Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo
Data: 27/01/2026 Classe: 4B

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$(a)\ y = arcsin\dfrac{2}{x+2}$ $\qquad (b)\ y = log_3(tgx + 3ctgx - 4)$ $\qquad (c)\ y = e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}$

Soluzione

$$(a)\ y = arcsin\frac{2}{x+2}$$

Imponiamo la condizione di esistenza della funzione arcoseno:

$$-1 \le \frac{2}{x+2} \le 1$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+2} \ge -1 \\ \dfrac{2}{x+2} \le 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} \left]-\infty;-4\right] \cup \left[0;+\infty\right[$$

$$(b)\ y = log_3(tgx + 3ctgx - 4)$$

$$\begin{cases} tgx + 3ctgx - 4 > 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \rightarrow\ D = \left]k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right[\vee \left]2arctg\frac{\sqrt{10}-1}{3}; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

$$(c)\ y = e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}$$

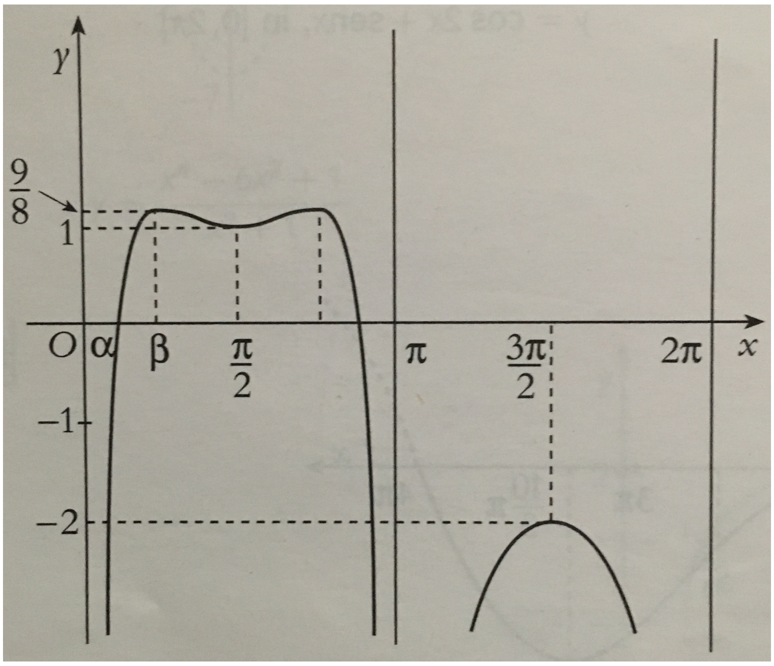
$$x \neq 0 \rightarrow\ D =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

2. Studiare le seguenti funzioni:

$$(a)\ f(x)=\frac{3sinx-1}{2sin^2x} \qquad (b)\ y=\frac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}\ (facoltativo)$$

Soluzione

$$(1)\ f(x)=\frac{3sinx-1}{2sin^2x}$$



$$(b)\ y=\frac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}\ (facoltativo)$$

- *Classificazione*

Funzione goniometrica fratta (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\sqrt{3}sinx-cosx\neq 0 \xrightarrow[lineare\ incompleta]{equazione\ goniometrica} \sqrt{3}tgx-1\neq 0 \rightarrow tgx\neq\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$D=\left\{\forall x\in R: x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z\right\}$$

- *Simmetrie*

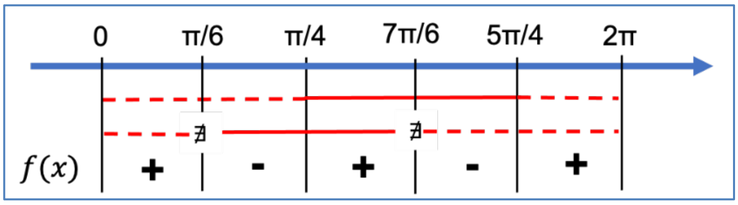
$$f(-x)=\frac{sin(-x)-cos(-x)}{\sqrt{3}sin(-x)-cos(-x)}=\frac{-sinx-cosx}{-\sqrt{3}sinx-cosx}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie (né pari, né dispari). La funzione è periodica di periodo 2π:

$$sin(x+2\pi)=sinx \quad cos(x+2\pi)=cosx$$

per cui, basta studiarla in un intervallo di ampiezza 2π. Scegliamo l'intervallo [0;2π]:

$$D=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6};\frac{7}{6}\pi\right[\cup\left]\frac{7}{6}\pi;2\pi\right]$$



- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X:\begin{cases} y=\dfrac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \frac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}=0 \rightarrow sinx-cosx=0 \rightarrow tgx-1=0 \rightarrow$$

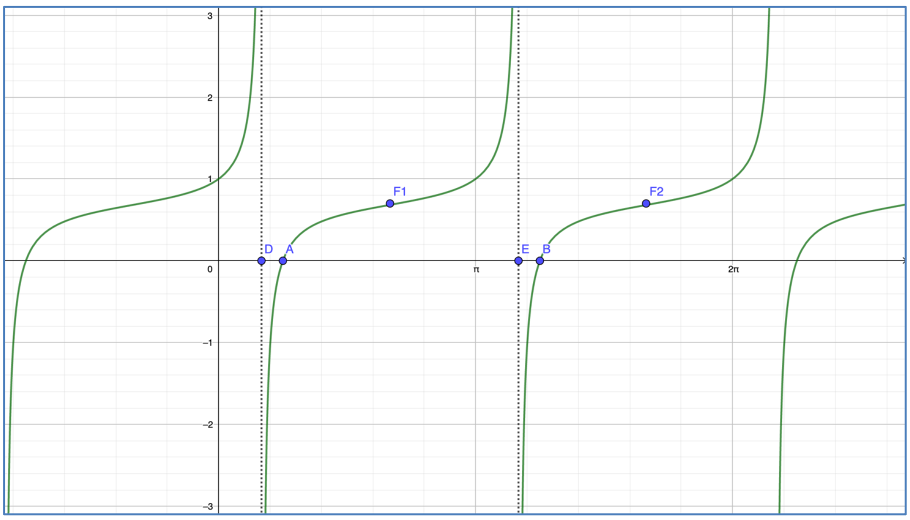
$$tgx=1 \rightarrow x=\frac{\pi}{4};x=\frac{5}{4}\pi \rightarrow A=\left(\frac{\pi}{4};0\right) \quad B=\left(\frac{5}{4}\pi;0\right)$$

$$Y:\begin{cases} y=\dfrac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}=1 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow C=(0;1)$$

- *Segno della funzione*

$$f(x)>0 \rightarrow \frac{sinx-cosx}{\sqrt{3}sinx-cosx}>0 \rightarrow \begin{cases} sinx-cosx>0 \\ \sqrt{3}sinx-cosx>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5}{4}\pi \\ \dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{7}{6}\pi \end{cases}$$

- *Grafico*



3. Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

$$(a)\ sin(5x - 8°) = cos(-3x + 18°)$$

$$(b)\ sinx - \sqrt{3}cosx + 1 = 0 \qquad (c)\ \frac{1 - cos2x}{\sqrt{2}sinx} = \frac{sin2x}{1 + cos2x}$$

Soluzione

$$(a)\ sin(5x - 8°) = cos(-3x + 18°)$$

Ricordando che il coseno di un angolo è uguale al seno dell'angolo complementare oppure il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare, ossia

$$\boldsymbol{cos\ x = sen\ (90° - x)}$$

oppure

$$\boldsymbol{sen\ x = cos\ (90° - x)}$$

Quindi essendo vera la seguente relazione

$$\boldsymbol{cos\ (-3x + 18°) = sen\ [90° - (-3x + 18°)]}$$

Cioè

$$\boldsymbol{cos\ (-3x + 18°) = sen\ (72° + 3x)}$$

L'equazione data si può scrivere, ad esempio, nel seguente modo

$$\boldsymbol{sen\ (5x - 8°) = sen\ (72° + 3x)}$$

I seni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando uno è il supplementare dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$\boldsymbol{5x - 8° = 72° + 3x + k\,360° \rightarrow 5x - 3x = 72° + 8 + k\,360°}$$

Ossia

$$\boldsymbol{2x = 80° + k\,360° \rightarrow x = 40° + k\,180°}$$

Inoltre, per quanto riguarda la seconda possibilità si ha

$$\boldsymbol{5x - 8° = 180° - (72° + 3x) + k\,360° \rightarrow 5x - 8° = 180° - 72° - 3x + k\,360°}$$

Ossia

$$\boldsymbol{5x + 3x = 180° - 72° + 8° + k\,360° \rightarrow 8x = 116° + k\,380° \rightarrow x = 14,5° + k\,45°}$$

$$(b)\ sinx - \sqrt{3}cosx + 1 = 0$$

- Cominciamo verificando se $x = \pi$ è soluzione dell'equazione data.

$$\begin{aligned} \sin(\pi) - \sqrt{3}\cos(\pi) + 1 = \\ 0 - \sqrt{3}\cdot(-1) + 1 \neq 0 \end{aligned} \tag{8.8}$$

  Non è soluzione.

- Sostituiamo al seno e coseno le loro espressioni con le formule parametriche.

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2} + 1 = 0 \\ \frac{2t - \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2 + 1 + t^2}{1+t^2} = 0 \\ t^2(1+\sqrt{3}) + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0 \end{aligned} \tag{8.9}$$

- Risolviamo l'equazione algebrica in t.

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}}{2(1+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-3)}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} = -1 \\ t_2 &= \frac{-1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})} = \frac{(-1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{(1-3)} = \frac{-4+2\sqrt{3}}{-2} = 2-\sqrt{3} \end{aligned} \tag{8.11}$$

- Prima equazione nella tangente.

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \quad ; \quad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \tag{8.12}$$

  Seconda equazione nella tangente.

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2-\sqrt{3} \quad ; \quad \arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12} \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \tag{8.13}$$

  La soluzione complessiva è l'unione delle due soluzioni.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \tag{8.14}$$

$$(c)\ \frac{1-cos2x}{\sqrt{2}sinx}=\frac{sin2x}{1+cos2x}$$

$\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ $\qquad \sin x \neq 0 \qquad \cos 2x \neq -1$

$1-\cos^2 2x=\sqrt{2}\sin 2x \sin x$

$\sin^2 2x-\sqrt{2}\sin 2x \sin x=0$

$\sin 2x\,(2\sin x \cos x-\sqrt{2}\sin x)=0$

$\sin 2x \cdot \sin x \cdot (2\cos x-\sqrt{2})=0$

$2\sin^2 x \cos x\,(2\cos x-\sqrt{2})=0$

$\cos x=0 \quad \vee \quad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \vee \quad x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$

non accett.

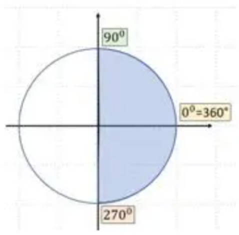
4. Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche:

$(a)\ sinx-\sqrt{3}cosx<0 \qquad (b)\ 2cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1<0 \qquad (c)\ \frac{2sinx-1}{2sinx+1}\geq 0$

Soluzione

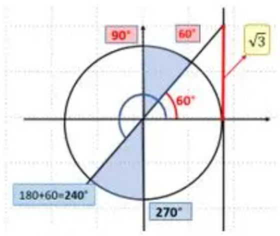
$$(1)\ sinx-\sqrt{3}cosx<0$$

$$\cos x\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x}\right)<0$$



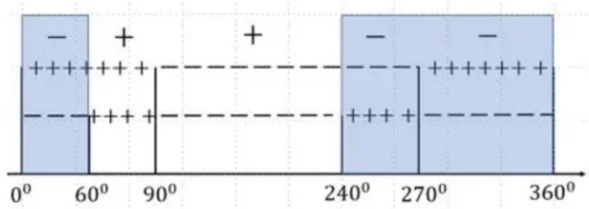
$\cos x>0$

$0°<x<90°$
$270°<x<360°$



$\operatorname{tg}x-\sqrt{3}>0 \rightarrow \operatorname{tg}x>\sqrt{3}$

$60°<x<90°$
$240°<x<270°$



$0°<x<60°$
$240°<x<360°$

$$(b)\ 2cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1<0$$

Operiamo una sostituzione: poniamo $t = x - \frac{\pi}{3}$. La disequazione diventa la seguente:

$$2\cos(t)-1<0 \quad \Rightarrow \quad \cos(t)<\frac{1}{2}$$

L'ultima è una disequazione trigonometrica elementare in t, che ha come soluzione

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<t<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

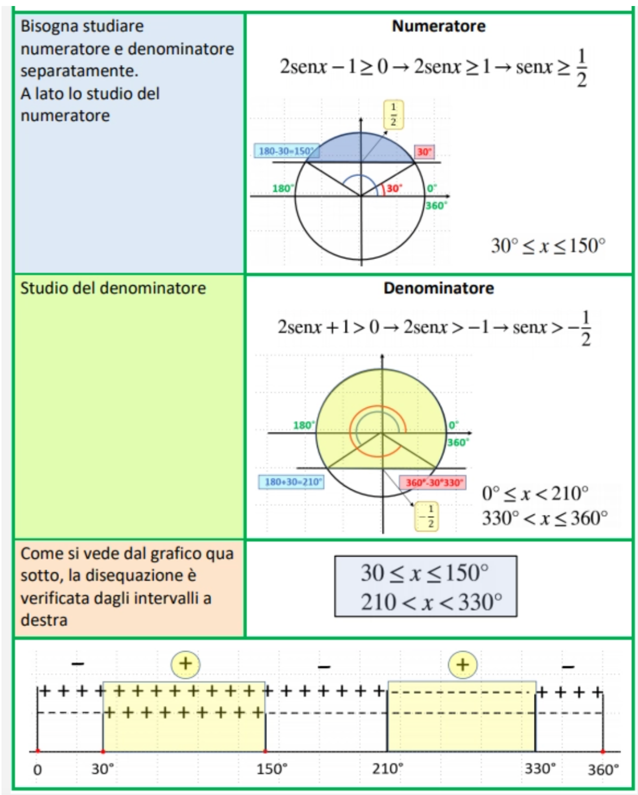
Ripercorrendo "al contrario" la sostituzione che abbiamo fatto abbiamo

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

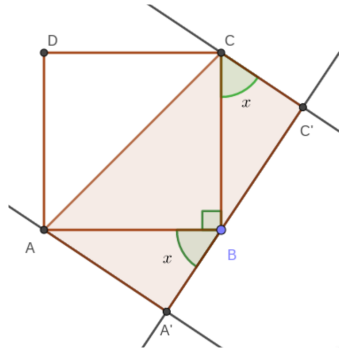
e quindi

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<2\pi+2k\pi.$$

$$(c)\ \frac{2sinx-1}{2sinx+1}\geq 0$$



5. Problema - Dato il quadrato ABCD di lato a, sia r una retta passante per B e non intersecante altri punti del quadrato. A′ e C′ sono le proiezioni su r, rispettivamente, di A e C. Determina l'angolo $A'\hat{B}A = x$ in modo che l'area del trapezio $A'ACC'$ sia $\frac{3}{4}a^2$.



Soluzione

Trattandosi di un trapezio, deve essere:

$$\boxed{\frac{\overline{AA'}+\overline{CC'}}{2}\,\overline{A'C'}=\frac{3}{4}a^2}$$

ossia:

$$\boxed{\frac{a\sin(x)+a\cos(x)}{2}(a\cos(x)+a\sin(x))=\frac{3}{4}a^2}$$

da cui:

$$\boxed{a^2\left(\sin(x)\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{4}a^2}$$

ossia:

$$\boxed{a^2\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\frac{3}{4}a^2}$$

da cui:

$$\boxed{a^2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}a^2\,.}$$

Essendo $a>0$ e $0<x<\frac{\pi}{2}$, deve necessariamente essere:

$$\boxed{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}\quad\vee\quad x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}}$$

ossia le due soluzioni riportate sul libro:

$$\boxed{x=\frac{\pi}{12}\quad\vee\quad x=\frac{5\pi}{12}}$$

6. Problema - Di un triangolo ABC sono noti:

$$a=3+\sqrt{3}\qquad\beta=45°\qquad\gamma=60°$$

Calcola i lati b e c e le loro proiezioni sul lato a.

Soluzione

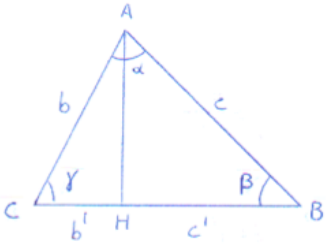
$a = 3 + \sqrt{3}$

$\beta = 45°$

$\gamma = 60°$

$b, c = ?$

$b', c' = ?$



$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 75°$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$

$b = \frac{(3+\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3})}{4}$

$b = (\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 3 - 3 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$b' = b \cos\gamma = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$c' = c \cos\beta = 3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 3$