Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo
Data: 13/01/2026 Classe: 5B

1. ESERCIZIO

Determinare i coefficienti a,b, della seguente funzione:

$$y = f(x) = \frac{ax}{(bx-1)^2}$$

affinchè il suo grafico abbia un massimo o un minimo nel punto P=(-1;-1/4).

Soluzione

La funzione contiene due parametri, per cui abbiamo bisogno di due condizioni (due equazioni) per poterli calcolare.

- La prima condizione è quella di appartenza del punto P=(-1;-1/4) alla funzione:

$$P \in y \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{4} = \frac{-a}{(-b-1)^2}$$

- La seconda condizione è che la funzione abbia un massimo o un minimo nel punto P:

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a(bx-1)^2 - ax \cdot 2 \cdot (bx-1) \cdot b}{(bx-1)^4} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a(-bx-1)}{(bx-1)^3} = 0$$

$$f'(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a(b-1)}{(-b-1)^3} = 0$$

Naturalmente, in x=-1 la funzione è derivabile.
Date le due condizioni, si ha il seguente sistema di equazioni, risolto il quale otteniamo i valori dei parametri a e b:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} = \frac{-a}{(-b-1)^2} \\ \frac{a(b-1)}{(-b-1)^3} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Pertanto, con le condizioni poste, la funzione assume la seguente forma:

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

2. ESERCIZIO

Determinare il coefficiente k della seguente funzione:

$$y = f(x) = (x+k)e^{-x}$$

affinchè il suo grafico abbia un flesso di ascissa x=3. Studiare la funzione. Il valore del parametro è k=-1

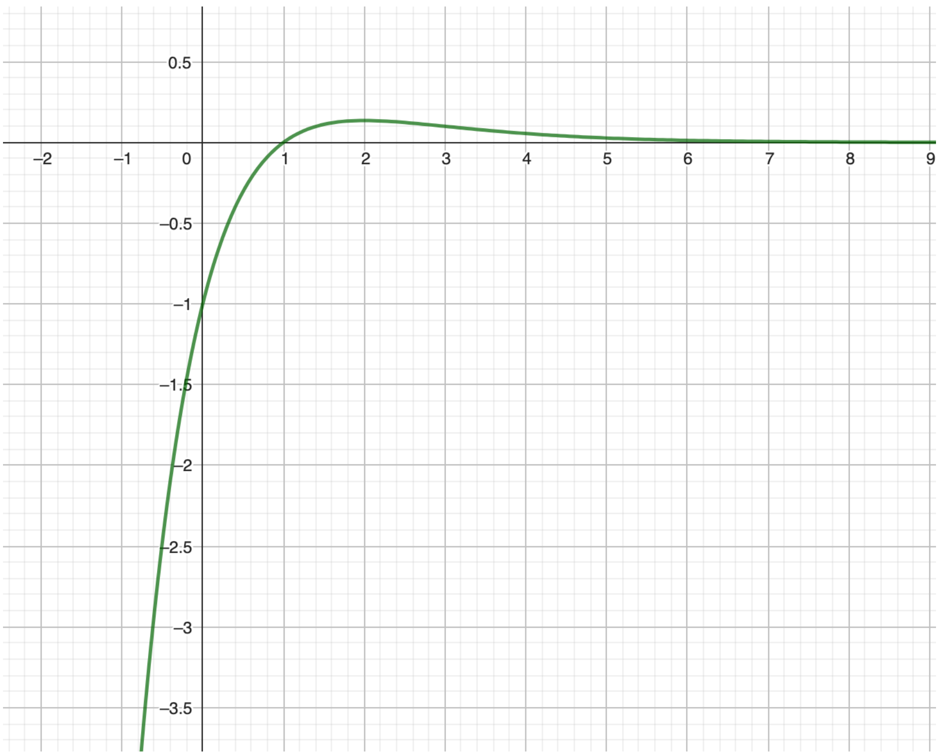
Soluzione

Per calcolare il coefficiente k della funzione abbiamo bisogno di una sola condizione, che è rappresentata dall'esistenza del flesso di ascissa x=3:

$$f'(x) = e^{-x} - (x+k)e^{-x} = e^{-x}(-x-k+1)$$
$$f''(x) = -e^{-x}(-x-k+1) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x+k-2)$$
$$f''(3) = 0 \;\rightarrow\; e^{-3}(k-1) = 0 \;\rightarrow\; k+1 = 0 \;\rightarrow$$
$$k = -1$$

La funzione ha la seguente forma e il grafico a fianco disegnato:

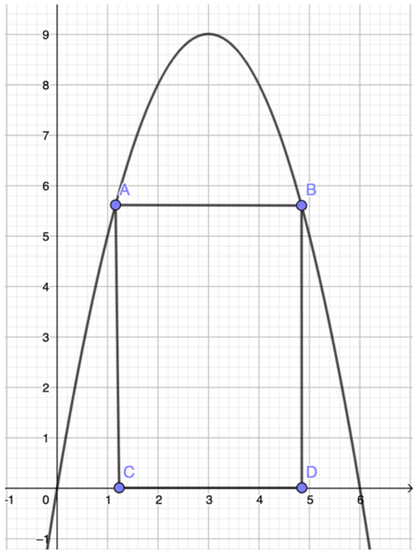
$$y = (x-1)e^{-x}$$



3. ESERCIZIO

Determinare il rettangolo di area massima tra tutti quelli inscritti nella parte di piano limitata dalla parabola $y=-x^2+6x$ e dall'asse x.

Soluzione



Disegniamo la parabola con i suoi elementi più caratteristici, il vertice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (3;9)$$

e l'intersezione con gli assi cartesiani:

$$x: \begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0;\ x = 6$$

$$y: \begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$$

Scegliamo l'ascissa di A come variabile indipendente:

$$A = (x; y) = (x; -x^2 + 6x)$$

con la condizione:

$$0 < x < 3$$

La funzione obiettivo è l'area del rettangolo ABCD:

$$y = f(x) = \overline{CD} \cdot \overline{AC}$$

Poiché:

$$\overline{CD} = 2(3 - x) \qquad \overline{AC} = -x^2 + 6x$$

la funzione obiettivo assume la seguente forma:

$$f(x) = 2(3 - x) \cdot (-x^2 + 6x) = 2x^3 - 18x^2 + 36x$$

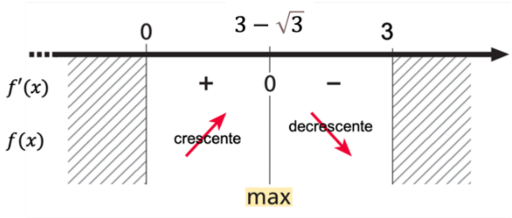
Derivata della funzione:

$$f'(x) = 6x^2 - 36x + 36 = 6(x^2 - 6x + 6)$$

Dominio della derivata:

$$\forall x \in R$$

Condizione di massimo e minimo:



$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \pm \sqrt{3}$$

Per la condizione posta, solo il punto $x = 3 - \sqrt{3}$ è un possibile punto di massimo.
Segno della derivata:

$$x^2 - 6x + 6 > 0 \;\rightarrow\; x < 3 - \sqrt{3} \cup x > 3 + \sqrt{3}$$

La funzione presenta un massimo in $x = 3 - \sqrt{3}$
L'area massima vale:

$$A_{max} = 2x^3 - 18x^2 + 36x = 2 \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)^3 - 18\left(3 - \sqrt{3}\right)^2 + 36\left(3 - \sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$$