Liceo Scientifico “Severi”

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo
Data: 27/01/2026 Classe: 4B

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$(a)\ y = arccos\frac{x-1}{x+3} \qquad (b)\ y = ln\left(1-2cos\frac{x}{2}\right) \qquad (c)\ y = arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right)$$

Soluzione

$$(a)\ y = arccos\frac{x-1}{x+3}$$

Imponiamo la condizione di esistenza della funzione arcoseno:

$$-1 \le \frac{x-1}{x+3} \le 1$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+3} \ge -1 \\ \frac{x-1}{x+3} \le 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} \left[-1;+\infty\right[$$

$$(b)\ y = ln\left(1-2cos\frac{x}{2}\right)$$

$$1 - cos\,\frac{x}{2} > 0 \rightarrow \quad D = \left]\frac{2}{3}\pi + 4k\pi; \frac{10}{3}\pi + 4k\pi\right[$$

$$(c)\ y = arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right)$$

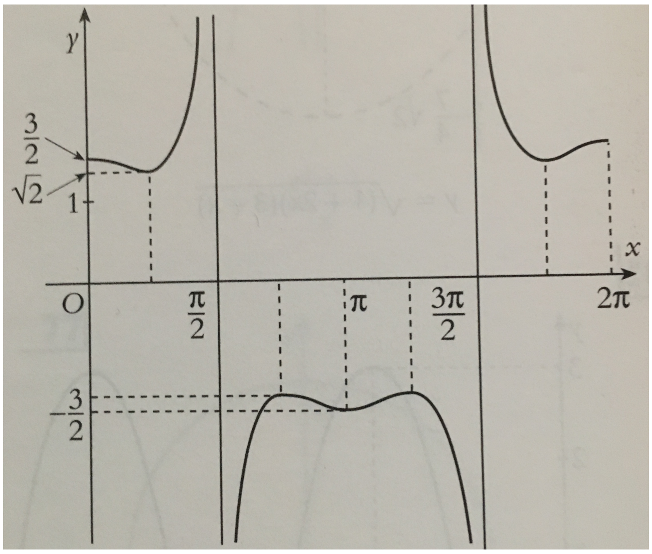
$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + lnx \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases} \rightarrow D = \left]0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$$

2. Studiare le seguenti funzioni:

$$(a)\ y=\frac{2cos^2x+1}{2cosx} \qquad (b)\ y=\frac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}\ (facoltativo)$$

Soluzione

$$(a)\ y=\frac{2cos^2x+1}{2cosx}$$



$$(b)\ y=\frac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}\ (facoltativo)$$

- *Classificazione*

Funzione goniometrica fratta (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\sqrt{3}sinx-cosx\neq 0 \xrightarrow[\text{lineare incompleta}]{\text{equazione goniometrica}} \sqrt{3}tgx-1\neq 0 \rightarrow tgx\neq\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$D=\left\{\forall x\in R: x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z\right\}$$

- *Simmetrie*

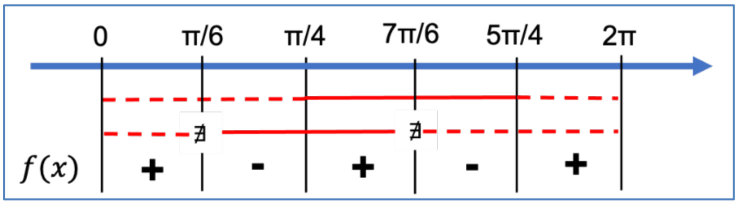
$$f(-x)=\frac{sin(-x)-cos(-x)}{\sqrt{3}sin(-x)-cos(-x)}=\frac{-sinx-cosx}{-\sqrt{3}sinx-cosx}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie (né pari, né dispari). La funzione è periodica di periodo 2π:

$$sin(x+2\pi)=sinx \quad cos(x+2\pi)=cosx$$

per cui, basta studiarla in un intervallo di ampiezza 2π. Scegliamo l'intervallo [0;2π]:

$$D = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi\right[\cup \left]\frac{7}{6}\pi; 2\pi\right]$$



- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X: \begin{cases} y = \dfrac{sinx - cosx}{\sqrt{3}sinx - cosx} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{sinx - cosx}{\sqrt{3}sinx - cosx} = 0 \rightarrow sinx - cosx = 0 \rightarrow tgx - 1 = 0 \rightarrow$$

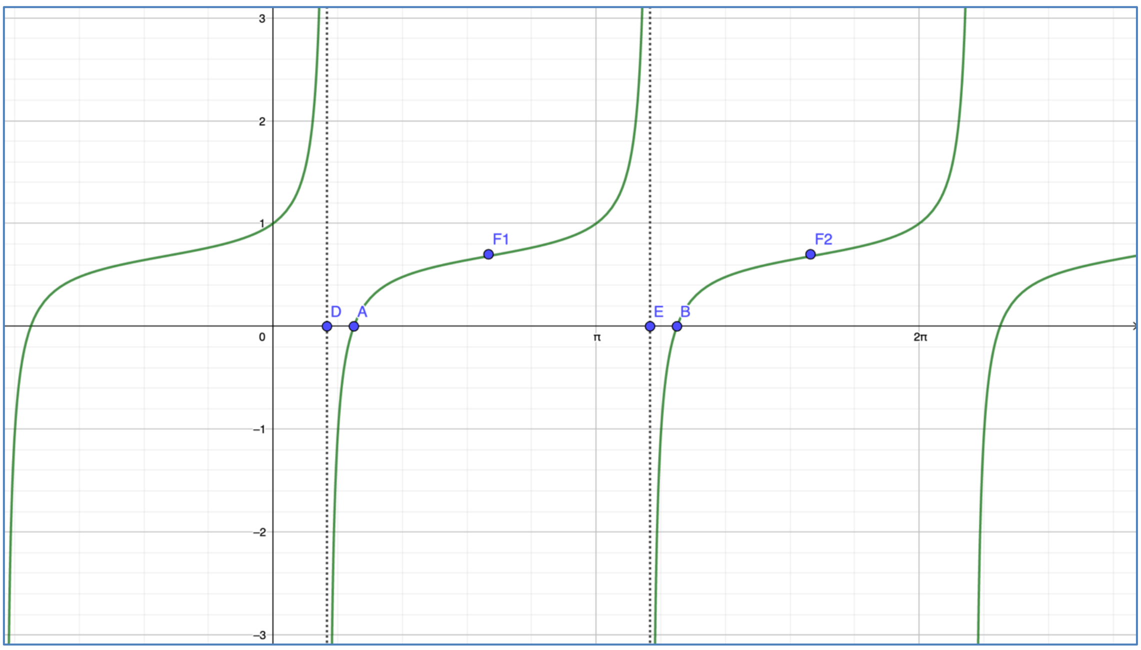
$$tgx = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{5}{4}\pi \rightarrow A = \left(\frac{\pi}{4}; 0\right) \quad B = \left(\frac{5}{4}\pi; 0\right)$$

$$Y: \begin{cases} y = \dfrac{sinx - cosx}{\sqrt{3}sinx - cosx} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow C = (0; 1)$$

- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{sinx - cosx}{\sqrt{3}sinx - cosx} > 0 \rightarrow \begin{cases} sinx - cosx > 0 \\ \sqrt{3}sinx - cosx > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5}{4}\pi \\ \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{7}{6}\pi \end{cases}$$

- *Grafico*



3. Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

$$(a)\ tg(9° + 3x) = cotg(6x - 18°)$$

$$(b)\ 2sin^2x - sinxcosx + 3cos^2x = 3 \qquad (c)\ \frac{4}{cosx} = \frac{3cosx}{sinx + 1}$$

Soluzione

$$(a)\ tg(9° + 3x) = cotg(6x - 18°)$$

La tangente goniometrica di un angolo è uguale alla cotangente dell'angolo complementare, pertanto, ha senso scrivere

$$\boldsymbol{tg\ (9° + 3x) = ctg\ [90° - (9° + 3x)] = ctg\ (81° - 3x)}$$

Quindi l'equazione data diventa

$$\boldsymbol{ctg\ (81° - 3x) = ctg\ (6x - 18°)}$$

Le cotangenti goniometriche sono uguali quando lo sono gli angoli, pertanto, ha senso scrivere

$$\boldsymbol{81° - 3x = 6x - 18° + k\ 180°}$$

Ossia

$$\boldsymbol{-3x - 6x = -81° - 18° + k\ 180° \rightarrow -9x = -99° + k\ 180° \rightarrow x = 11° - k\ 20°}$$

$$(b)\ 2sin^2x - sinxcosx + 3cos^2x = 3$$

$$2\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$$

$$2\sin^2 x - \sin x\cos x + \cancel{3\cos^2 x} - \cancel{3\cos^2 x} - 3\sin^2 x = 0$$

$$-\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$$

$$tg^2 x + tg\, x = 0 \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$tg\, x\,(tg\, x + 1) = 0$$

$$tg\, x = 0 \quad \vee \quad tg\, x = -1$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(c)\ \frac{4}{cosx} = \frac{3cosx}{sinx + 1}$$

- Imponiamo le condizioni di esistenza delle frazioni.

$$\cos(x) \neq 0$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin(x) + 1 \neq 0$$
$$\sin(x) \neq -1$$
$$x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

- Portiamo tutto a primo membro e riduciamo ad una stessa frazione.

$$\frac{4}{\cos(x)} - \frac{3\cos(x)}{\sin(x) + 1} = 0$$

$$\frac{4(\sin(x) + 1) - 3\cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x) + 1)} = 0$$

- Per cui l'equazione risultante, non più fratta, è:

$$4(\sin(x) + 1) - 3\cos^2(x) = 0$$

L'equazione che abbiamo ottenuto non è elementare.
Trasformiamo il coseno in seno con la prima relazione fondamentale della goniometria.

$$\begin{aligned} &4(\sin(x) + 1) - 3(1 - \sin^2(x)) = 0 \\ &4\sin(x) + 4 - 3 + 3\sin^2(x) = 0 \\ &3\sin^2(x) + 4\sin(x) + 1 = 0 \end{aligned} \tag{13.5}$$

Possiamo risolvere l'equazione trasformandola in una algebrica con la posizione $z = \sin(x)$

$$\begin{aligned} &3z^2 + 4z + 1 = 0 \\ &z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \frac{-2 \pm 1}{3} \end{aligned} \tag{13.6}$$

$$z_1 = \frac{-2 + 1}{3} = -\frac{1}{3} \qquad ; \qquad z_2 = \frac{-2 - 1}{3} = -1 \tag{13.7}$$

Prima equazione elementare associata.

$$\begin{aligned} &\sin(x) = -\frac{1}{3} \\ &x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ &x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{aligned} \tag{13.8}$$

Seconda equazione elementare associata.

$$\sin(x) = -1$$
$$x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad (13.9)$$

- Infine togliamo dalle soluzioni quelle indicate dalle C.E. ; in particolare il terzo insieme di soluzioni ottenuto non è soluzione dell'equazione di partenza.

La soluzione finale è:

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \qquad (13.10)$$

4. Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche:

$(a)\ 2sin^2x - sinx - 1 < 0 \qquad (b)\ 4sin^2x - 3 > 0 \qquad (c)\ \dfrac{2sinx - 1}{2sinx + 1} \geq 0$

Soluzione

$$(1)\ 2sin^2x - sinx - 1 < 0$$

Operiamo una sostituzione: poniamo $t = \sin(x)$. La disequazione trigonometrica diventa allora una disequazione di secondo grado in t: $2t^2 - t - 1 < 0$. Dopo aver svolto il procedimento, si ottiene la soluzione $-\frac{1}{2} < t < 1$ che, riscrivendo t come $\sin(x)$, può essere ricondotta al seguente sistema di disequazioni trigonometriche elementari:

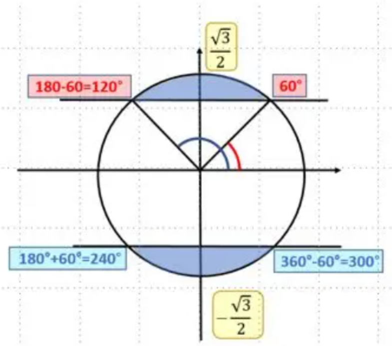
$$\begin{cases} \sin(x) > -\frac{1}{2} \\ \sin(x) < 1 \end{cases}$$

La seconda disequazione è sempre verificata, ponendo però $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (infatti $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$); invece la prima disequazione ha come soluzione $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$. In conclusione la soluzione della disequazione di partenza è data dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna delle due:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$(2)\ 4sin^2x - 3 > 0$$

$$4\text{sen}^2x - 3 = 0 \rightarrow 4\text{sen}^2x = 3$$
$$\text{sen}^2x = \frac{3}{4} \rightarrow \text{sen}x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

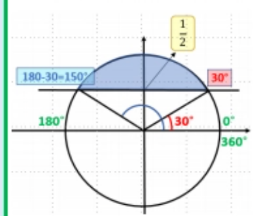
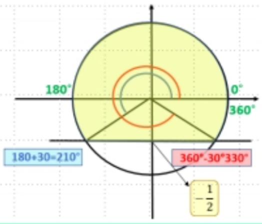


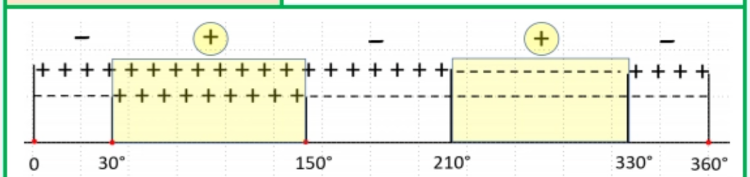
$$\text{sen}x < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{sen}x > +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Come si vede dal grafico le soluzioni sono:

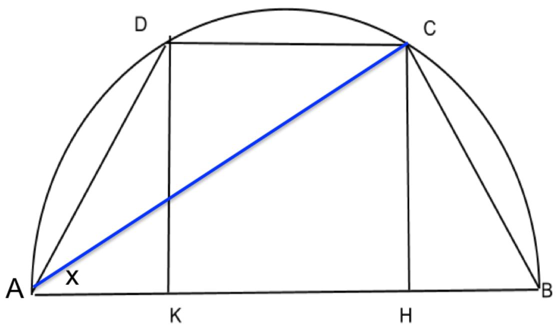
$$60° + k360° < x < 120° + k360°$$
$$240° + k360° < x < 300° + k360°$$

$$(3)\ \frac{2sinx - 1}{2sinx + 1} \geq 0$$

Bisogna studiare numeratore e denominatore separatamente. A lato lo studio del numeratore	**Numeratore** $2\text{sen}x - 1 \geq 0 \rightarrow 2\text{sen}x \geq 1 \rightarrow \text{sen}x \geq \frac{1}{2}$  $30° \leq x \leq 150°$
Studio del denominatore	**Denominatore** $2\text{sen}x + 1 > 0 \rightarrow 2\text{sen}x > -1 \rightarrow \text{sen}x > -\frac{1}{2}$  $0° \leq x < 210°$ $330° < x \leq 360°$
Come si vede dal grafico qua sotto, la disequazione è verificata dagli intervalli a destra	$\boxed{\begin{matrix} 30 \leq x \leq 150° \\ 210 < x < 330° \end{matrix}}$



5. Un trapezio convesso è inscritto in un cerchio il cui raggio misura r ed ha la base maggiore su un diametro. Determinare gli altri tre lati del trapezio, sapendo che il rapporto tra la loro somma e la base maggiore vale k=3/2.



Soluzione

Disegniamo il trapezio come in figura, con la base maggiore coincidente con il diametro della circonferenza. Il trapezio considerato è isoscele, essendo un trapezio convesso inscritto in una semicirconfenza. Tracciamo la diagonale AC, e poiniamo x=BAC l'ampiezza dell'angolo formato dalla diagonale e dalla base maggiore. Essendo il triangolo BAC inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo in C. Le relazioni trigonometriche sui triangoli rettangoli ci dicono che:

$$AC = AB\cos x = 2r\cos x \qquad BC = AB\sin x = 2r\sin x$$

Calcoliamo la misura del cateto AH del triangolo rettangolo ACH:

$$AH = AC\cos x = 2r\cos x\cos x = 2r\cos^2 x$$

Quindi. possiamo calcolare la semidifferenza tra le due basi:

$$HB = AB - AH = 2r - 2r\cos^2 x = 2r(1-\cos^2 x) = 2r\sin^2 x$$

e:

$$DC = AB - 2HB = 2r - 4r\sin^2 x = 2r(1-2\sin^2 x)$$

Quindi, la relazione indicata dal problema diventa:

$$\frac{AD+DC+CB}{AB} = \frac{3}{2} \xrightarrow{AB=2r} 2BC + DC = 3r$$

Sostituendo nella relazione le varie espressioni trovate per i lati del trapezio, otteniamo la seguente equazione:

$$2(2r\sin x) + 2r(1-sen^2 x) = 3r$$

Semplificando e risolvendo, otteniamo:

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow x = 30°$$

Per ragioni geometriche abbiamo scartato l'altra soluzione x=150°.

6. Problema - Di un triangolo ABC sono noti:

$$a = 3 + \sqrt{3} \qquad \beta = 45° \qquad \gamma = 60°$$

Calcola i lati b e c e le loro proiezioni sul lato a.

Soluzione

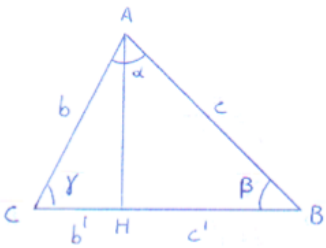
$a = 3 + \sqrt{3}$

$\beta = 45°$

$\gamma = 60°$

$b, c = ?$

$b', c' = ?$



$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 75°$

$\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \qquad b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$

$b = \dfrac{(3+\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{2(2\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3})}{4}$

$b = (\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 3 - 3 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$b' = b\cos\gamma = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

$\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin\beta} \qquad c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \dfrac{2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$c' = c\cos\beta = 3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 3$