Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo
Data: 13/01/2026 Classe: 5B

1. ESERCIZIO

Determinare i coefficienti a,b,c, della seguente funzione:

$$y = f(x) = \frac{ax^3 + bx + c}{x}$$

affinchè il suo grafico passi per P=(1;0) e abbia un flesso in F=(-1;4).

Soluzione

1) Passaggio della funzione per il punto P=(1;0):

$$0 = a + b + c$$

2) Appartenenza del flesso F=(-1;4) alla funzione:

$$4 = \frac{-a - b + c}{-1} \quad \rightarrow \quad a + b - c = 4$$

3) Esistenza del flesso in F=(-1;4):

$$f'(x) = \frac{(3ax^2 + b) \cdot x - (ax^3 + bx + c) \cdot 1}{x^2} = \frac{2ax^3 - c}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{6ax^2 \cdot x^2 - (2ax^3 - c) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2ax^3 + 2c}{x^3}$$

$$f''(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-2a + 2c}{-1} = 0 \quad \rightarrow \quad a - c = 0$$

La soluzione del sistema formato dalle tre equazioni (metodo di sostituzione o un altro equivalente) fornisce i valori dei tre coefficienti della funzione:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b - c = 4 \\ a - c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c + b + c = 0 \\ c + b - c = 4 \\ a = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = 4 \\ a = -2 \end{cases}$$

Pertanto, la funzione ha la seguente forma:

$$y = \frac{-2x^3 + 4x - 2}{x}$$

2. ESERCIZIO

Determinare i coefficienti a,b della seguente funzione:

$$y = f(x) = (x + a)e^{b-x}$$

affinchè il suo grafico abbia un flesso di ascissa x=4 e un massimo di ordinata y=e. Studiare la funzione. I valori dei parametri sono: a=-2; b=4.

Soluzione

Per calcolare i due coefficienti servono due condizioni (due equazioni).

1) Esistenza del flesso:

$$f'(x) = e^{b-x} - (x + a)e^{b-x}$$

$$f''(x) = -e^{b-x}(-x - a + 1) + e^{b-x}(-1) = e^{b-x}(x + a - 2)$$

$$f''(4) = 0 \;\; \rightarrow \;\; e^{b-3}(a + 2) = 0 \;\; \rightarrow \;\; a + 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; a = -2$$

2) Esistenza del massimo di ordinata y=e:

$$(x - 2)e^{b-x} = e \quad (1)$$

Condizione di esistenza del massimo:

$$f'(x) = e^{b-x} - (x - 2)e^{b-x} = 0 \quad (2)$$

Sostituendo la (1) nella (2) si ottiene:

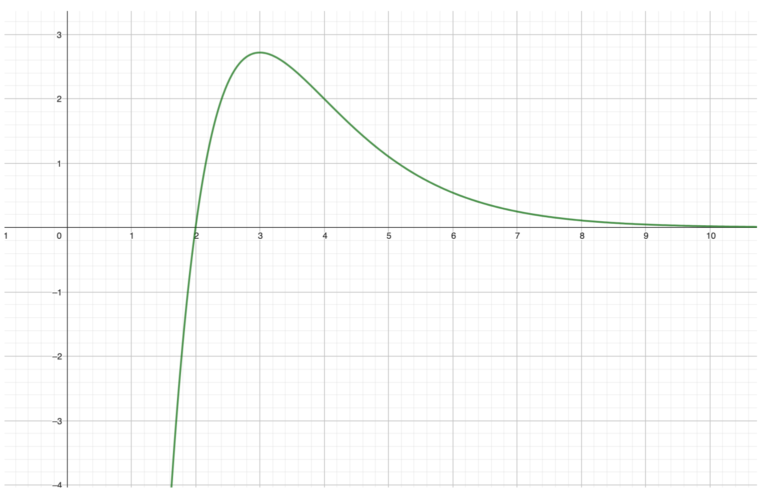
$$e^{b-x} - e = 0 \;\; \rightarrow \;\; e^{b-x} = e \;\; \rightarrow \;\; b - x = 1 \;\; \rightarrow \;\; x = b - 1$$

e, sostituendo di nuovo nella (1), otteniamo il coefficiente b:

$$(b - 1 - 2)e^{b-b+1} = e \;\; \rightarrow \;\; (b - 3)e = e \;\; \rightarrow \;\; b = 4$$

Noti i coefficienti a,b, la funzione ha la seguente forma e il grafico disegnato in figura:

$$y = (x - 2)e^{4-x}$$

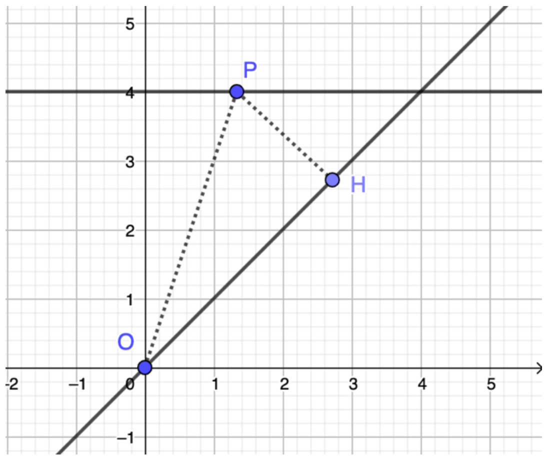


3. ESERCIZIO

Determinare un punto sulla retta y=4 in modo tale che sia minima la somma dei quadrati delle distanze dall'origine e dalla bisettrice del primo quadrante.

Soluzione

Il problema è rappresentato in figura, dove abbiamo diseganto la retta y=4 e la bisettrice y=x.
La funzione obiettivo è:



$$y = f(x) = \overline{PO^2} + \overline{PH^2}$$

Scegliendo l'ascissa x di P come variabile indipendente, si ha che:

$$P = (x; 4)$$

con la condizione:

$$0 \leq x \leq 4$$

Utilizziamo il teorema di Pitagora per valutare la distanza PO:

$$\overline{PO^2} = x^2 + 4^2 = x^2 + 16$$

e la formula della distanza del punto P=(x_0;y_0)=(x;4) dalla retta y=x per valutare PH:

$$\overline{PH} = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|x-4|}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \overline{PH^2} = \frac{(x-4)^2}{2} = \frac{x^2 - 8x + 16}{2}$$

In questo modo, la funzione obiettivo assume la forma:

$$f(x) = (x^2 + 16) + \left(\frac{x^2 - 8x + 16}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 24$$

Derivata della funzione:

$$f'(x) = 3x - 4$$

Dominio della derivata:

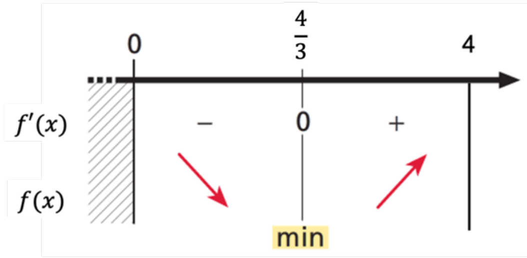
$$\forall x \in R$$

Condizione di massimo e minimo:

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x - 4 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{4}{3}$$

Il punto x=4/3 è un possibile punto di minimo.
Segno della derivata:

$$3x - 4 > 0 \;\; \rightarrow \;\; x > \frac{4}{3}$$



La funzione presenta un minimo in x=4/3.
Dunque, il punto che rende minima la funzione obiettivo ha le seguenti coordinate:

$$P = (x;4) = \left(\frac{4}{3};4\right) \rightarrow f(x) = \overline{PA^2} + \overline{PH^2} = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 24 = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9} - 4\cdot\frac{4}{3} + 24 = \frac{64}{3}$$