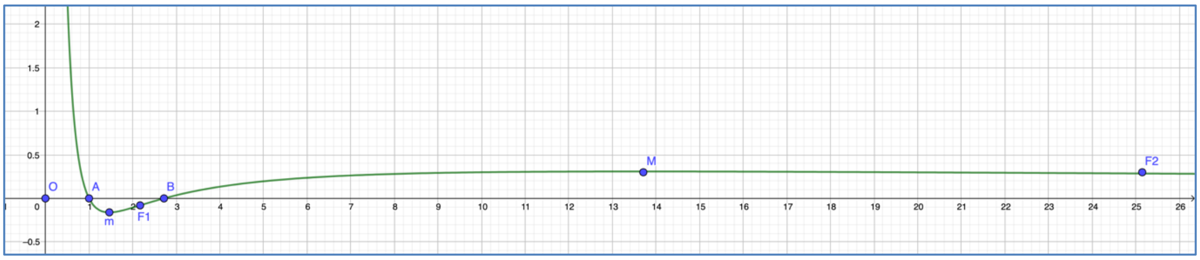
$$lnx<\frac{4-\sqrt{6}}{2} \cup lnx>\frac{4+\sqrt{6}}{2} \;\rightarrow\; x<e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}} \cup x>e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}$$



Flessi:

$$F_1=\left(e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}};0{,}1\right) \qquad F_2=\left(e^{\frac{4+\sqrt{5}}{2}};0{,}5\right)$$

- *Grafico della funzione*



2. Verificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to4}\frac{1}{log_2x-2}=\infty$$

Soluzione

$$|f(x)|>M \rightarrow \left|\frac{1}{log_2x-2}\right|>M \;\rightarrow\; |log_2x-2|<\frac{1}{M} \;\rightarrow\; -\frac{1}{M}<log_2x-2<\frac{1}{M} \;\rightarrow$$

$$2-\frac{1}{M}<log_2x<2+\frac{1}{M} \;\rightarrow\; e^{2-\frac{1}{M}}<x<e^{2+\frac{1}{M}}$$

L'intervallo:

$$\left]e^{2-\frac{1}{M}};e^{2+\frac{1}{M}}\right[$$

è un intorno completo del punto $x_0=4$, per cui il limite è verificato.

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$(1)\ \lim_{x\to 0}(1-cos2x)\cdot\frac{x+1}{sinx} \qquad (2)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{3e^x-5}{1+4e^x}$$

Soluzione

$$(1)\ \lim_{x\to 0}(1-cos2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}\xrightarrow{cos2x=1-2sin^2x}\lim_{x\to 0}(1-1+2sin^2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}=\lim_{x\to 0}(2sin^2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}=$$

$$\lim_{x\to 0}(2sin^2x)\cdot\frac{x+1}{sinx}=\lim_{x\to 0}2sinx(x+1)=2\cdot 0\cdot(0+1)=0$$

$$(2)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{3e^x-5}{1+4e^x}=\frac{\infty}{\infty}\to\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x\left(3-\frac{5}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+4\right)}=\frac{3-\frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+4}=\frac{3-0}{0+4}=\frac{3}{4}$$

4. Verificare se le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-2} & se\ x<2\\ ln(2x-3) & se\ x\geq 2\end{cases}$$

Soluzione

Condizione di continuità:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-1}{x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}ln(2x-3)=0\end{cases}\to\ la\ funzione\ è\ discontinua\ in\ x=2$$

5. Calcolare le seguenti derivate:

$$(1)\ \ y=\frac{x^2-4x}{xlnx} \qquad (2)\ \ y=lnsin\sqrt{2x+1}$$

Soluzione

$$(1)\ \ y=\frac{x^2-4x}{xlnx}$$

$$y' = \frac{(2x-4)xlnx - (x^2-4x)\left(lnx + x\frac{1}{x}\right)}{x^2ln^2x} = \frac{2x^2lnx - 4xlnx - x^2lnx - x^2 + 4xlnx + 4x}{x^2ln^2x}$$

$$= \frac{x^2lnx - x^2 + 4x}{x^2ln^2x} = \frac{x(xlnx - x + 4)}{x^2ln^2x} = \frac{xlnx - x + 4}{xln^2x}$$

$$(2)\ \ y = lnsin\sqrt{2x+1}$$

$$y' = \frac{1}{sin\sqrt{2x+1}} \cdot cos\sqrt{2x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \frac{cotg\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$$