

# FISICA

## Teoria della relatività ristretta

*Autore: **prof. Pappalardo Vincenzo***

*docente di **Matematica e Fisica***



# Relatività dello spazio e del tempo

## IL PERCORSO VERSO LA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

Verso la fine del XIX secolo la maggior parte degli studiosi era convinta che le leggi fondamentali della fisica fossero state ormai scoperte: *"In fisica non c'è nulla di nuovo da scoprire ormai"* dichiarava Lord Kelvin nel 1900.

- Le equazioni della **meccanica newtoniana** spiegavano con successo il moto degli oggetti sulla Terra e nei cieli.
- L'interpretazione teorica dei principali aspetti fisici del mondo macroscopico era poi completata dalle **equazioni di Maxwell**, che avevano riunito in un'unica teoria i fenomeni elettrici e magnetici, e avevano consentito di riconoscere la natura elettromagnetica della luce.

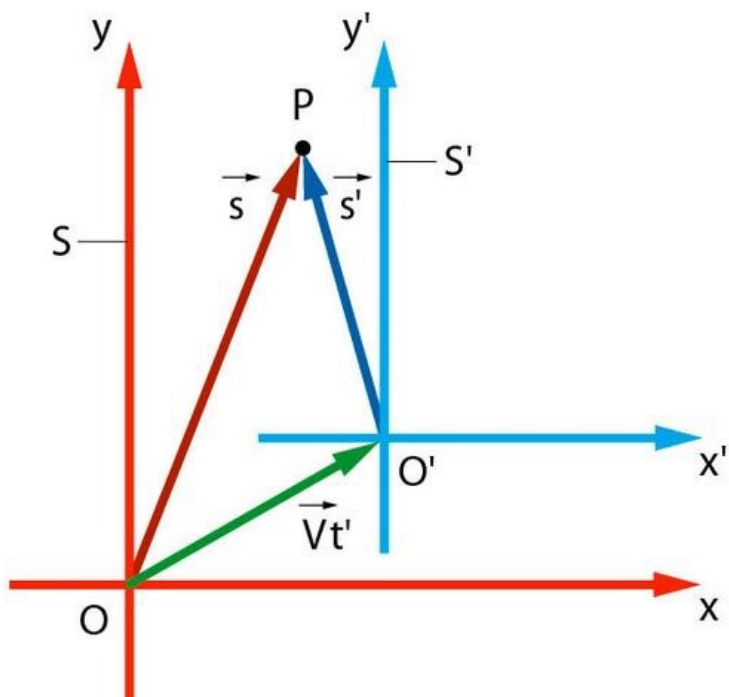
Però, nelle fondamenta della fisica classica avevano cominciato ad aprirsi delle crepe. In particolare, i due gruppi di equazioni, quelle di Maxwell e di Newton, cominciavano a mostrare delle fondamentali contraddizioni:

- ✓ Nella meccanica newtoniana ogni mutua azione si manifesta istantaneamente (azione a distanza), qualunque sia la distanza fra i corpi interagenti, mentre le forze elettromagnetiche descritte dalle equazioni di Maxwell si propagano con una velocità finita, corrispondente a quella della luce.
- ✓ Gli scienziati, per quanto si sforzassero, non riuscivano a trovare nessuna prova del moto della Terra attraverso l'ipotetico etere, introdotto da Maxwell, per spiegare la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

- ✓ La luce è un'onda elettromagnetica trasversale che si propaga anche nel vuoto, dove raggiunge la sua massima velocità  $c=299792458\text{ms}$ . Dalle equazioni di Maxwell si deduce per via teorica il valore numerico di  $c$ , che risulta lo stesso in tutti i sistemi di riferimento, qualunque sia la loro velocità relativa. Ossia:

Per l'elettromagnetismo la velocità della luce è un'invariante, cioè una grandezza che non dipende dal sistema di riferimento in cui è prodotta o misurata.

Ciò è in completo disaccordo con le previsioni della meccanica classica e, in particolare, con le trasformazioni di Galileo:



## TRASFORMAZIONI DI GALILEO

$$\begin{cases} \vec{s} = \vec{s}' + \vec{V}t' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{s}' = \vec{s} - \vec{V}t \\ t' = t \end{cases}$$

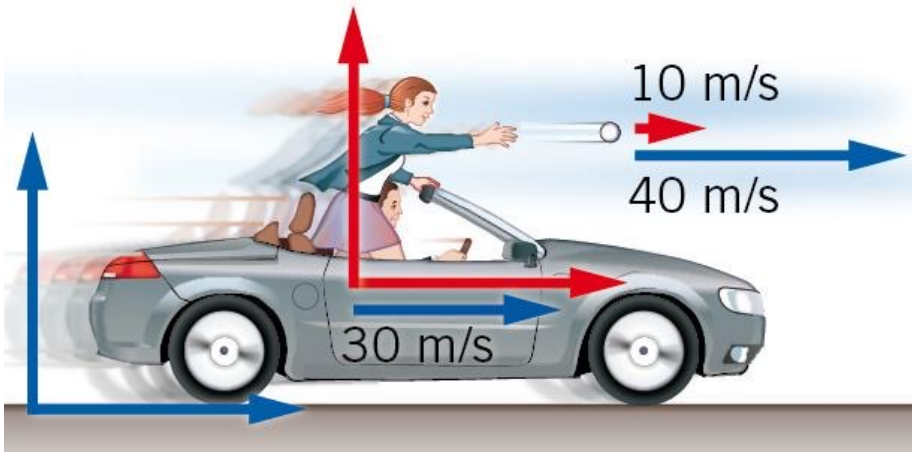
Conoscendo le grandezze misurate in  $S'$  è possibile calcolare le corrispondenti grandezze di  $S$ , e viceversa.

## TRASFORMAZIONI DELLE VELOCITA'

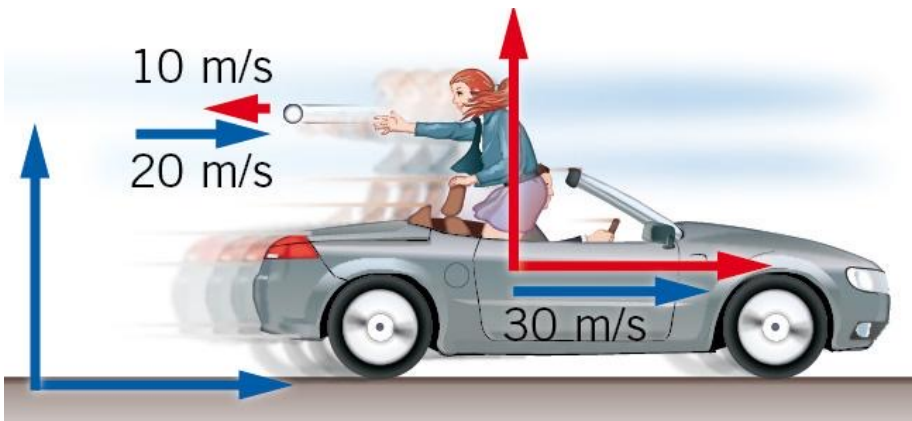
La velocità  $\vec{v}$  di un oggetto rispetto ad  $S$  è data dalla velocità  $\vec{v}'$  dello stesso oggetto rispetto a  $S'$ , sommata con la velocità  $\vec{V}$  di  $S'$  rispetto a  $S$ :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

## esempio



Se la palla è lanciata in avanti, la sua velocità rispetto al sistema di riferimento dell'autostrada è  $30+10=40$  m/s



Se la palla è lanciata all'indietro, la sua velocità misurata nel sistema di riferimento dell'autostrada è  $30-10=20$  m/s



Per la luce le cose vanno diversamente: secondo la teoria di Maxwell, la luce è un'invariante, per cui la luce emessa in avanti e all'indietro da un'astronave ha sempre velocità  $c$ , qualunque sia la velocità con cui l'astronave si muove.



In questa situazione:

due delle teorie fondamentali della fisica classica,  
la meccanica e l'elettromagnetismo, risultano in  
contraddizione tra loro.

Quale delle due teorie deve essere modificata?

Entrambe le teorie hanno un vasto campo di applicabilità; entrambe possiedono una struttura concettuale solida e coerente; entrambe sono in accordo con un numero enorme di esperimenti.

Per decidere qual è la teoria da modificare occorre sapere quale delle due fa la previsione giusta riguardo alle proprietà della velocità della luce nel vuoto.

## L'ESPERIMENTO DI MICHELSON-MORLEY

La storia della relatività comincia nel 1632, allorché Galileo formulò il seguente principio

### PRINCIPIO DI RELATIVITA' GALILEIANA

Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, qualunque sia la velocità (costante) con cui essi si muovono gli uni rispetto agli altri.



Cosa significa? Nessun esperimento di meccanica compiuto all'interno dell'astronave ci consente di capire se siamo fermi oppure ci stiamo muovendo di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

Tutto ciò portava ad una domanda per Einstein: la luce si comporta nello stesso modo?

Ai tempi di Einstein la maggior parte degli scienziati aderiva alla teoria ondulatoria proposta da Huygens e confermata da parecchi esperimenti (interferenza e diffrazione). Maxwell aveva contribuito a consacrare la teoria ondulatoria quando, attraverso le sue equazioni, aveva previsto l'esistenza di onde elettromagnetiche che si propagano a  $300.000 \text{ km/s}$ , che è proprio la velocità con cui si propaga la luce. Quindi la luce è un'onda elettromagnetica.

Tutto ciò sollevava alcuni grandi interrogativi:

1. qual era il mezzo che consentiva la propagazione di queste onde?
2. La loro velocità di  $300.000 \text{ km/s}$  era una velocità relativa a che cosa?

Parve che la risposta dovesse essere che le onde luminose si propagassero attraverso un mezzo, chiamato **etere**, e che la loro velocità era relativa all'etere.

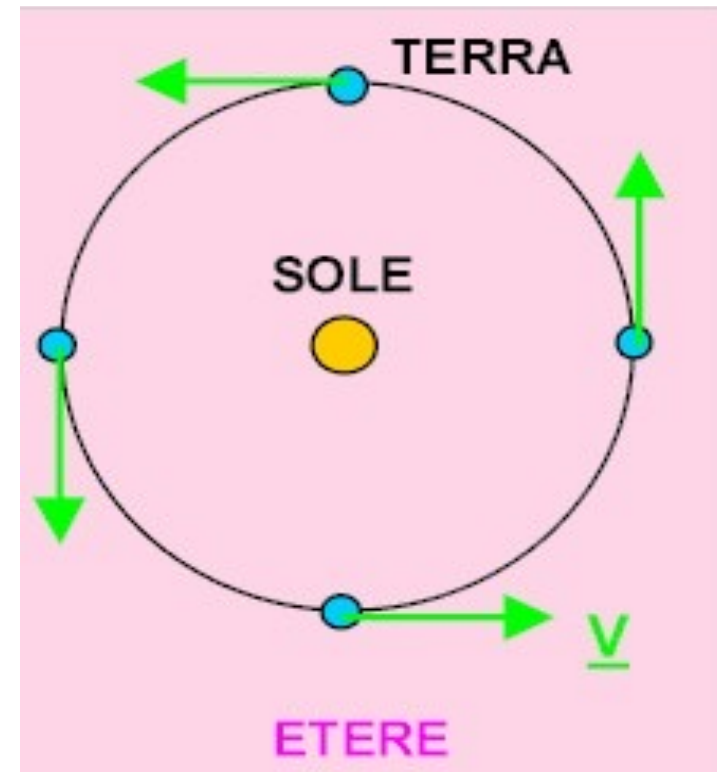
In sostanza, l'etere era per le onde luminose qualcosa di simile a ciò che l'aria era per le onde sonore, e l'idea dell'esistenza di questo mezzo universale penetrante ovunque, così da riempire ogni spazio all'interno e all'esterno dei corpi materiali era saldamente radicata nella fisica fino alla fine del XIX secolo.

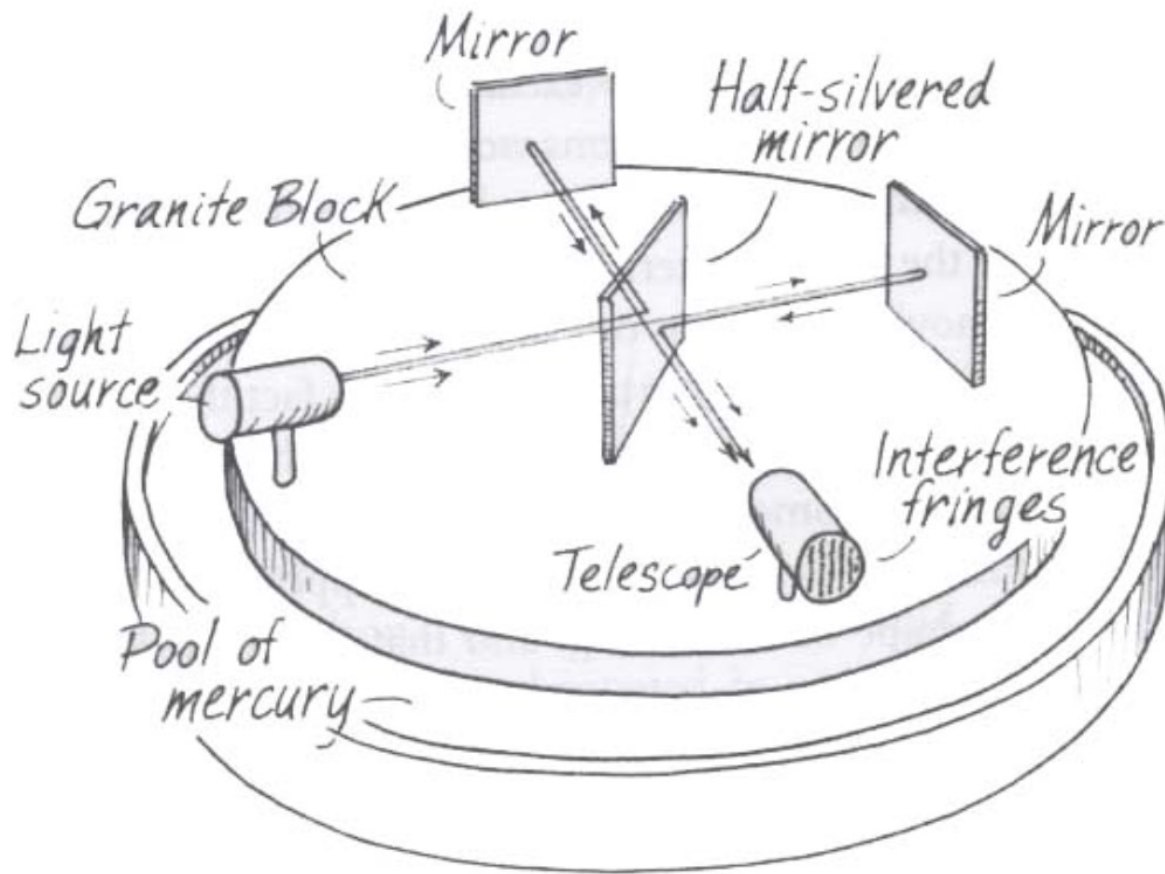
Se l'etere esiste, allora le equazioni dell'elettromagnetismo devono essere valide in un solo sistema di riferimento privilegiato (assoluto), quello in cui l'etere è in quiete.

Per verificare questa ipotesi occorre rilevare il cosiddetto "vento d'etere", ossia il moto della Terra attraverso l'etere.

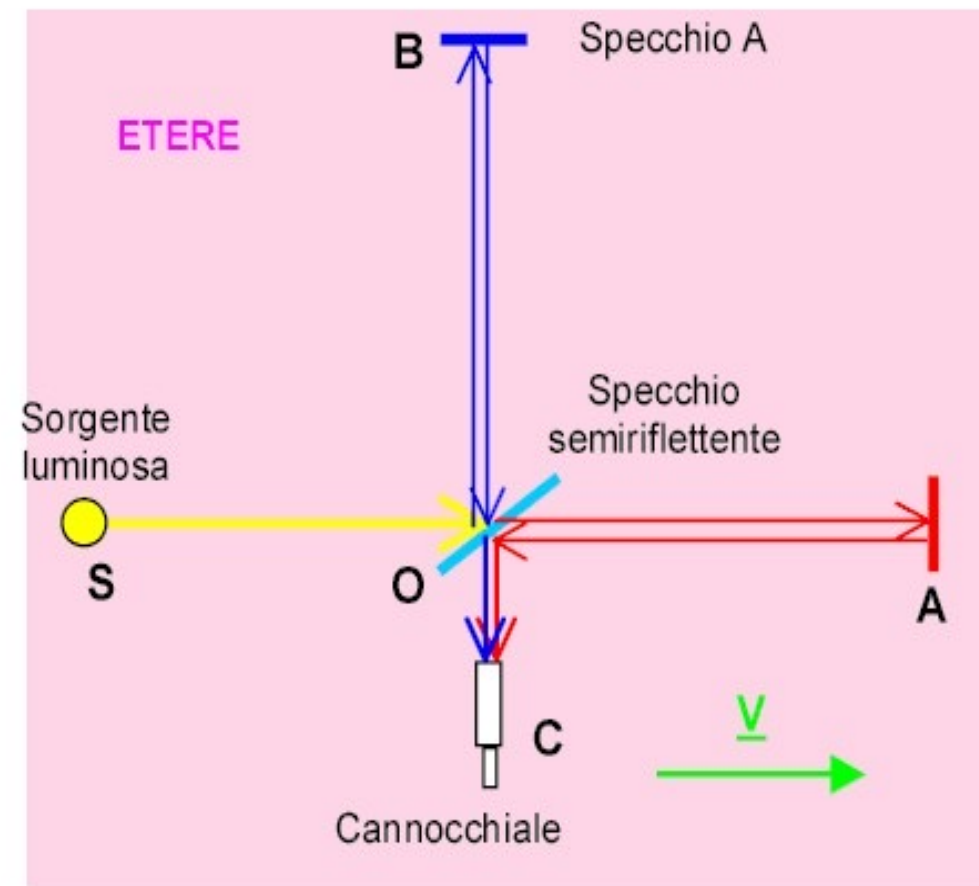
L'esperimento più famoso fu progettato e condotto nel 1887 dal fisico americano Michelson (1852-1931; Premio Nobel) e dal suo assistente Morley (1838- 1923), con il quale volevano dimostrare l'effetto del movimento della Terra nello spazio sulla velocità della luce misurata alla superficie terrestre.

Infatti, la Terra si muove nello spazio intorno al Sole alla velocità di 30 km/s, dovrebbe, quindi, esistere una sorta di vento dovuto all'etere cosmico sulla superficie terrestre.





L'apparato fu montato su una piattaforma di marmo galleggiante in una vasca contenente del mercurio, allo scopo di poter agevolmente rotare il sistema attorno al suo asse senza troppe scosse.



Un fascio di luce emesso dalla lampada S veniva fatto incidere su uno specchio semiriflettente O: circa la metà della luce incidente veniva riflessa sullo specchio B, mentre l'altra metà, subì una rifrazione in O, veniva riflessa dallo specchio A, posto alla stessa distanza di B dal centro della piattaforma.

Il raggio riflesso dallo specchio B, dopo aver attraversato O, veniva raccolto in C da un cannocchiale, mentre quello riflesso da A, attraversando O, subiva un'altra riflessione per essere raccolto anch'esso in C.

- Se non soffiassse il vento d'etere questi due raggi giungerebbero in fase al cannocchiale e darebbero luogo ad un fenomeno d'interferenza costruttiva.
- Se, invece, il vento soffiassse (per esempio da sinistra a destra), il raggio che si propaga nella direzione opposta giungerebbe al cannocchiale in ritardo rispetto a quello che si propaga nella stessa direzione e si dovrebbe osservare almeno una parziale interferenza distruttiva.

I risultati furono negativi. La teoria dell'etere si rivelava inadatta a descrivere il comportamento della luce.



## LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Tra il 1892 e 1904, il fisico olandese Lorentz (1853-1928) elaborava una teoria elettrodinamica dei corpi carichi in moto. In questa teoria si trovava la prima articolata proposta di spiegazione del fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley.

Secondo Lorentz, che credeva nell'etere, il vento d'etere (ossia il movimento rispetto all'etere in quiete assoluta), doveva produrre i seguenti effetti:

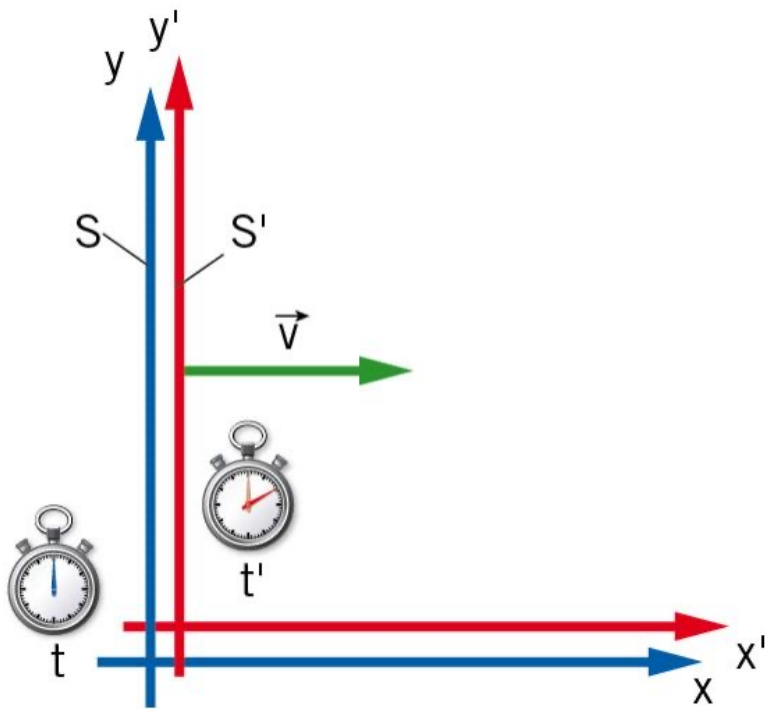
- ✓ accorciamento dei corpi lungo la direzione del vento che alterava i tempi di percorso della luce entro l'apparato di Michelson e Morley in modo da nascondere completamente l'effetto cercato (l'etere risultava completamente inosservabile).
- ✓ alterazione del ritmo degli orologi.

Lorentz continua ad asserire l'esistenza dell'etere e di un sistema di riferimento privilegiato ancorato all'etere anche se non rilevabile attraverso gli esperimenti.

Da questa analisi Lorentz dedusse delle nuove trasformazioni che tengono conto del moto rispetto all'etere. Queste *Trasformazioni di Lorentz*, scritte prima che Einstein sviluppasse la teoria della relatività, descrivono correttamente gli effetti relativistici come la contrazione delle lunghezze e la dilatazione del tempo.

Lorentz aveva dimostrato che sotto le sue trasformazioni le equazioni dell'elettromagnetismo (e quindi anche la velocità  $c$  della luce che da esse si ricava) rimangono invarianti nel passare da un sistema di riferimento a un altro in moto relativo.

## Trasformazioni di Lorentz



dove:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$
$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

- $\gamma$  è il fattore di Lorentz
- $v$  è la velocità relativa tra l'osservatore e l'oggetto
- $c$  è la velocità della luce.

Le trasformazioni di Lorentz, è vero che descrivono correttamente gli effetti relativistici, ma furono considerate dal loro stesso autore e dagli altri fisici dell'epoca più che altro un divertente esercizio matematico.

Ci volle il genio di Einstein per comprendere che le trasformazioni di Lorentz corrispondono effettivamente alla realtà delle cose e che era necessaria una drastica modifica dei vecchi concetti intuitivi a proposito dello spazio, del tempo e del movimento.

Non solo

Alla base della teoria della relatività c'era anche l'abbandono del concetto di etere.

## I POSTULATI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

Nel 1905, a 26 anni, Einstein pubblicò sulla rivista scientifica tedesca *Annalen der Physik*, il seguente articolo:  
**Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento.**

Questo lavoro costituì il primo atto ufficiale della teoria della relatività, una delle più profonde e sconvolgenti rivoluzioni nel mondo della fisica e del pensiero umano.

Vediamo in che modo Einstein superò la contraddizione tra meccanica ed elettromagnetismo.

Se non esiste un etere che riempie tutto l'Universo, non ci può essere un moto assoluto, poiché non ha senso un movimento riferito al nulla. Secondo Einstein si può parlare solo di moti di un corpo materiale rispetto ad un altro o di un sistema di riferimento rispetto ad un altro sistema di riferimento.

All'inizio del 1905 Einstein aveva cominciato a fare affidamento sulla deduzione più che sull'induzione (metodo scientifico galileiano) per giungere all'elaborazione della sua teoria:

"A poco a poco incominciai a disperare della possibilità di scoprire le vere leggi attraverso tentativi basati su fatti noti. Quanto più a lungo e disperatamente provavo, tanto più mi convincevo che solo la scoperta di un principio formale universale avrebbe potuto portarci a risultati sicuri"

Ora che Einstein aveva deciso di costruire la sua teoria procedendo per deduzione, ossia deducendola da postulati generali, bisognava fare una scelta:

quali postulati assumere come assunti fondamentali di principio per la teoria tali da superare la dicotomia tra meccanica ed elettromagnetismo?

I postulati che Einstein assunse come base per la sua *Teoria della relatività speciale o ristretta*, valida nel caso di sistemi in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, sono i seguenti:

### **PRIMO POSTULATO**

**Principio di relatività ristretta:** Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

### **SECONDO POSTULATO**

**Principio di invarianza della velocità della luce:** La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal moto del sistema stesso o della sorgente, da cui è emessa la luce, rispetto all'osservatore.

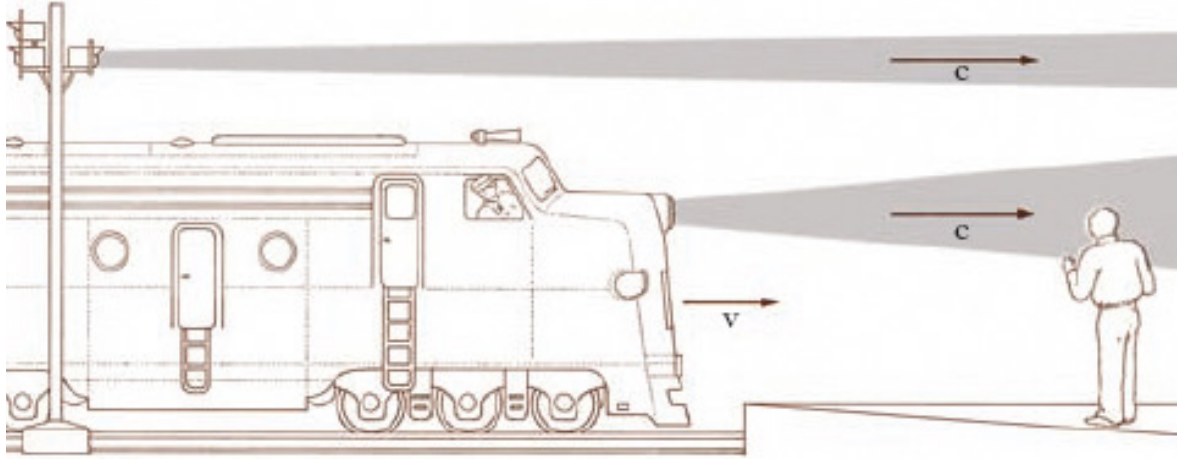
- Il primo enunciato rappresenta l'estensione del principio di relatività anche ai fenomeni elettromagnetici, ed include tutte le leggi della fisica (il principio di relatività galileiano riguardava solo le leggi della meccanica).
- Il secondo postulato è coerente con il primo: le equazioni di Maxwell non potrebbero avere la stessa forma in tutti i sistemi inerziali se la velocità della luce non fosse una costante universale. Inoltre, se la costanza della velocità della luce non dipende dallo stato di moto del corpo che la emette, l'introduzione di un etere necessario per la sua propagazione è superflua.

Alla luce della relatività ristretta, le premesse dell'esperimento di Michelson e Morley si rivelarono errate.



## LA RELATIVITA' DELLA SIMULTANEITA'

Però, il postulato della luce sembrava incompatibile con il principio di relatività.



Immaginiamo che un raggio di luce venga inviato da un faro lungo la banchina di una linea ferroviaria.

Un uomo fermo sulla banchina, ossia nello stesso sistema di riferimento del faro, misurerà per la luce una velocità di 300.000 km/s.

Se il raggio di luce venisse inviato dal faro di un treno che viaggi a 3000 km/s, ci aspetteremmo che l'uomo misuri, per il principio di relatività, una velocità di 303.000 km/s per la luce, superiore a quella precedente.

Combinando il postulato della luce con il principio di relatività, ne derivava che un osservatore avrebbe misurato sempre la stessa velocità qualunque fosse stato il moto dell'osservatore o della sorgente.

## Come superare l'apparente incompatibilità?

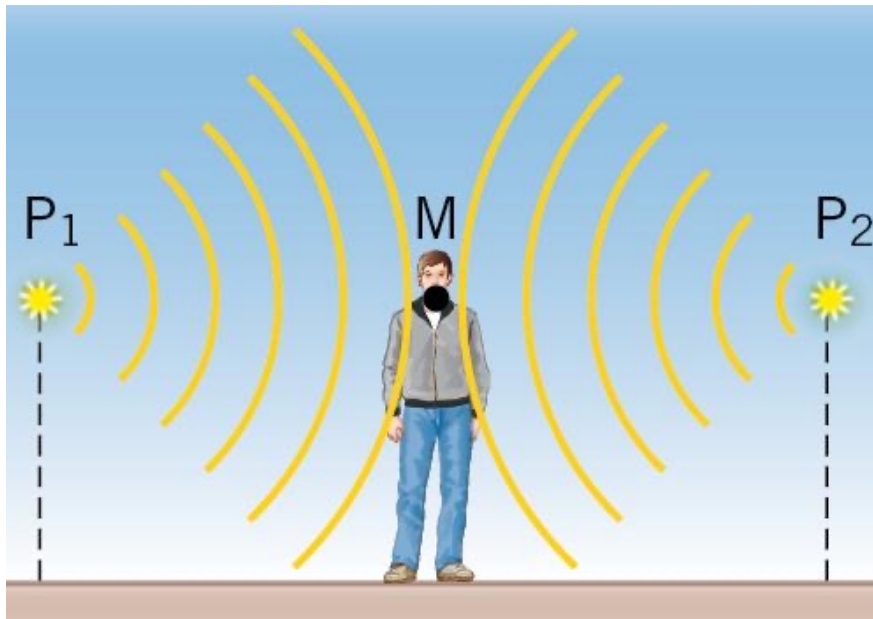
Einstein, attraverso uno dei più eleganti ed audaci balzi di immaginazione della storia della fisica e della scienza in generale, si accorse che bisognava modificare drasticamente le idee sullo spazio e sul tempo che da secoli erano considerati due enti del tutto indipendenti e che, nei suoi *Principia*, Newton così scriveva:

- ✓ *Lo spazio assoluto, per sua natura, resta sempre tale e invariabile senza alcuna relazione con l'esterno;*
- ✓ *Il tempo assoluto, vero e matematico, per sua natura scorre allo stesso modo, senza alcuna relazione con l'esterno.*

La teoria della relatività ristretta fece crollare non solo l'esistenza di uno spazio e di un tempo assoluti, ma anche il loro carattere di enti indipendenti.

Einstein analizzò in modo critico l'idea del tempo assoluto che scorre immutabile ed è identico in tutti i sistemi di riferimento, partendo dallo studio del concetto di **simultaneità**.

Ma cosa intendiamo operativamente per simultaneità?

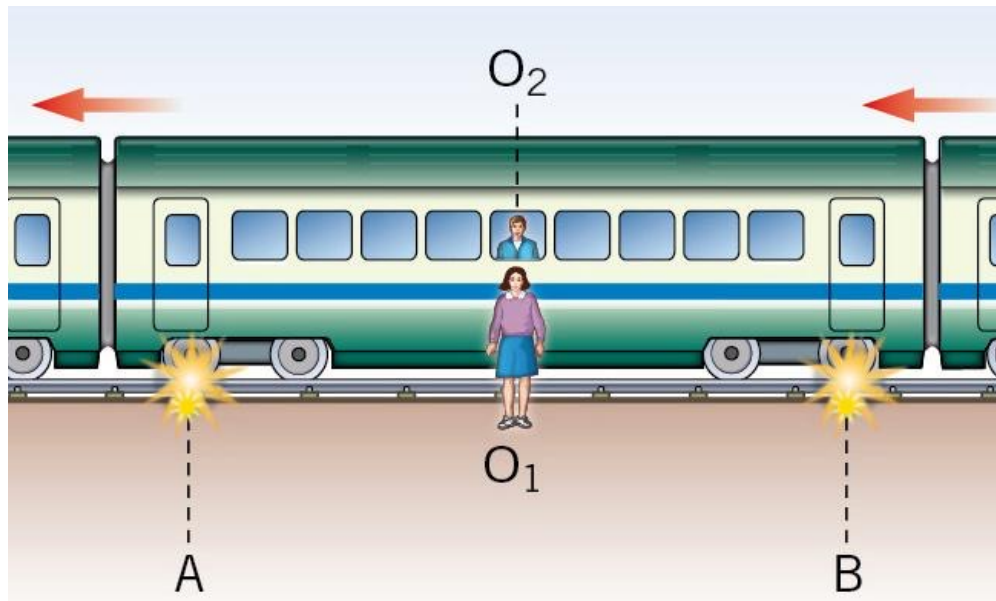


I due lampi sono emessi simultaneamente da  $P_1$  e  $P_2$  se giungono nello stesso istante in M equidistante dai punti di emissione  $P_1$  e  $P_2$ .

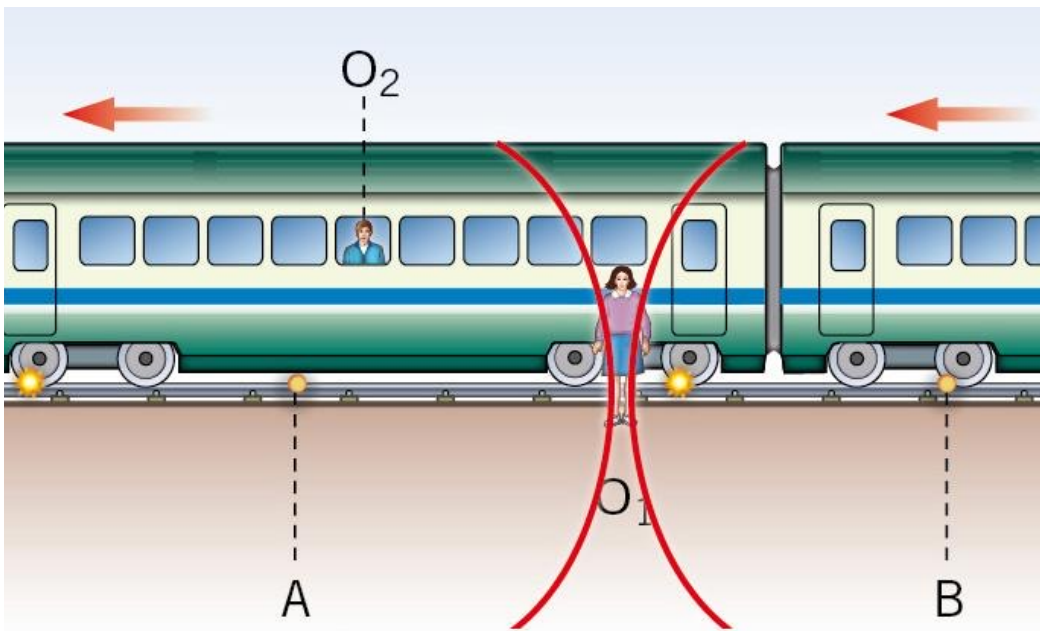
L'intuizione decisiva fu che due eventi i quali sembrano essere simultanei a un osservatore non appariranno tali a un altro osservatore che si muove rapidamente rispetto al primo.

E non c'è modo di dire quale osservatore ha ragione. **In altre parole non c'è modo di dire che i due eventi sono veramente simultanei.**

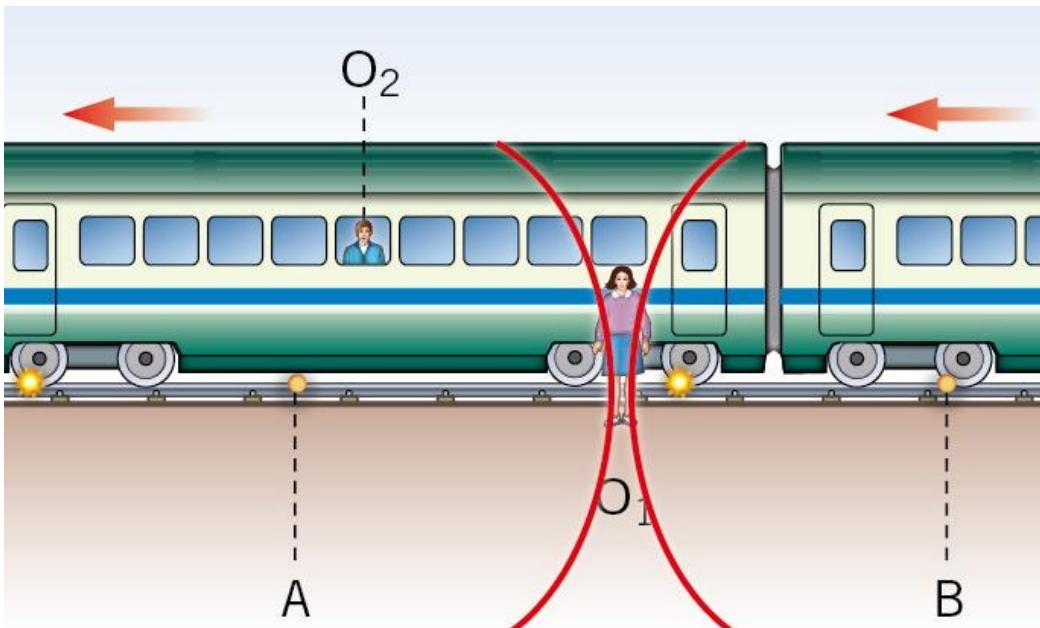
Einstein spiegò questo concetto servendosi di uno dei suoi famosi esperimenti mentali.



Un treno, su cui si trova l'osservatore  $O_2$ , viaggia a grande velocità rispetto a un osservatore  $O_1$  che si trova a terra. Quando vengono emessi i due lampi in A e B, i due osservatori si trovano a metà strada tra A e B.



Per l'osservatore  $O_1$ , a metà strada tra A e B, i due lampi sono simultanei perché arrivano nello stesso istante. Per  $O_1$  i due eventi sono simultanei.



Per l'osservatore  $O_2$ , poiché si trova sul treno che viaggia verso sinistra, avverte prima il lampo emesso da A e poi quello emesso da B. Per  $O_2$  i due eventi non sono simultanei.

Il principio di relatività afferma che non c'è modo di stabilire che l'osservatore  $O_1$  a terra è in quiete e l'osservatore  $O_2$  sul treno è in moto, ma può solamente stabilire che essi sono in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

In maniera del tutto simmetrica, due eventi che sono simultanei per  $O_2$  non lo sono per  $O_1$ .

Non c'è nessun sistema di riferimento speciale che possa stabilire la simultaneità assoluta tra due eventi.

Possiamo quindi affermare che:

Il concetto di simultaneità di due eventi è relativo,  
cioè dipende da chi osserva gli eventi.

La relatività della simultaneità è un'idea geniale foriera di profondi sconvolgimenti concettuali non solo scientifici ma anche filosofici.

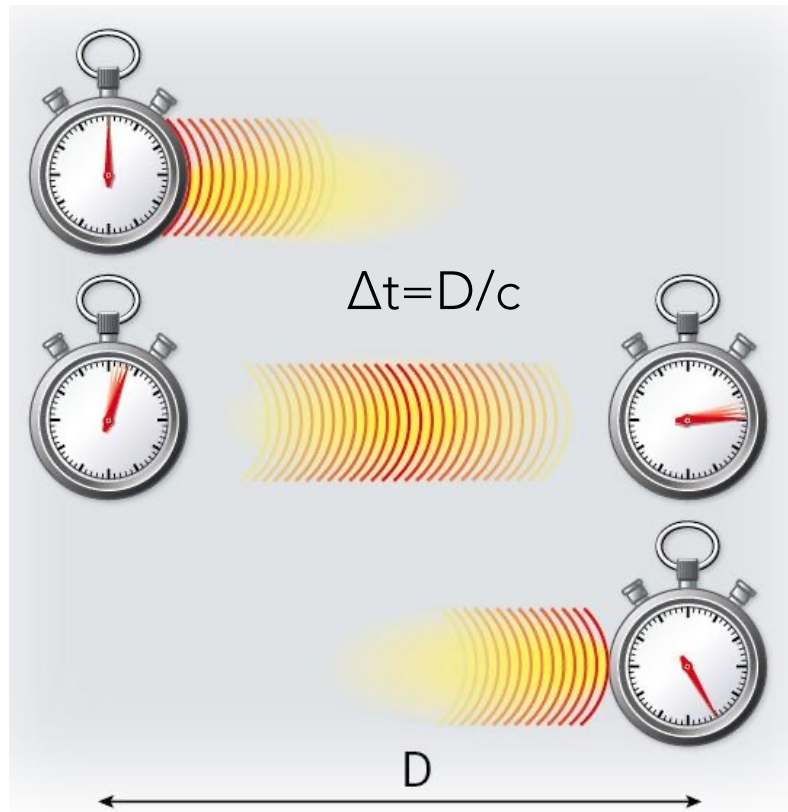
Significa che non esiste un tempo assoluto. Tutti i sistemi di riferimento in moto hanno un proprio tempo relativo.

Non esiste un insieme di eventi nell'Universo che siano tutti esistenti "adesso". Il nostro "adesso" esiste solo qui. L'insieme degli eventi dell'Universo non si può descrivere correttamente come una successione di presenti.

Il valore finito della velocità della luce ci porta alla seguente domanda: cosa significa confrontare tra loro due misure di tempo fatte in luoghi diversi?

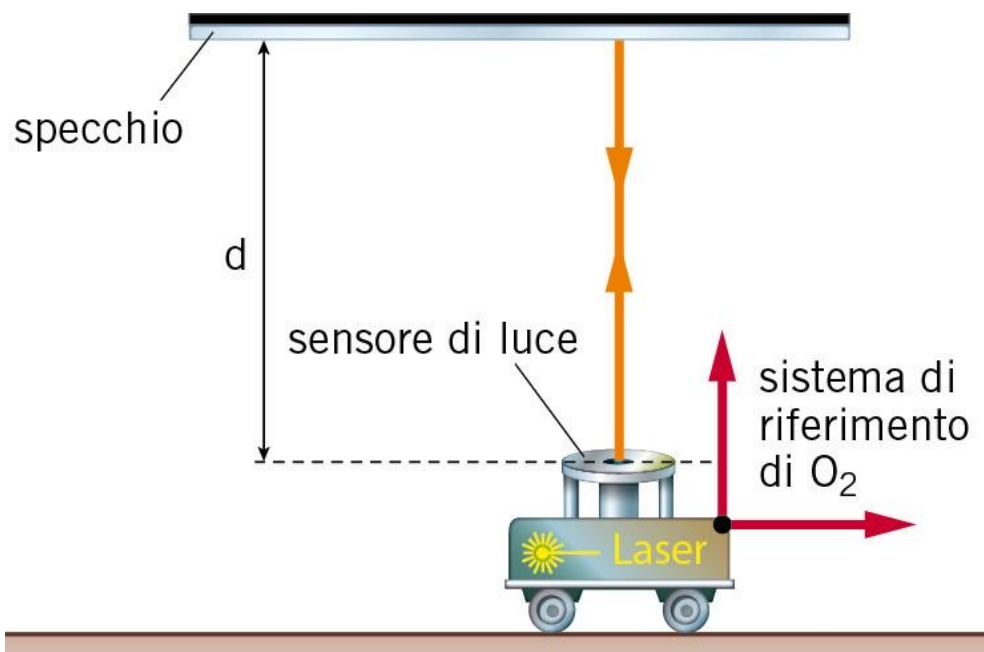


Per rispondere alla domanda, dobbiamo prima introdurre nella teoria che stiamo costruendo un protocollo che dica come possiamo sincronizzare tra loro due orologi identici posti a una certa distanza tra loro.



I due orologi sono **sincronizzati** se il secondo, nell'istante in cui riceve il lampo di luce emesso dal primo all'istante  $t_0$ , segna il valore  $t = t_0 + D/c$ .



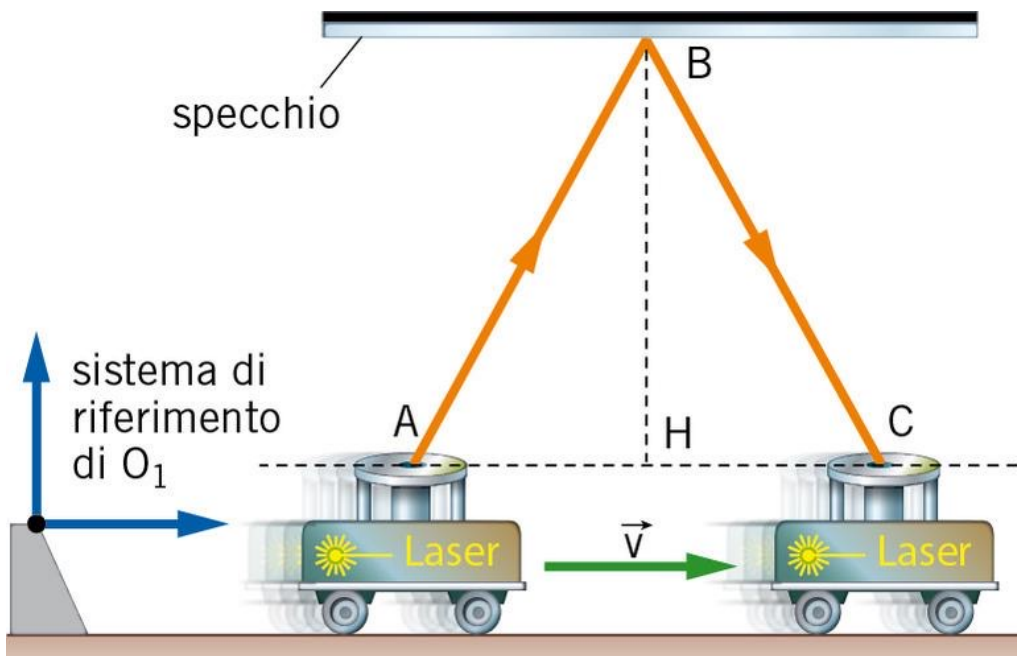


Utilizziamo gli orologi che abbiamo sincronizzato.

Nel sistema di riferimento mobile di  $O_2$ , l'orologio, solidale con il sistema, emette un raggio di luce che viene riflesso da uno specchio.

Poiché l'apparato sperimentale è fermo per l'osservatore  $O_2$ , la luce percorre avanti e indietro lo stesso tratto e impiega un tempo pari a:

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$



Contemporaneamente, rispetto all'osservatore  $O_1$  solidale con la terra, la piattaforma, su cui si trova l'osservatore  $O_2$ , si muove verso destra con velocità  $\mathbf{v}$ .

$O_1$  descrive lo stesso fenomeno con i propri apparati di misura, e cosa osserva? Mentre la luce percorre il proprio cammino, la piattaforma di  $O_2$  si muove verso destra, quindi per  $O_1$  la traiettoria del raggio di luce è una spezzata ABC, ossia un percorso più lungo di quello misurato nel sistema di  $O_1$ .

Tralasciando i calcoli, peraltro molto semplici, si dimostra che:

# DILATAZIONE DEL TEMPO

Gli orologi in moto battono il tempo più lentamente:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \xrightarrow{\beta = \frac{v}{c}} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

fattore di Lorentz o  
coefficiente di dilatazione

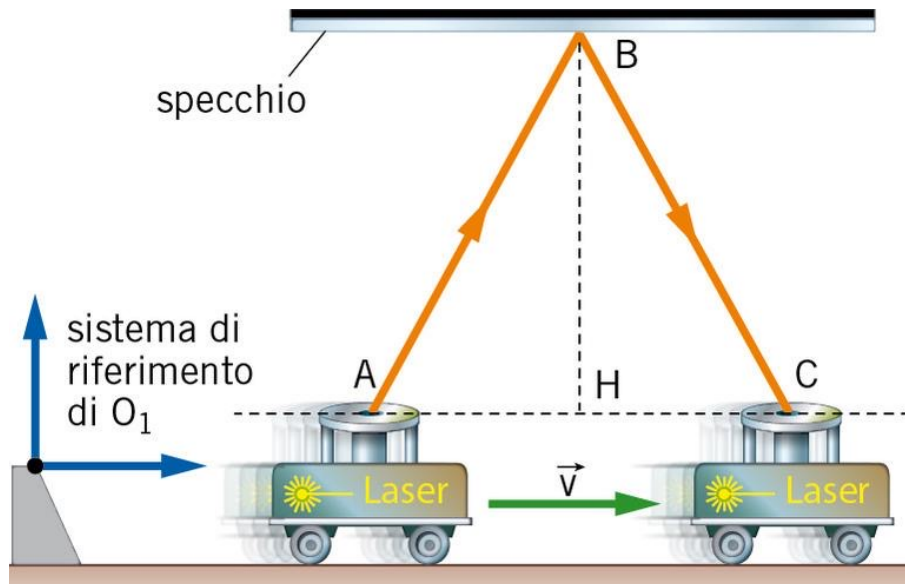
I due intervalli di tempo  $\Delta t$  e  $\Delta t'$ , misurati in due sistemi di riferimento diversi per la durata dello stesso fenomeno, sono differenti.

L'osservatore  $O_1$  vede la distanza che la luce deve percorrere più lunga di quanto non appaia all'osservatore  $O_2$  in moto. Dal punto di vista di  $O_1$ , il tempo scorre più lentamente per  $O_2$ .

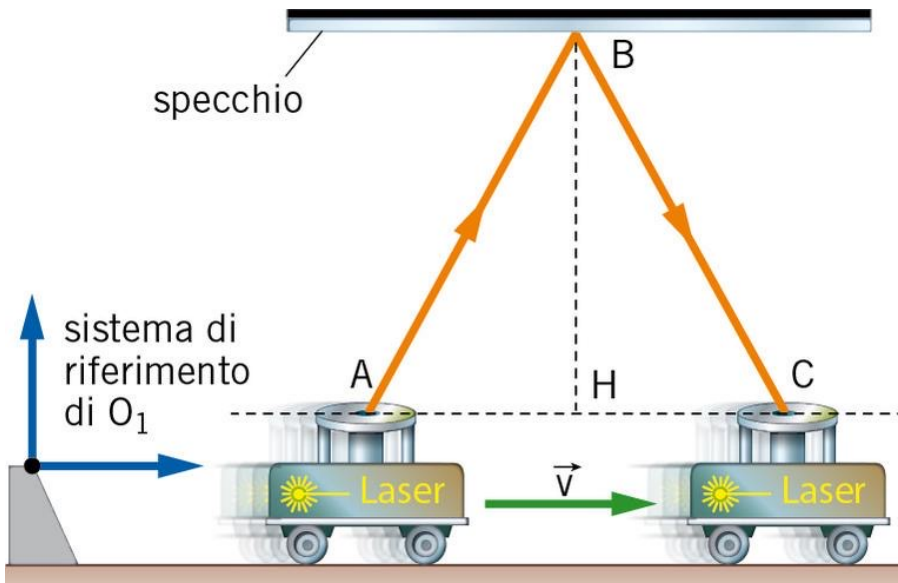
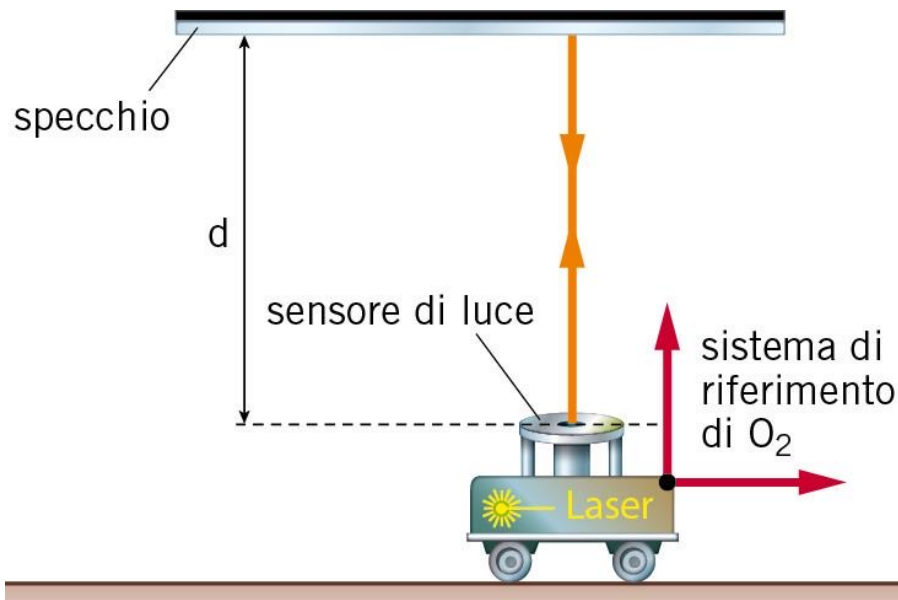
Che cosa accade quando il treno si avvicina alla velocità della luce rispetto all'osservatore sul marciapiede?

Utilizzando la formula della dilatazione dei tempi, otteniamo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \xrightarrow[\beta \rightarrow 1]{v \rightarrow c} \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \rightarrow \infty$$



Ci vorrebbe un tempo quasi infinito, dal punto di vista di  $O_1$ , perché il raggio di luce emesso dal carrello in movimento percorra il tragitto ABC. Quindi il tempo sul treno sarebbe quasi fermo dal punto di vista dell'osservatore  $O_1$ .



Come tutti i fenomeni relativistici, la dilatazione del tempo è simmetrica rispetto a due sistemi mobili l'uno rispetto all'altro, ossia se per l'osservatore  $O_1$  l'orologio di  $O_2$  batte il tempo più lentamente, altrettanto potrà dire l'osservatore  $O_2$  per l'orologio di  $O_1$ .

Se indichiamo con  $S$  il sistema **solidale con il fenomeno** (per intenderci dove si trova l'osservatore  $O_2$ ), in tutti i sistemi di riferimento in moto rispetto a  $S$  la durata del fenomeno è maggiore.

Per esempio, se il fenomeno da studiare è il moto di una particella elementare o una sonda spaziale, che si muove con velocità costante, il sistema solidale con il fenomeno è quello che si muove con la particella o la sonda spaziale.

La durata del fenomeno misurata nel sistema di riferimento solidale con esso si chiama **tempo proprio** del fenomeno.

**esempio**

La durata del suono della sveglia è minima nel sistema di riferimento in cui la sveglia è ferma (sistema solidale con il fenomeno), mentre è maggiore in tutti i sistemi di riferimento in cui la sveglia è in moto (la mamma che porta la colazione).

Dopo la relatività della simultaneità, **Einstein scopre anche la relatività del tempo**, ossia che la misura della durata di un fenomeno dipende dal sistema di riferimento in cui questa grandezza è misurata.

### esempio

L'astronauta Mario viaggia verso una stella lontana alla velocità pari al 95% di quella della luce, mentre il suo gemello Dario rimane sulla Terra. Mario raggiunge la stella dopo un tempo  $\Delta t = 10$  anni, misurato con gli strumenti di bordo. Calcolare il tempo dello stesso viaggio (durata dello stesso fenomeno) secondo l'orologio terrestre di Dario.

La durata  $\Delta t = 10$  anni è il tempo proprio del fenomeno perché è misurata nel sistema di riferimento in cui l'astronave risulta ferma (sistema solidale con il fenomeno). La durata del viaggio misurata da Dario è:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 3,2 \cdot 10 = 32 \text{ anni}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,95c}{c}\right)^2}} \approx 3,2$$

## paradosso dei gemelli



Se il tempo, in certe condizioni di moto, scorre più lentamente, anche qualsiasi altro processo temporale, sia esso biologico, chimico, atomico, ecc., considerato nelle stesse condizioni cinematiche, dovrebbe presentare lo stesso fenomeno relativistico.

Pertanto, il fenomeno della dilatazione dei tempi conduce ad una serie di paradossi, come quello dei gemelli.



Se Romolo rimane sulla Terra mentre Remo parte verso una stella lontana a una velocità prossima a quella della luce, quando questo ritorna, per la dilatazione dei tempi, sarà più giovane di Romolo.

Ma poiché il moto è relativo, Remo potrebbe pensare che sia suo fratello gemello Romolo sulla Terra a viaggiare alla velocità prossima a quella della luce, e quando si incontrano si aspetterebbe di vedere che sia Romolo a essere più giovane.

Sembra che siamo di fronte a un paradosso. Naturalmente no. I due punti di vista sarebbero entrambi corretti solo se i due gemelli si trovassero sempre nelle stesse condizioni di moto.

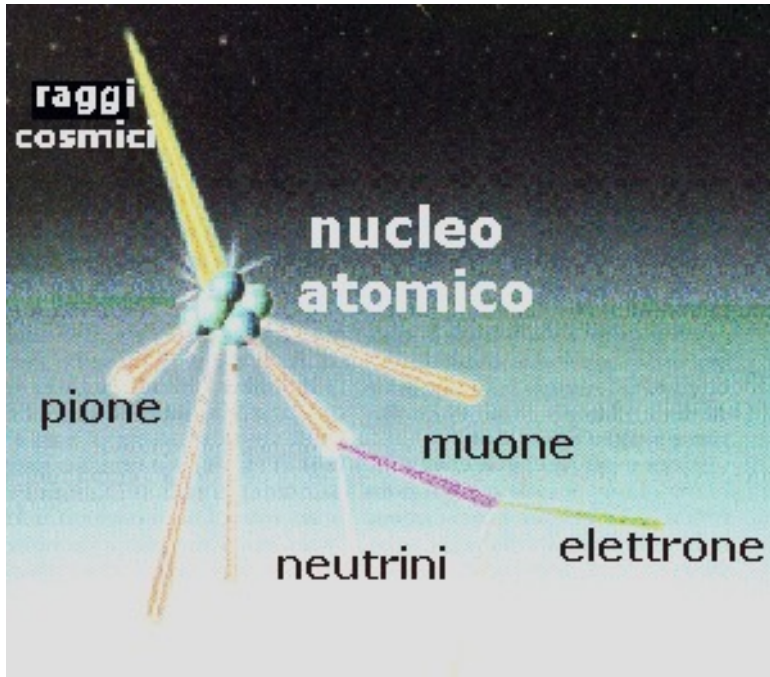
In realtà Romolo si trova in un sistema di riferimento inerziale (approssimativamente la Terra lo è), mentre Remo, per poter tornare al punto di partenza, deve fermarsi, invertire la rotta e ripartire: il suo moto è soggetto ad accelerazioni, quindi a forze.

Il problema, perciò, non è simmetrico e, per trattarlo in maniera corretta, tenendo conto delle fasi di accelerazione dell'astronave, è necessario ricorrere alla teoria della relatività generale (che tratteremo più avanti).

Comunque il risultato che si ottiene, tendo conto degli effetti della relatività generale, dà ragione a Romolo: è il gemello che ha viaggiato a essere rimasto sorprendentemente più giovane.

Il paradosso dei gemelli è dunque scientificamente fondato, nonostante indichi una situazione sorprendente, "contraria al senso comune".

## prove sperimentali: i raggi cosmici



I raggi cosmici sono costituiti da particelle di elevata energia, soprattutto protoni, che dallo spazio arrivano sulla Terra e, urtando contro i nuclei degli atomi presenti negli strati superiori dell'atmosfera, danno origine a numerose altre particelle più leggere, come i **muoni**, una particella instabile che si disintegra in altre particelle spontaneamente dopo un intervallo di tempo che, in media, se misurato in un sistema in cui la particella è a riposo (sistema solidale), è pari a  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s.

Questa durata rappresenta una proprietà caratteristica del muone, la cosiddetta *vita media*, e può essere utilizzata come una specie di orologio che misura l'esistenza della particella.

Poiché dalla creazione fino al decadimento, anche viaggiando alla velocità della luce, i muoni potrebbero percorrere una distanza media non più grande di circa 660 m, ben pochi riuscirebbero ad arrivare sulla Terra. Invece si osserva che essi investono il nostro pianeta in gran numero.

La ragione è che queste particelle “vivono” nel sistema di riferimento della Terra, un tempo più lungo di  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s.

L'orologio dei muoni scorre più lentamente per tutti gli osservatori terrestri che vedono le particelle in movimento. Conseguentemente queste possono percorrere distanze maggiori, tanto da attraversare tutto lo spessore dell'atmosfera.

Facciamo qualche conto sui muoni prodotti nell'alta atmosfera dai raggi cosmici.

Secondo la cinematica classica (tempo e spazio assoluti), un muone che viaggia quasi alla velocità della luce (99,92%), nel tempo  $t=2,2 \mu s$  percorrerebbe la seguente distanza prima di decadere:

$$d = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \text{ (m / s)} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ (s)} \cong 660 \text{ m}$$

Ed ecco il problema: sulla Terra ne arrivano più della metà, e l'atmosfera ha uno spessore di circa 15 km. Domanda: come fanno ad arrivare sulla Terra se "muoiono" dopo 660 metri?

Soluzione: dobbiamo utilizzare la teoria della relatività, in quanto le formule e i concetti della fisica classica non funzionano quando gli oggetti sono molto veloci.

Se indichiamo con  $\Delta t_0$  il tempo proprio (la durata del fenomeno misurata nel sistema di riferimento solidale, ossia la vita media del muone), il tempo di decadimento misurato nel sistema di riferimento Terra risulterà dilatato, ossia maggiore. Infatti:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 25 \cdot 2,2 = 55 \mu s \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,9992c}{c}\right)^2}} \approx 25$$

In questo tempo, il muone percorrerà la distanza:

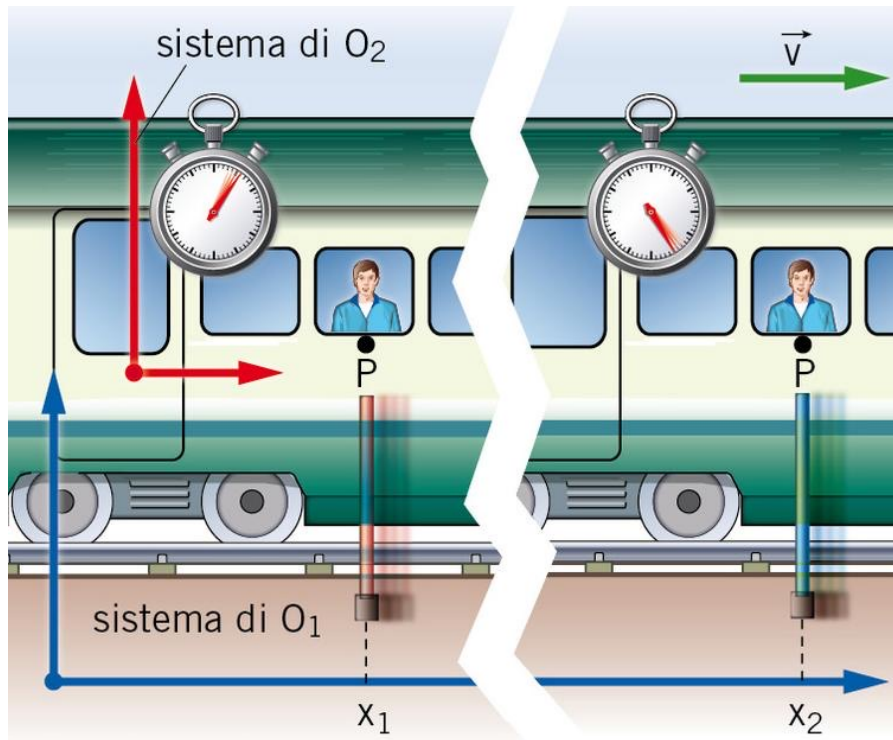
$$d = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 (m / s) \cdot 55 \cdot 10^{-6} (s) \approx 16 km$$

Ecco perché circa il  
40% dei muoni  
arrivano sulla Terra.

## LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

La presa d'atto di un tempo relativo comportava il rovesciamento anche dell'altro concetto newtoniano, ossia quello di spazio assoluto: se il tempo è relativo, lo sono anche lo spazio e la distanza.

Esaminiamo, allora, la misura di lunghezza compiuta da osservatori in moto relativo, prendendo in esame ancora il treno che si muove.



Nel sistema di riferimento  $O_1$  (solidale con la Terra), la distanza  $\Delta x = x_2 - x_1$  tra i paletti è data da:

$$\Delta x = v \Delta t$$

$\Delta t$  = intervallo di tempo (misurato nel sistema di  $O_1$ ) impiegato da un punto fisso  $P$  del treno per passare da  $x_1$  a  $x_2$ .

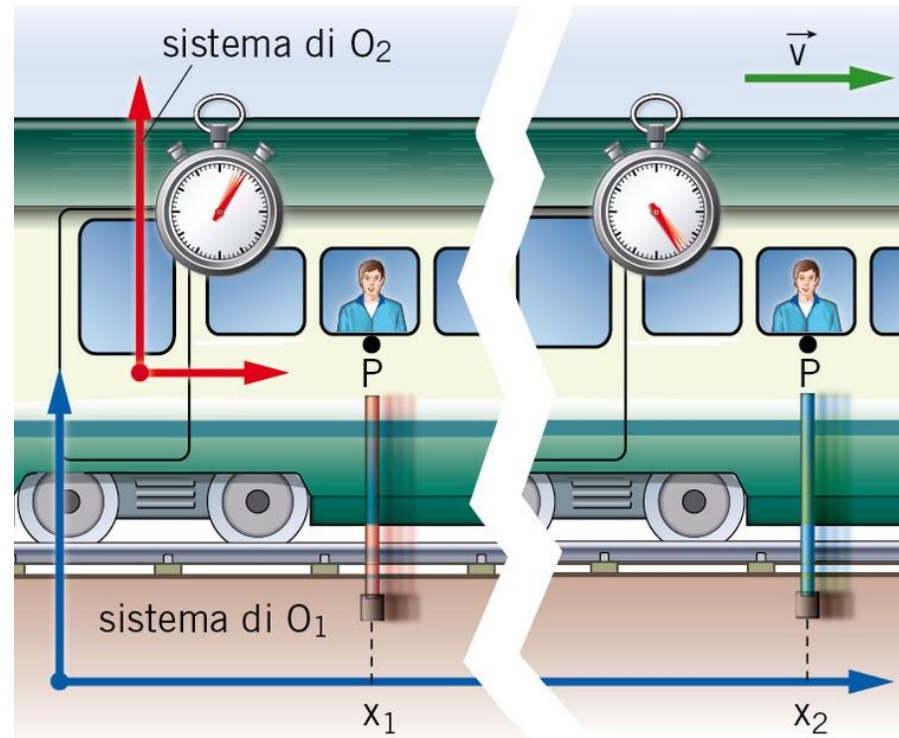
Nel sistema di riferimento di  $O_2$  (solidale con il treno), i paletti si muovono con velocità  $-\mathbf{v}$  (verso sinistra) in quanto il treno si muove con velocità  $\mathbf{v}$  (verso destra). Quindi, la distanza  $\Delta x'$  misurata da  $O_2$  nel suo intervallo di tempo  $\Delta t'$  vale:

$$\Delta x' = v \Delta t'$$



# Attenzione

P è un punto fisso per l'osservatore  $O_2$ , per cui il passaggio dei due paletti in corrispondenza di P è un fenomeno solidale con il sistema di riferimento di  $O_2$  (sistema di riferimento del treno).



Cosa significa? Il tempo  $\Delta t'$  è più breve di  $\Delta t$ . Possiamo utilizzare la formula della dilatazione dei tempi, ma con i ruoli dei simboli  $\Delta t$  e  $\Delta t'$  scambiati:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \xrightarrow[\text{i ruoli}]{\text{scambiando}} \Delta t = \gamma \Delta t'$$

$\Delta t'$  = durata del fenomeno  
misurata da  $O_2$

$\Delta t$  = durata del fenomeno  
misurata da  $O_1$

Quindi:

$$\Delta x' = v \Delta t' \xrightarrow{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}} \Delta x' = v \frac{\Delta t}{\gamma} \xrightarrow{\Delta x = v \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v}} \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

## CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Un oggetto in moto diventa più corto:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \xrightarrow{\beta = \frac{v}{c}} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

fattore di Lorentz o  
coefficiente di contrazione

La lunghezza di un segmento misurata nel sistema di riferimento solidale con esso (sistema in cui il segmento è in quiete) si chiama **lunghezza propria** del segmento. Allora:

### CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

La lunghezza di un segmento misurata in un sistema di riferimento in cui esso è in movimento risulta sempre minore della lunghezza propria del segmento stesso.

La **lunghezza propria** è la massima lunghezza del segmento che può essere misurata nei diversi sistemi di riferimento in moto relativo (e corrisponde a quella lunghezza misurata nel sistema di riferimento rispetto al quale il segmento è in quiete).

La lunghezza propria di una sbarra è  $\Delta x = 4,0 \text{ m}$ . Il sistema di riferimento  $O_2$  si muove, rispetto alla sbarra, con velocità  $v = 8,7 \times 10^7 \text{ m/s}$ . Calcolare la lunghezza  $\Delta x'$  della sbarra secondo le misure effettuate nel sistema di riferimento di  $O_2$ .

Applichiamo la formula della contrazione delle lunghezze:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{4}{1,045} = 3,83 \text{ m}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xrightarrow{\beta = \frac{v}{c} = \frac{8,7 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,29} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,29^2}} = 1,045$$

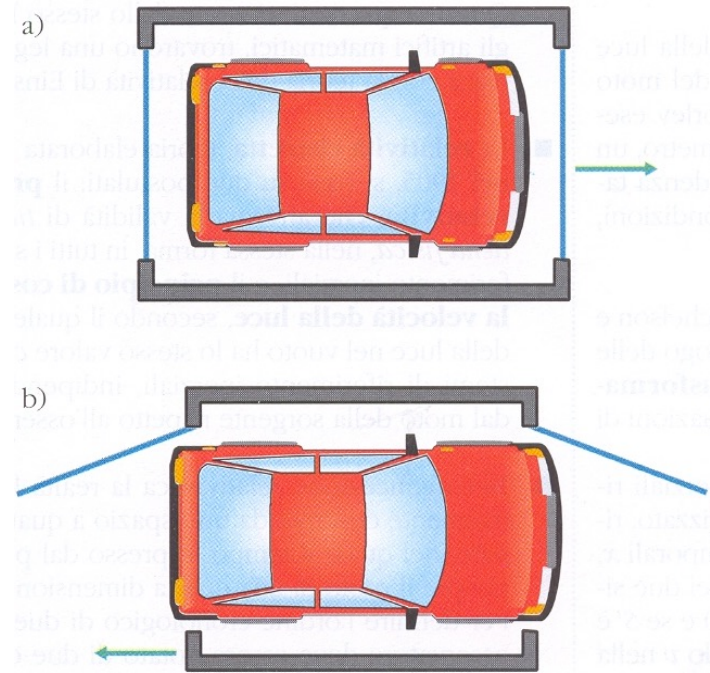
## paradosso del garage

Si abbia un'auto lunga 3 m e un garage lungo anch'esso 3 m.

Immaginiamo che la macchina, guidata dall'osservatore  $O'$  (sistema dell'automobile), entri nel garage a una velocità che si avvicina a quella della luce. Per un osservatore  $O$  all'interno del locale (sistema del garage) l'auto si contrae e per qualche istante è tutta nel garage (fig. a).

Dal punto di vista di  $O'$ , è il garage che si è contratto, per cui l'auto non è tutta contenuta nel garage (fig. b).

Chi ha ragione?



L'aspetto straordinario di questo paradosso è che entrambi gli osservatori hanno ragione.

Secondo la teoria della relatività ristretta, tutti i sistemi di riferimento inerziali sono ugualmente validi. Tutto quanto sappiamo è che osservatori in differenti stati di moto otterranno misure diverse delle grandezze (tempo, spazio, simultaneità).

Da un punto di vista relativistico, non esiste un'unica realtà, ma soltanto delle realtà individuali associate ai singoli osservatori, ognuna dedotta ed elaborata sulla base dei postulati einsteiniani. E così come la teoria della relatività ristretta ci ha liberato dall'etere, afferma anche che non c'è nessun sistema di riferimento definito in quiete che sia privilegiato rispetto a qualsiasi altro.

Come non esiste il tempo assoluto, non esiste neanche lo spazio assoluto.

Questi fatti vengono condensati nella frase:

All'aumentare della velocità, il tempo scorre più lentamente e le lunghezze si contraggono.

Ma non dobbiamo dimenticare di sottintendere:

Rispetto al tempo proprio e alla lunghezza propria (ossia rispetto alle stesse grandezze misurate nel sistema solidale con il fenomeno).

# Riassunto

## CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Un oggetto in moto diventa più corto

## DILATAZIONE DEL TEMPO

Gli orologi in moto battono il tempo più lentamente

Il fenomeno della contrazione delle lunghezze e della dilatazione dei tempi formalmente possono essere espressi nel seguente modo:

## CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

$$L = L_0 / \gamma$$

$L_0$  è la lunghezza propria (la lunghezza dell'oggetto osservato nel suo sistema di riferimento)

$L$  è la lunghezza misurata dall'osservatore in movimento

## DILATAZIONE DEI TEMPI

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

$\Delta t_0$  è l'intervallo di tempo proprio (l'intervallo di tempo osservato nel suo sistema di riferimento)

$\Delta t$  è l'intervallo di tempo misurato dall'osservatore in movimento

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$\gamma$  è il fattore di Lorentz (sempre maggiore di 1)  
 $u$  è la velocità relativa tra l'osservatore e l'oggetto  
 $c$  è la velocità della luce.



Né lo spazio né il tempo hanno l'assolutezza che veniva loro attribuita dalla meccanica newtoniana, per cui due osservatori in moto reciproco non potranno mai essere d'accordo sulla distanza tra due punti o sul tempo trascorso tra due eventi.

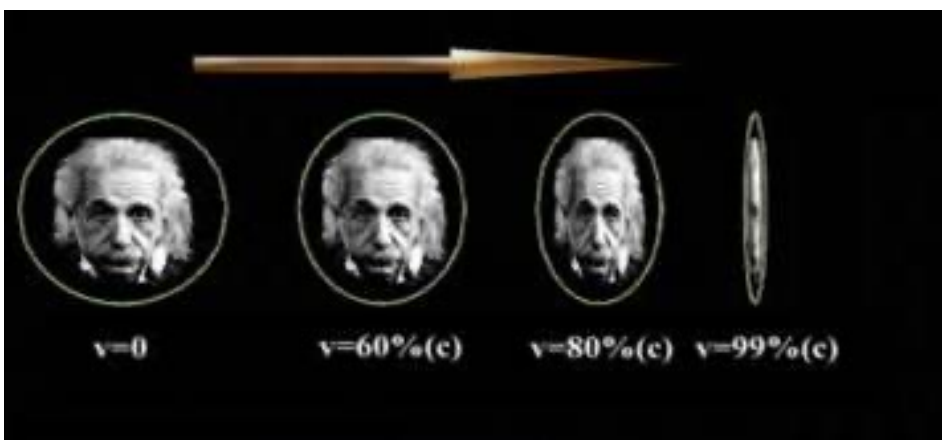
## L'INVARIANZA DELLE LUNGHEZZE PERPENDICOLARI AL MOTO RELATIVO

La contrazione delle lunghezze che abbiamo ricavato è valida per i segmenti posti in direzione parallela al moto.

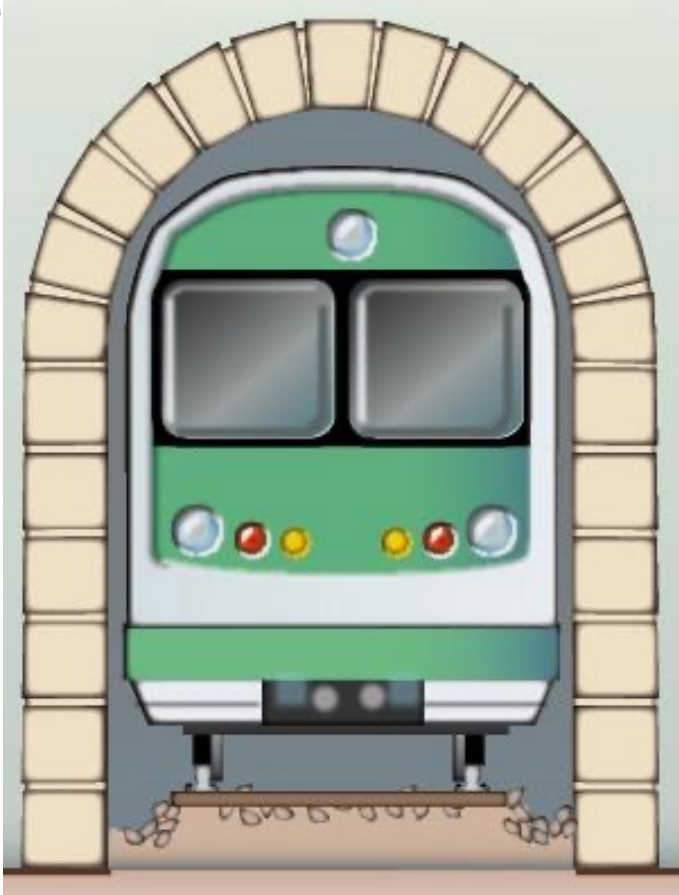
Cosa succede alle dimensioni perpendicolari al moto, ossia se il segmento viene posto perpendicolarmente alla velocità?

### **invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo**

Sia  $S_2$  un sistema inerziale che si muove con velocità costante  $\mathbf{v}$  rispetto al sistema inerziale  $S_1$ , tutti i segmenti perpendicolari a  $\mathbf{v}$  risultano invarianti (della stessa lunghezza) per gli osservatori solidali con i due sistemi.

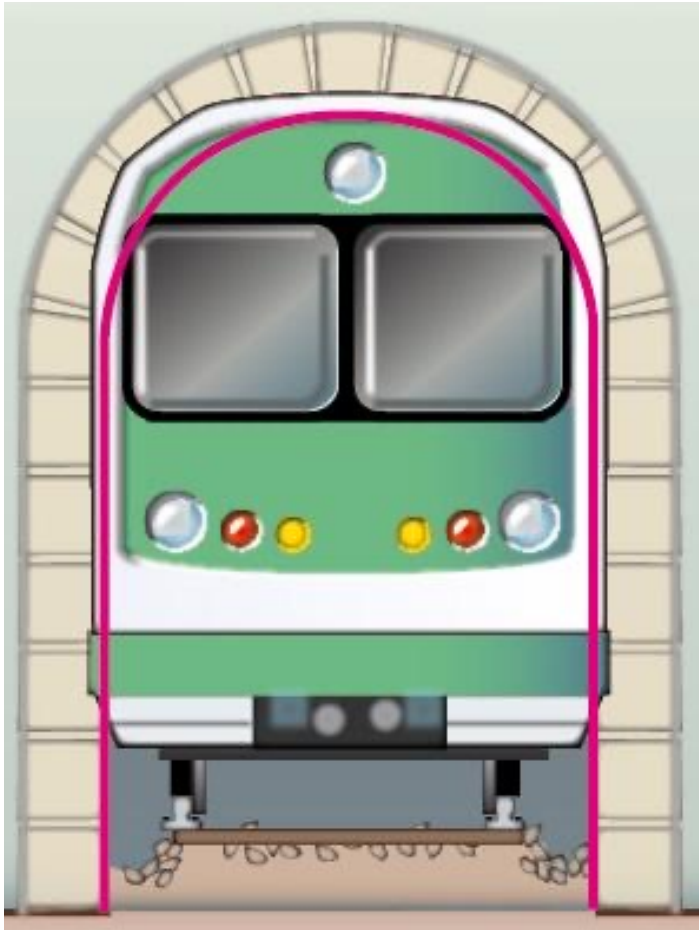


Dimostriamo l'affermazione precedente assumendo per assurdo che ci siano contrazioni anche trasversali delle lunghezze.



Rispetto al riferimento del terreno, la galleria è ferma e il treno è in movimento. Secondo l'ipotesi della contrazione (sia perpendicolare che trasversale al moto) il treno, visto da terra, appare più stretto e più basso, mentre la galleria, che è in quiete rispetto alla terra, non subisce contrazioni.

Il treno passa senza problemi.



Rispetto al riferimento del treno, è la galleria ad essere in movimento, mentre il treno è in quiete. Sempre secondo l'ipotesi della contrazione (sia perpendicolare che trasversale al moto) sarà la galleria, vista dal treno, a subire la diminuzione dell'altezza e della larghezza, mentre le dimensioni del treno, in quiete rispetto al riferimento treno, rimangono invariate.

Il treno non riesce ad entrare

Siamo arrivati a un assurdo: non è possibile che tale incidente avvenga o non avvenga a seconda del punto di vista da cui si guarda il moto del treno.

Conclusione: le dimensioni trasversali al moto rimangono invariate se misurate in sistemi di riferimento inerziali in moto relativo.

Con una dimostrazione del tutto analoga si giunge a una contraddizione anche se si fa l'ipotesi che le dimensioni laterali risultino dilatate per l'osservatore che vede il treno in movimento. In tutti i casi, bisogna ammettere che esse rimangono invariate.

## LA TEORIA DELLA RELATIVITA' NELLE PAROLE DI EINSTEIN

Una delle spiegazioni più chiare sulla teoria della relatività la ritroviamo nelle parole dello stesso Einstein:

*La teoria della relatività può essere delineata in poche parole. In contrasto con il fatto, noto fin dai tempi antichi, che il movimento è percepibile soltanto come movimento relativo, la fisica si basava sulla nozione di movimento assoluto. Lo studio delle onde luminose aveva preso il posto che un singolo stato di movimento, quello dell'etere luminifero, fosse distinto da tutti gli altri. Tutti i moti dei corpi erano considerati relativi all'etere luminifero che era l'incarnazione della quiete assoluta. Ma dopo che i tentativi di rivelare lo stato di moto privilegiato di questo ipotetico etere mediante gli esperimenti erano falliti, parve che il problema dovesse essere riformulato. Questo è quanto fece la teoria della relatività. Essa assunse che non vi siano stati fisici di moto privilegiati e si chiese quali conseguenze si potessero trarre da ciò.*

L'idea di Einstein di “scartare” concetti assoluti come quelli di simultaneità, velocità, tempo e spazio, non significa che “tutto è relativo”, nel senso che tutto è soggettivo, ma significa piuttosto che “tutto dipende” dal moto dell'osservatore”.

Nella teoria della relatività non si può parlare dello spazio senza parlare del tempo e viceversa.

Uno dei primi a intuire lo stretto legame fra lo spazio e il tempo insito nei postulati della teoria è stato *Minkowski* (1864–1909), ex insegnante di Einstein al Politecnico di Zurigo.

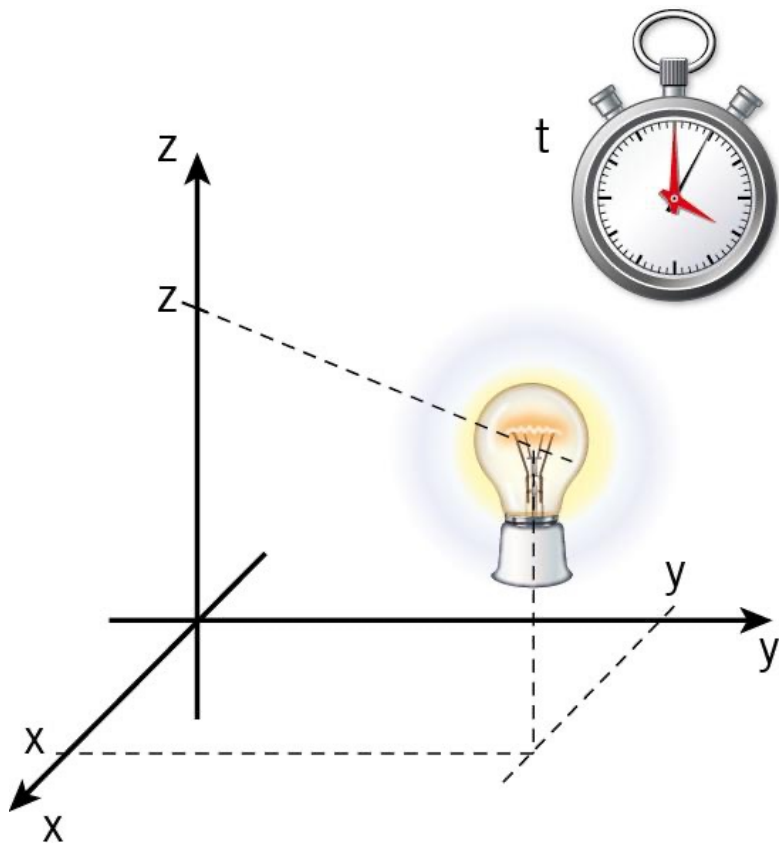
In questo modo riuscì a conferire una struttura matematica formale alla teoria della relatività, nella quale l'unificazione dello spazio e del tempo genera una nuova grandezza invariante, un continuo quadridimensionale, il cosiddetto *spaziotempo*.

*Spaziotempo di Minkowski*  
piatto (euclideo), statico,  
infinito

*La teoria della relatività  
ristretta è la teoria di uno  
spaziotempo di Minkowski  
senza la gravità.*

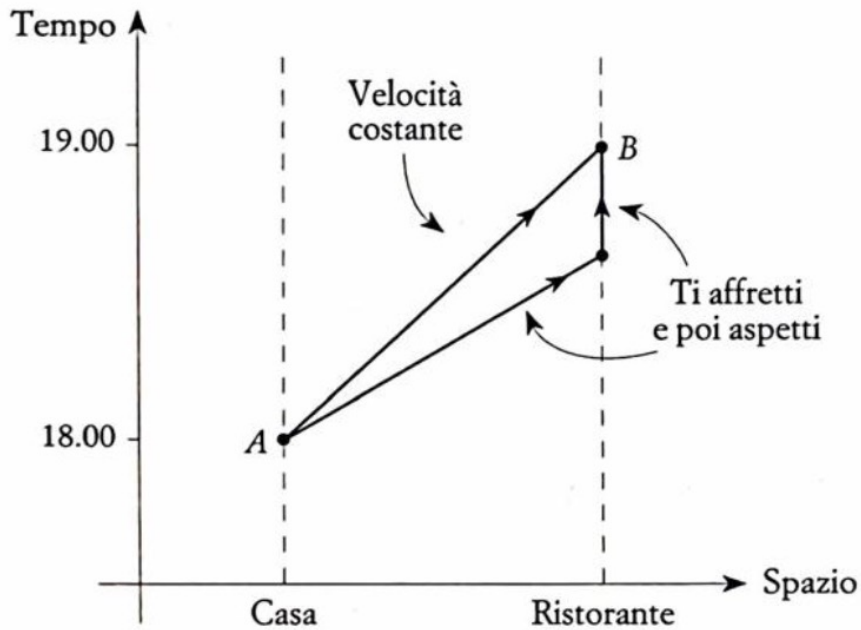


Nello spaziotempo per descrivere un fenomeno, occorre sapere che è avvenuto a un dato istante e in un certo punto dello spazio. Scelto un sistema di riferimento, tale informazione è data da quattro numeri  $(t, x, y, z)$  che forniscono l'istante  $t$  in cui il fenomeno è avvenuto e le tre coordinate spaziali del punto in cui esso ha avuto luogo.



La quaterna ordinata  $(t, x, y, z)$  prende il nome di **evento**.

Un evento è l'accensione all'istante  $t$  di una lampadina nel punto di coordinate  $(x, y, z)$ .



Consideriamo l'evento A e  
l'evento B

Domanda: quanto tempo  
intercorre tra questi due  
eventi?

Nella concezione di spazio e tempo assoluti newtoniani,  
diremmo 1 ora.

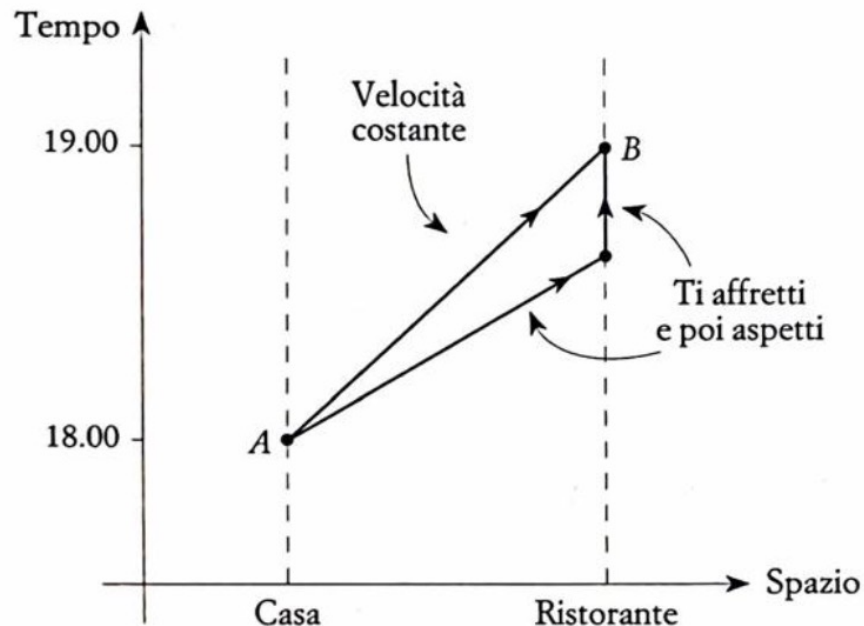
Ma relatività racconta un'altra storia. Il tempo è una  
coordinata dello spaziotempo quadrimensionale, per cui,  
se vogliamo specificare le posizioni al suo interno,  
dobbiamo attribuire un numero chiamato «tempo» a  
ogni punto dello spaziotempo.

Dunque, proprio come la distanza in linea d'aria tra due punti è diversa dalla distanza effettivamente percorsa tra questi due punti nello spazio, così l'intervallo di tempo effettivamente sperimentato lungo la linea di universo (la traiettoria nello spaziotempo) non coincide con la coordinata temporale universale. Il tempo che si sperimenta è il **tempo proprio**.

Nello spazio una linea retta rappresenta la distanza più breve tra due punti.

Idea fondamentale  
Nello spaziotempo, un percorso rettilineo rappresenta l'intervallo di tempo più lungo tra due eventi.

distanza spaziale maggiore  
=  
tempo proprio minore

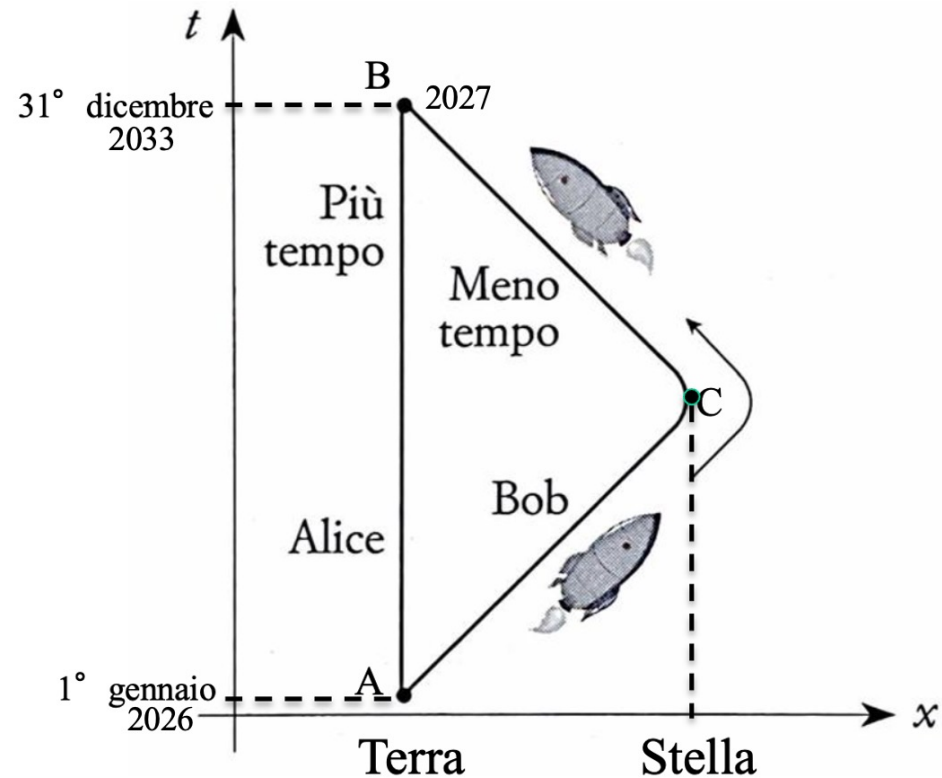


Persone che si muovono su percorsi diversi nello spaziotempo sperimentano intervalli di tempo diversi.

# Paradosso dei gemelli

Alice = percorso più breve  
nello spaziotempo (è  
rimasta immobile nello  
spazio) ma tempo trascorso  
più lungo.

Bob = percorso più lungo  
nello spaziotempo (stesso  
evento iniziale e finale) ma  
tempo trascorso più breve.



Facendo un po' di conti, se Bob viaggiasse a una  
velocità pari al 99% di quella luce, per ogni anno di  
tempo trascorso da Bob (tempo proprio), Alice ne avrà  
vissuti circa sette.

Universo di Newton  
=  
tempo universale

Universo di Einstein  
=  
tempo dipende dalla  
fisica del viaggio

Allora l'orologio di Bob  
scorre più lentamente di  
quello di Alice? NO

Il tempo non ha una  
velocità: Bob e Alice,  
muovendosi su percorsi  
diversi nello spaziotempo  
(linee di universo diverse),  
sperimentano tempo propri  
diversi.

Bob e Alice coprono quantità diverse  
di spaziotempo.

Il tempo rallenta? E rispetto a chi?

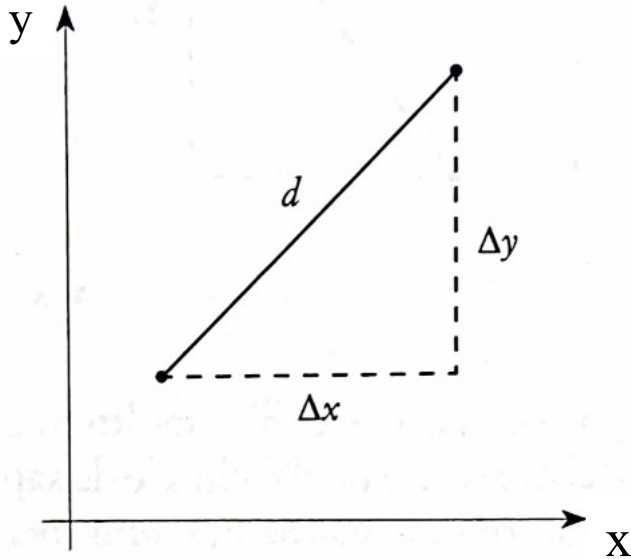
Bisogna abbandonare il concetto di tempo assoluto newtoniano. Non esiste un tempo assoluto, oggettivo, rispetto al quale confrontare gli orologi di Bob e Alice.

**Esiste solo il tempo proprio, ossia il tempo misurato dagli orologi di Bob e Alice nei propri sistemi di riferimento.**

Relatività: pensare localmente e non estendere le considerazioni allo spazio e tempo assoluti.

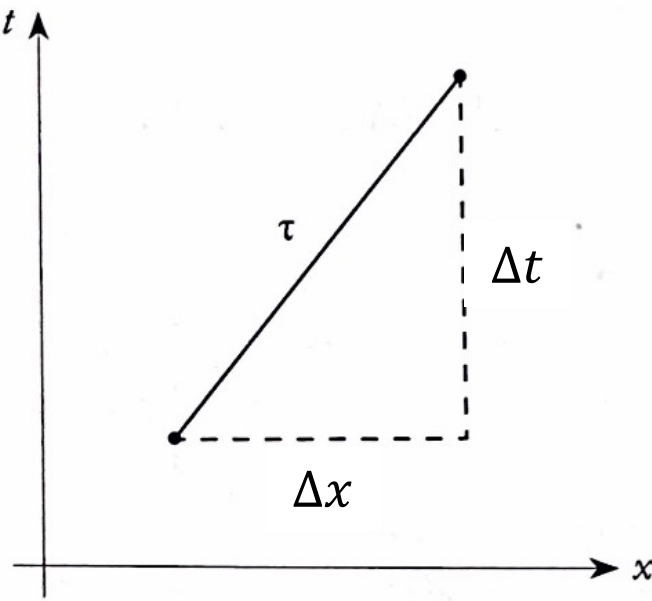


Torniamo allo spaziotempo di Minkowski e cerchiamo di capire come funziona. La chiave è il teorema di Pitagora.



teorema di Pitagora  
nello spazio

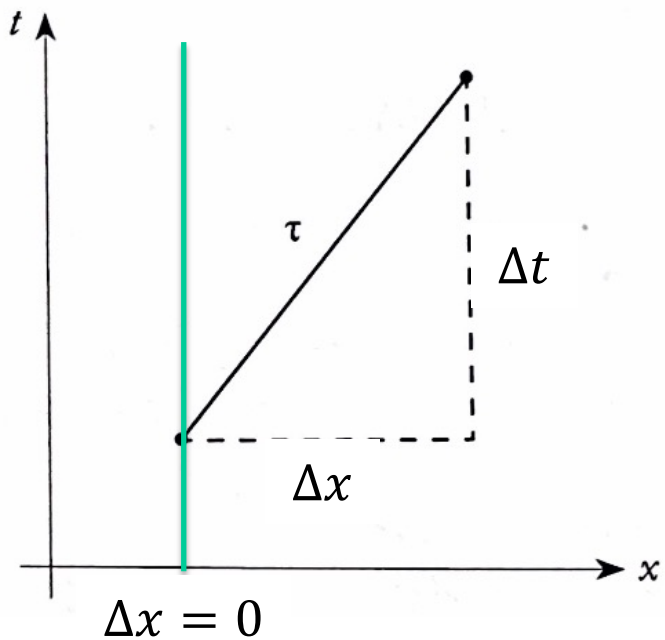
$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$



teorema di Pitagora  
nello spaziotempo

$$\tau^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

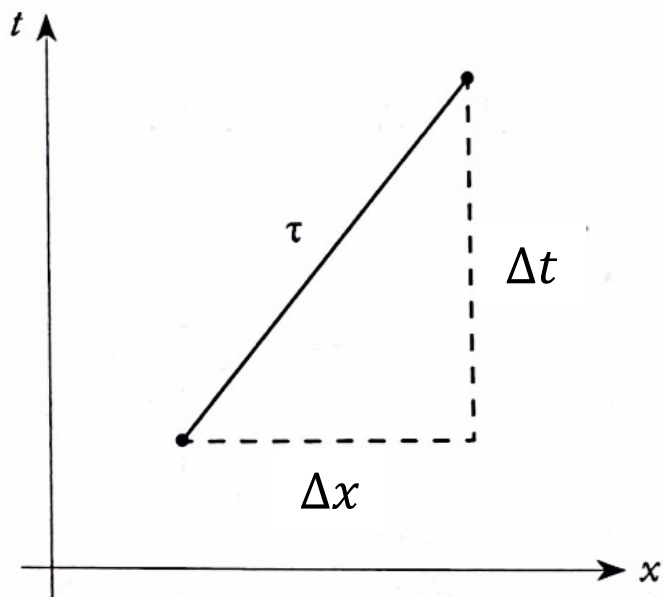
Differenza: nello spaziotempo c'è un segno meno necessario per passare da distanza più breve a intervallo di tempo più lungo per i percorsi rettilinei.



$\Delta x = 0 \rightarrow$  **Osservatore stazionario**  
invecchia nel tempo,  
ma non si muove nello spazio, o,  
comunque, si muove a velocità  
non confrontabile con quella  
della luce:

$$\tau^2 = (\Delta t)^2 \rightarrow \tau = \Delta t$$

Il tempo proprio  $\tau$  e il tempo delle coordinate  $\Delta t$   
sono gli stessi. È la nostra situazione quotidiana.



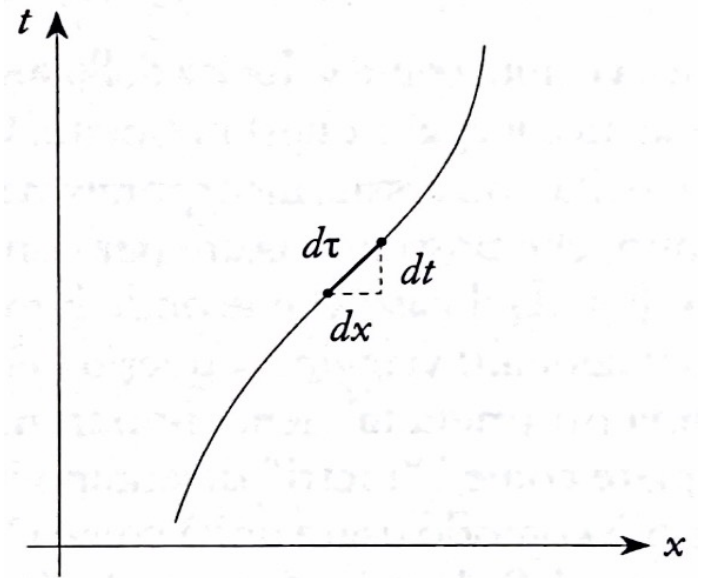
$\Delta x \neq 0 \rightarrow$  **Osservatore in movimento**

Il suo tempo proprio  $\tau$  è sempre inferiore a quello di un osservatore stazionario, data una quantità fissa  $\Delta t$  di tempo coordinato trascorso (la causa è nel segno meno):

$$\tau^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

In un percorso tra due eventi fissati,  
più ci si sposta nello spazio, meno tempo trascorre.

Tutto ciò che è stato detto, non solo vale per percorsi rettilinei, ma vale per qualsiasi percorso.



Basta applicare una versione infinitesima dell'espressione precedente a segmenti molto brevi di percorso:

$$d\tau^2 = (dt)^2 - (dx)^2$$

E, successivamente, integrare per calcolare la quantità totale di tempo proprio lungo un percorso:

$$\Delta\tau = \int d\tau$$

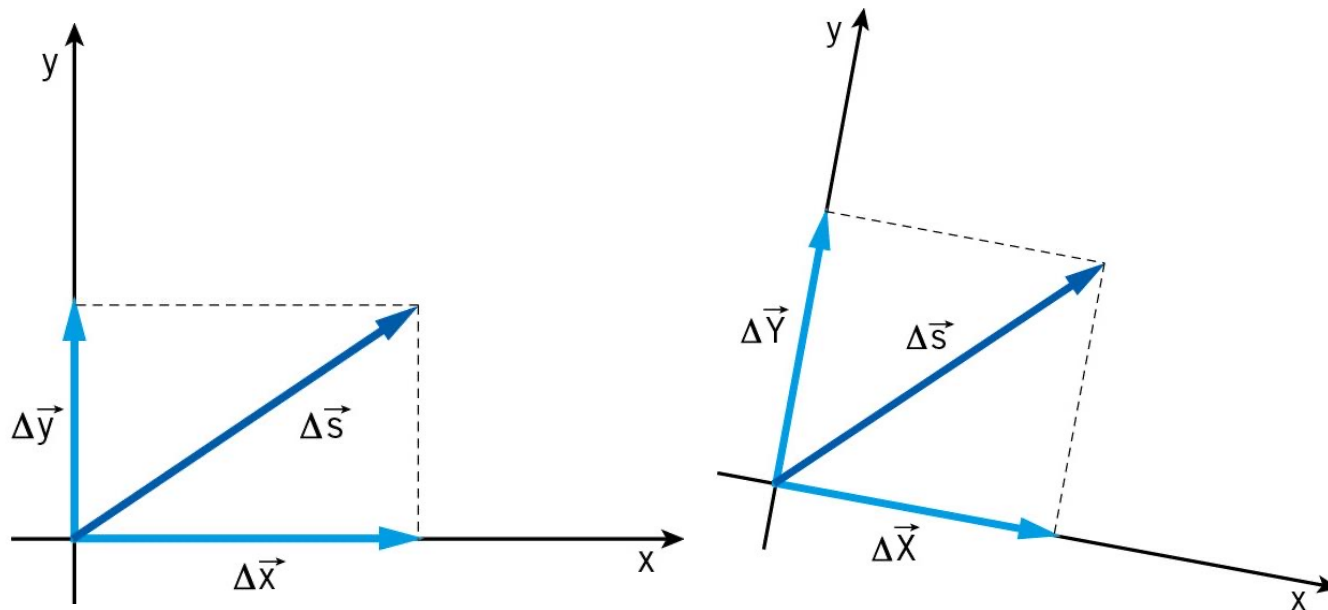
La relatività ristretta vale anche per sistemi accelerati.

Finché lo spaziotempo è euclideo (piatto), e quello di Minkowski lo è, la relatività ristretta vale per qualsiasi traiettoria.

Minkowski convertì tutti gli eventi in coordinate matematiche in quattro dimensioni, con il tempo come quarta dimensione.

In questo modo il tempo non è distinto dalle coordinate spaziali, ma è una delle quattro coordinate dello spaziotempo.

Cerchiamo adesso la relazione tra le misure di spazio e di tempo, che rimane invariante, qualunque sia il nostro sistema di riferimento inerziale.



Rappresentiamo lo stesso vettore spostamento  $\Delta \mathbf{s}$  in due differenti sistemi di riferimento:

Il vettore spostamento  $\Delta \mathbf{s}$ , per il teorema di Pitagora, è dato da:

$$\begin{cases} 1^\circ \text{ sistema di riferimento} \rightarrow (\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ 2^\circ \text{ sistema di riferimento} \rightarrow (\Delta s)^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 \end{cases}$$

Da cui otteniamo:  $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2$

Che nel sistema tridimensionale diventa:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2$$

Cosa significa?

Le singole componenti del vettore  $\Delta \mathbf{s}$  variano, ma la sua lunghezza rimane costante e, quindi, la somma dei quadrati delle componenti è **invariante**.



La scelta del sistema di riferimento in cui descriviamo  $\Delta\mathbf{s}$  è arbitraria e non ha alcun significato fisico. Ma la lunghezza di  $\Delta\mathbf{s}$  è una quantità che ha una ben precisa rilevanza fisica e il suo valore esiste in modo oggettivo. È quindi naturale che, con tutte le scelte possibili del sistema di riferimento, si ritrovi sempre lo stesso valore di  $(\Delta s)^2$ .

La descrizione dello spazio con tre assi cartesiani non ha alcun significato fisico: è soltanto una nostra scelta arbitraria, che può cambiare da osservatore a osservatore.

Invece:

Ciò che ha esistenza reale e significato fisico è lo spazio tridimensionale nel suo complesso, gli oggetti che si trovano in esso e la lunghezza invariante  $\Delta s$ .

Nella teoria della relatività il discorso appena fatto deve comprendere anche l'intervallo di tempo  $\Delta t$ . E proprio come nella discussione precedente, dati due eventi, le coordinate spaziotemporali di ciascuno di essi cambiano da un sistema di riferimento inerziale a un altro, ma la loro "distanza spaziotemporale" non varia. Questa quantità invariante, detta **intervallo spaziotemporale fra due eventi**, dipende soltanto dagli eventi stessi e non dal particolare sistema di riferimento usato per descriverli:

Dati due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  separati dagli incrementi di coordinate  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  e  $\Delta t$ , si chiama **intervallo spaziotemporale  $\Delta s$**  tra i due eventi la quantità:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

## La velocità della luce

Sappiamo che la velocità della luce è costante e vale:

$$c=299.792.458 \text{ m/s}$$

Usando il secondo luce (la distanza di 299.792.458 metri percorsi dalla luce in un secondo) al posto dei metri, la velocità della luce può essere espressa in un modo più

semplice:  **$c=1$  secondo luce/secondo**

In questo modo la relazione del tempo proprio è giusta dal punto di vista dell'analisi dimensionale:

$$\tau^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 \xrightarrow{c=1} \tau^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

## Coni di luce

La formula del tempo proprio:

$$\tau^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

consente di fare delle interessanti considerazioni.

Se consideriamo un percorso rettilineo che attraversa quantità uguali di spazio e di tempo, si ottiene tempo proprio nullo:

$$(\Delta x)^2 = (\Delta t)^2 \rightarrow \tau = 0$$

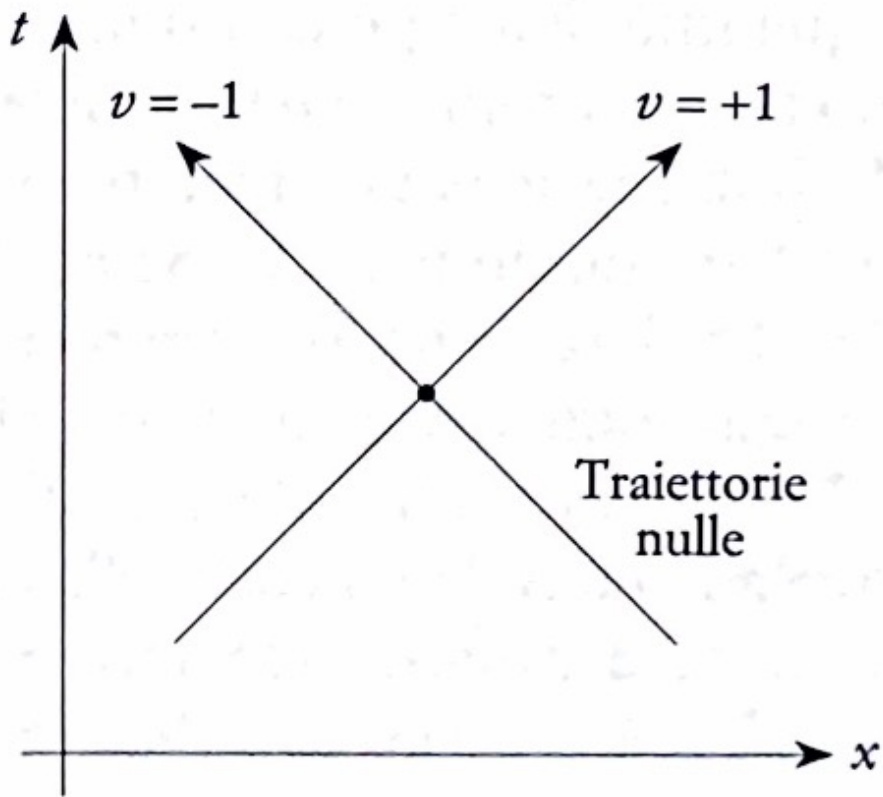
L'oggetto si muove, ma lungo il suo percorso non trascorre alcun tempo proprio.

Si tratta di traiettorie percorse alla velocità della luce:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm 1$$

Il segno meno indica che l'oggetto si muove verso sinistra e il segno più verso destra.

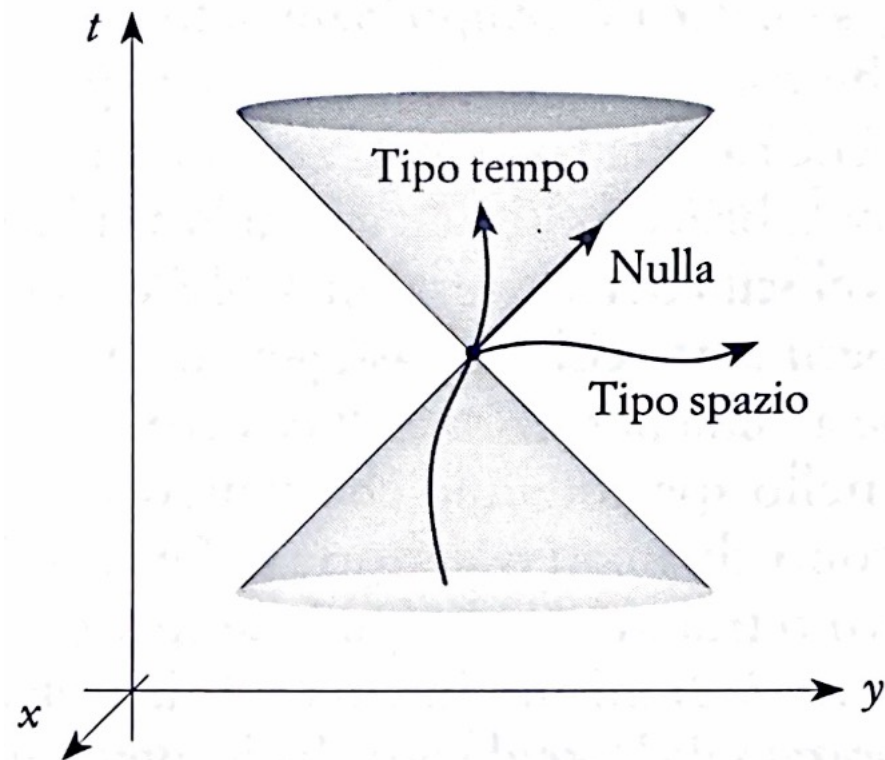
Quando si viaggia alla velocità della luce,  
compresa la luce, il tempo si ferma.



Le traiettorie nello spaziotempo percorse alla velocità della luce si chiamano **traiettorie nulle** o **traiettorie tipo luce**.

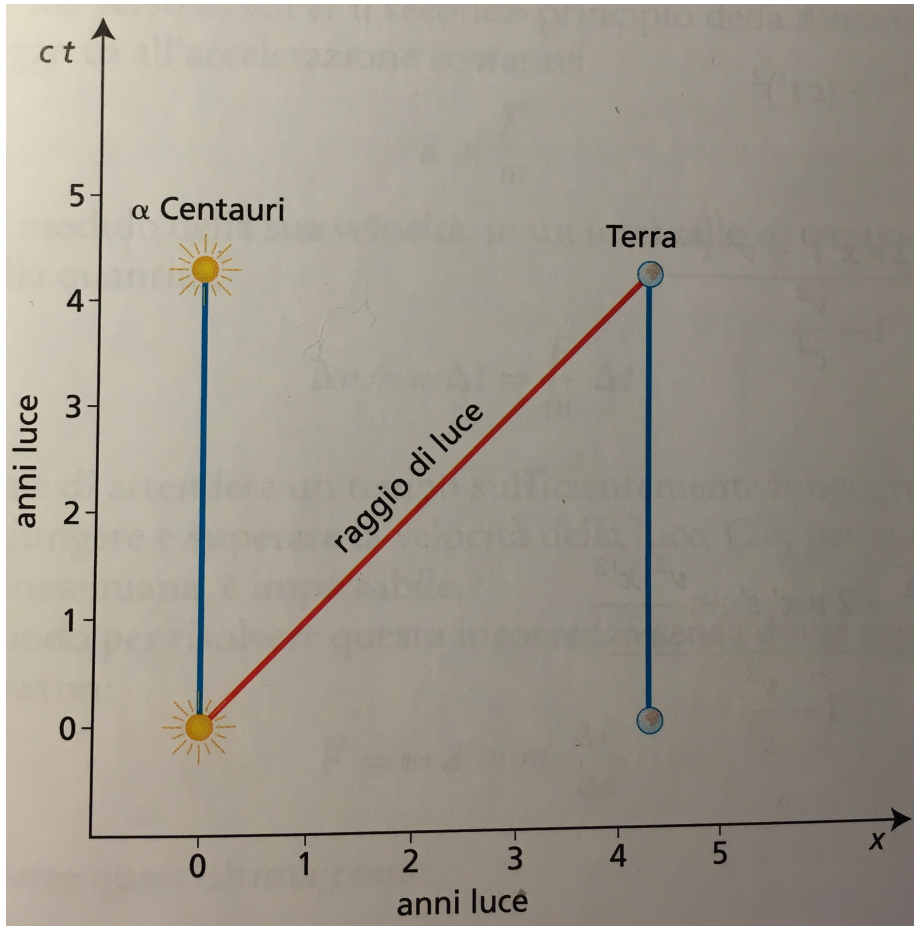
Queste traiettorie sono rappresentate da rette con pendenze di  $45^\circ$

**Traiettorie tipo tempo:** sono quelle percorse con velocità inferiore a quella della luce (si attraversa più tempo che spazio), e sono dirette verso l'alto nel diagramma spaziotempo.



**Traiettorie tipo spazio:** sono quelle percorse con velocità maggiore a quella della luce (si attraversa più spazio che tempo), e sono dirette verso i lati nel diagramma spaziotempo.

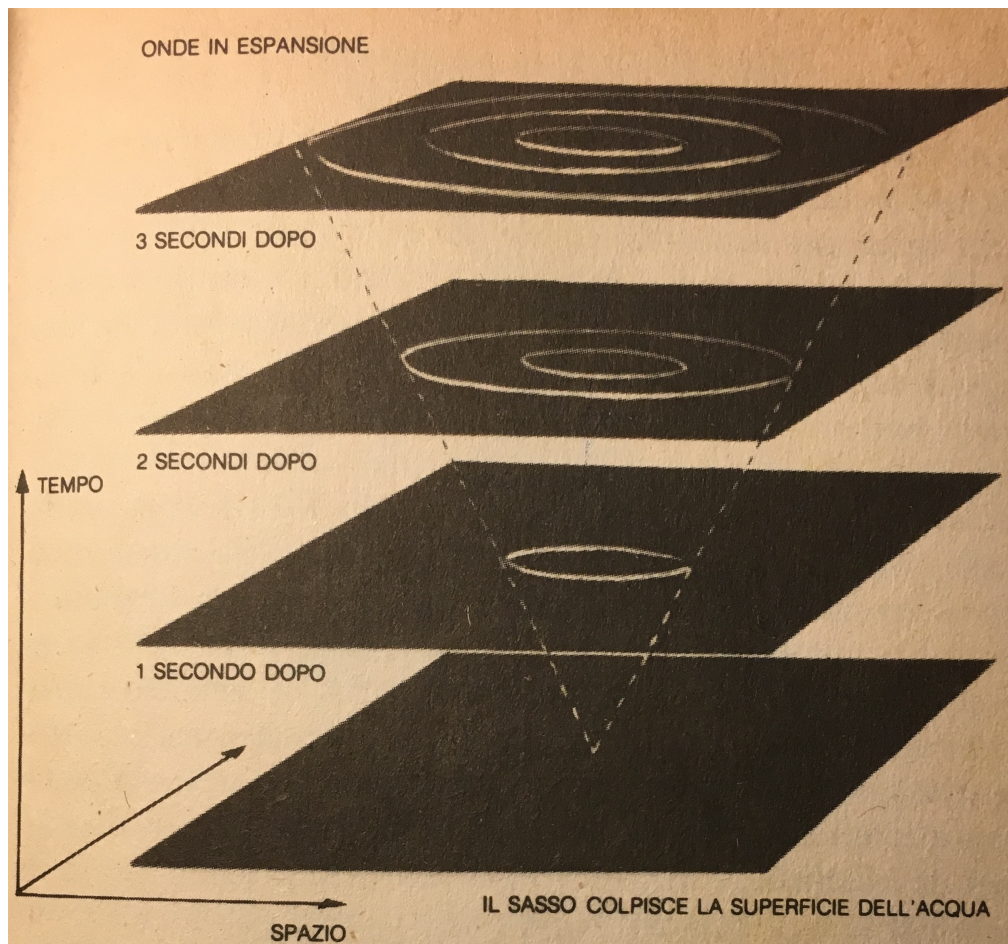
## esempio



Le linee di universo (o le loro traiettorie nello spaziotempo) di alfacentauri e della Terra sono verticali perché i due corpi celesti possono essere considerati in quiete relativa.

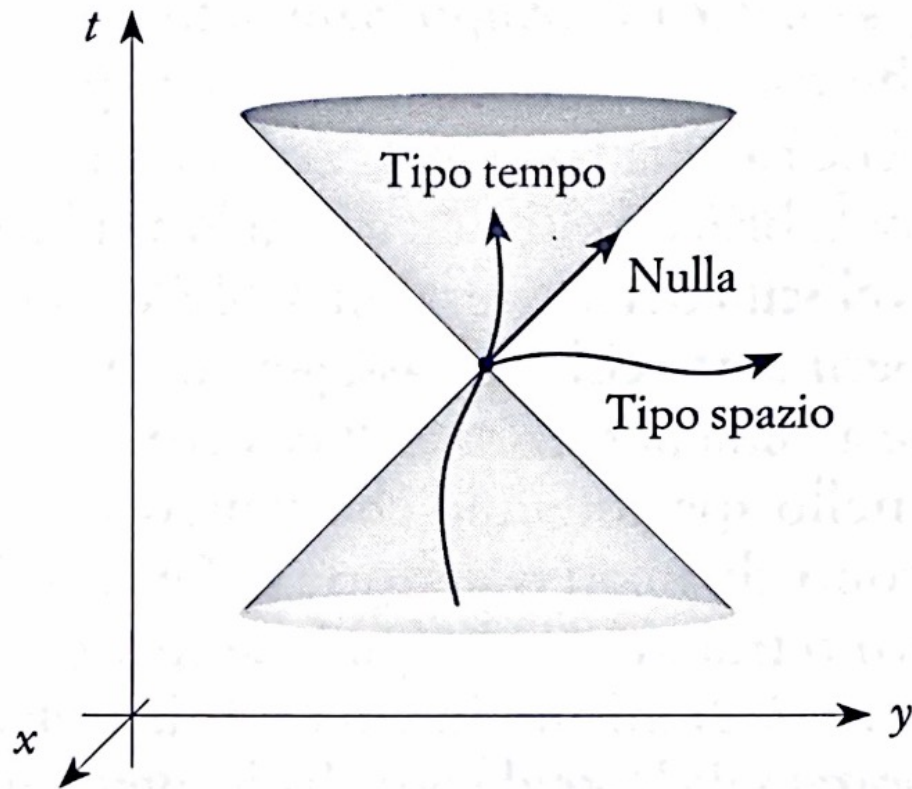
Un raggio di luce che parte dalla stella impiega 4,3 anni per raggiungere la Terra e la sua linea di universo è diagonale.



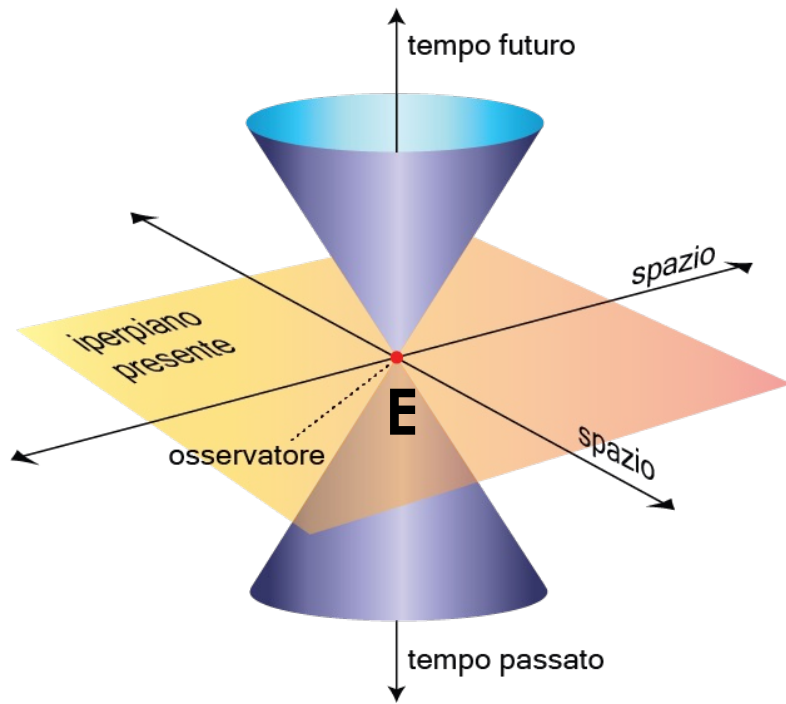


Passiamo a un modello tridimensionale formato da una superficie bidimensionale su cui si propagano delle onde e dall'asse dei tempi.

Come si può osservare dalla figura, i cerchi diventano sempre più grandi al passare del tempo. I cerchi in espansione formano nello spaziotempo un cono.

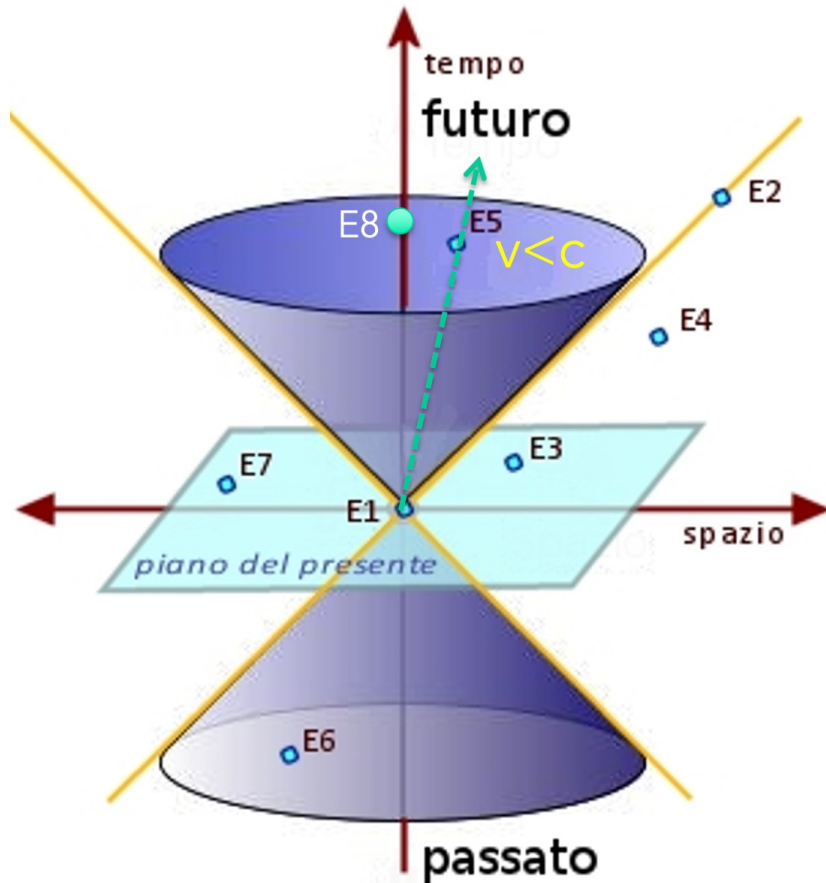


Il limite della velocità della luce implica che le traiettorie fisicamente consentite che passano attraverso un qualsiasi evento, devono rimanere all'interno dei coni di luce di quell'evento.

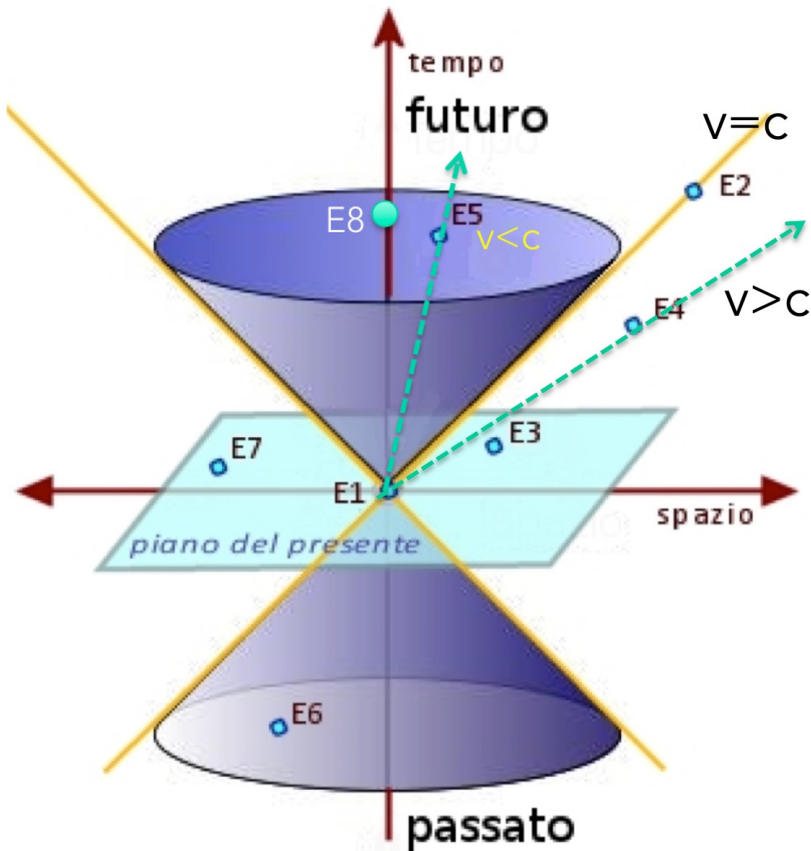


La luce che si diffonde da un evento E verso l'esterno forma un cono tridimensionale, chiamato **cono di luce del futuro dell'evento**, nello spaziotempo quadridimensionale.

Nello stesso modo possiamo disegnare un altro cono, chiamato **cono di luce del passato**, che è l'insieme di eventi da cui un impulso di luce può raggiungere l'evento E. I coni di luce del passato e del futuro di un evento A dividono lo spaziotempo in tre regioni.

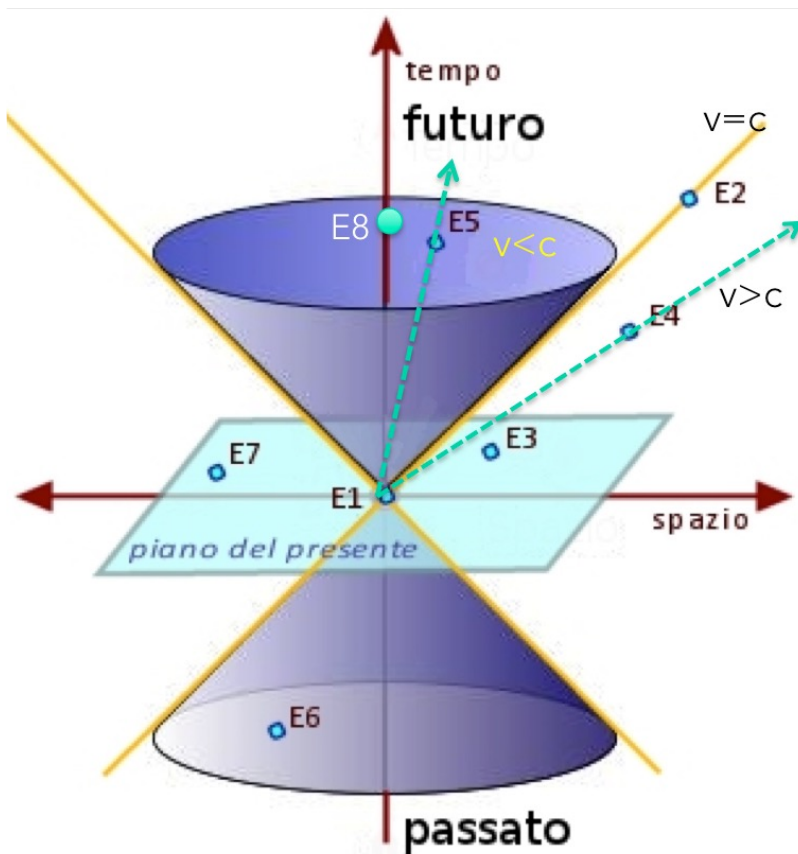


- Il futuro dell'evento E1 è la regione all'interno del cono di luce del futuro di E1: è l'insieme di tutti gli eventi che potranno risentire di ciò che accade in E1.
- E8 rappresenta il futuro di E1 senza alcun movimento nello spazio.
- E5 rappresenta il futuro di E1 in movimento nello spazio a una certa velocità  $v < c$ .



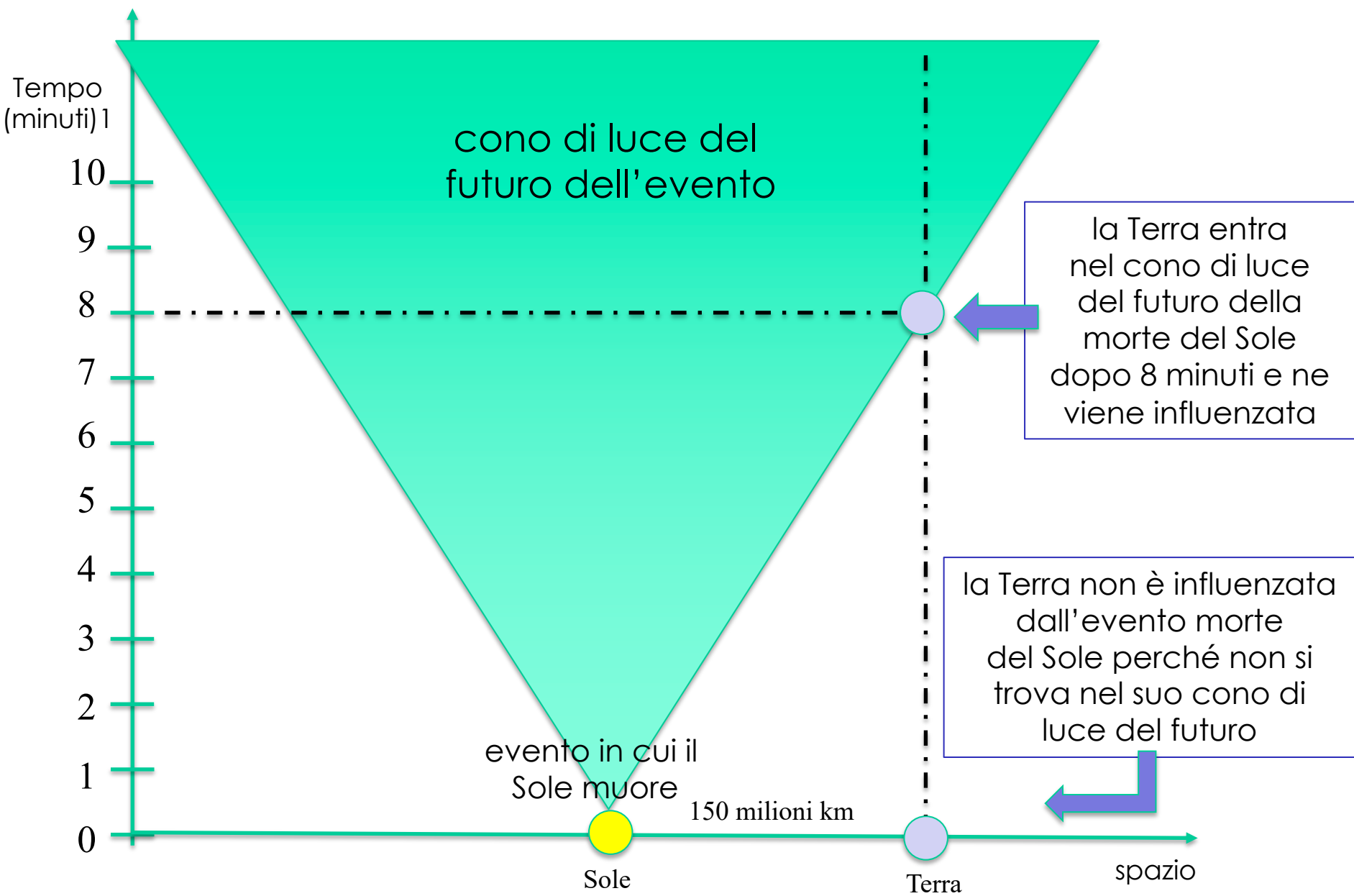
- E2 rappresenta il futuro di E1 in movimento nello spazio alla velocità della luce  $v=c$ .
- Gli eventi E3, E4, E7, esterni al cono di luce di E1, non possono essere raggiunti da segnali provenienti da E1 poiché nulla può viaggiare alla velocità superiore a quella della luce. Quindi, non possono essere influenzati da ciò che accade in E1.





Il passato dell'evento E1 è la regione all'interno del cono di luce del passato di E1: è l'insieme di tutti gli eventi da cui possono giungere in E1 segnali che si propagano alla velocità della luce o a velocità inferiore.

Il cono di luce del passato è l'insieme degli eventi (per esempio E6) che possono influire su ciò che accade in E1.



Noi non sappiamo che cosa stia accadendo adesso in regioni lontane dell'universo in quanto non siamo all'interno del loro cono di luce del futuro: la luce delle galassie che noi osserviamo oggi ha cominciato il suo viaggio milioni o miliardi di anni fa. Quando osserviamo l'universo, lo vediamo com'era nel passato.



# Meccanica relativistica

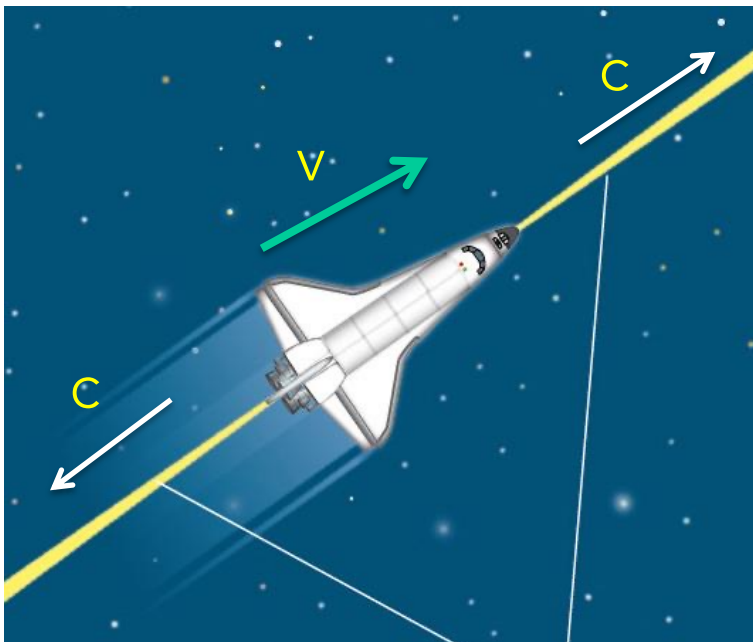
In meccanica classica, la relazione tra la velocità  $\mathbf{v}$  di un punto materiale misurata in  $S$  e la velocità  $\mathbf{v}'$  dello stesso oggetto misurata in  $S'$ , è la seguente:

### TRASFORMAZIONI DELLE VELOCITA'

La velocità  $\mathbf{v}$  di un oggetto rispetto ad  $S$  è data dalla velocità  $\mathbf{v}'$  dello stesso oggetto rispetto a  $S'$ , sommata con la velocità  $\mathbf{V}$  di  $S'$  rispetto a  $S$ :

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{V}} \qquad \vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}$$

Queste relazioni sono dimostrate a partire dalle trasformazioni di Galileo, che, come abbiamo visto, non rispettano l'invarianza della velocità della luce  $c$  nel passare da un sistema di riferimento inerziale a un altro.



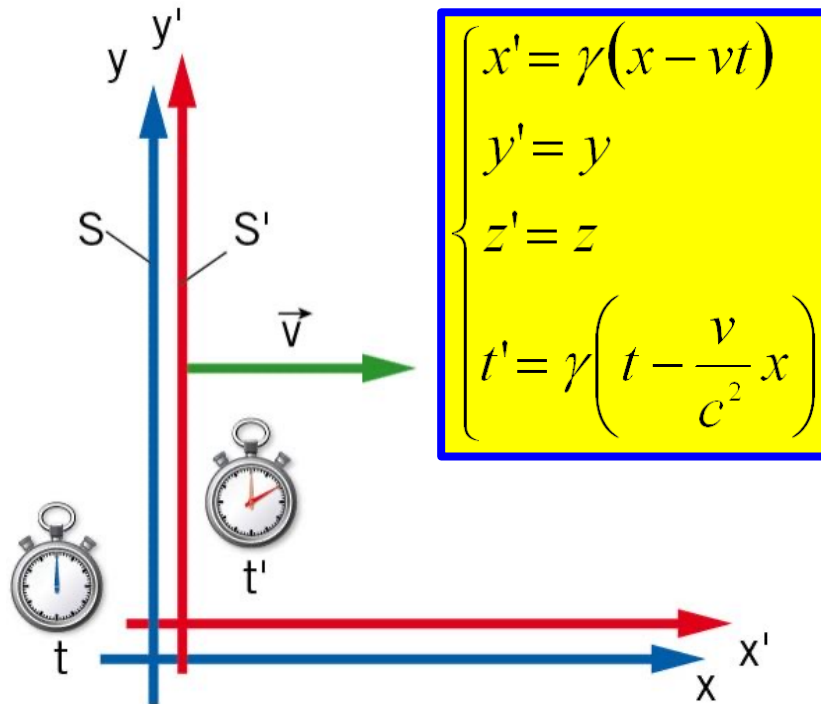
Infatti, secondo le trasformazioni classiche della velocità, otterremmo nel vuoto una velocità superiore a quella della luce:

$C+V$  (luce emessa in avanti)

$C-V$  (luce emessa all'indietro)

Affinchè la velocità della luce sia uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali (principio di invarianza della velocità della luce) è necessario riformulare la legge delle trasformazioni delle velocità.

Nella teoria della relatività, le trasformazioni di Galileo sono sostituite da quelle di Lorentz.



Dato un sistema di riferimento inerziale  $S'$  in moto con velocità  $v$  rispetto a un altro sistema di riferimento  $S$ , la legge di composizione delle velocità assume la seguente forma:

**composizione delle velocità**

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

$u$  = velocità di un oggetto misurata in  $S$

$u'$  = velocità dello stesso oggetto misurata in  $S'$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Qualunque combinazione delle velocità  $(u, u', v)$  comporta sempre una velocità minore di quella della luce. *La velocità della luce nel vuoto rappresenta il limite che le velocità non possono superare.*

casi limite

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \xrightarrow[u' \ll c, v \ll c]{u' \ll c} u = u' + v \Rightarrow \text{legge composizione classica}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \xrightarrow{u' = c} u = c$$

In accordo con il secondo postulato, la luce si propaga con la stessa velocità  $c$  rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal loro moto relativo.

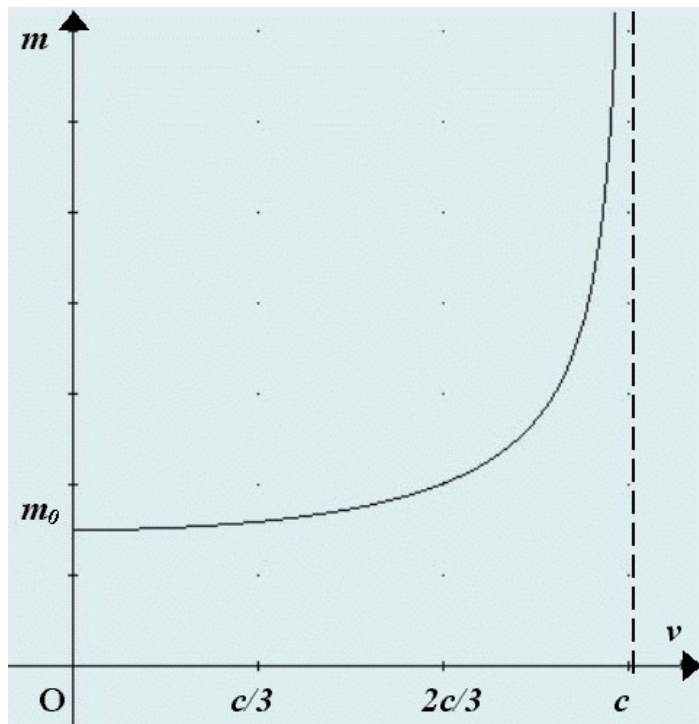
Abbiamo visto che *lunghezza* e *tempo* sono grandezze relative. Ebbene, anche la terza grandezza fondamentale della meccanica, la *massa*, presenta la stessa proprietà, ossia il valore non è costante ma dipende dal sistema di riferimento rispetto al quale è misurato.

### Massa relativistica

Se  $m_0$  è la massa a riposo (è la massa di un corpo misurata da un osservatore rispetto al quale il corpo è fermo), la massa dello stesso corpo, per un secondo osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto al primo con velocità  $v$ , è:

$$m = \gamma m_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ fattore di Lorentz}$$



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v=0} m = m_0 \Rightarrow \text{caso classico}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v=c} m \rightarrow \infty$$

Questo andamento è coerente con l'affermazione che la velocità  $c$  della luce nel vuoto è un limite superiore cui ogni oggetto dotato di massa può avvicinare ma non raggiungere.

Se la massa di un corpo è una funzione della sua velocità, allora anche la **quantità di moto** diventa una grandezza relativistica, la cui forma è più complessa di quella incontrata in meccanica classica ( $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ):

## Quantità di moto relativistica

Rispetto al sistema di riferimento fissato, se  $\mathbf{v}$  è la velocità di un corpo di massa a riposo  $m_0$ , la sua quantità di moto è:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ fattore di Lorentz}$$

Anche nella meccanica relativistica vale il:

**principio conservazione  
quantità di moto**

Per un sistema chiuso e isolato la  
quantità di moto totale si conserva:

$$\sum \vec{p}_{totale} = \text{costante}$$



La legge fondamentale della dinamica classica può essere scritta nella seguente forma:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} \Delta t = m \Delta \vec{v}$$

In dinamica relativistica la massa non è una costante, ma una grandezza variabile con la velocità, quindi la legge precedente diventa:

$$\vec{F} \Delta t = \Delta(m\vec{v})$$

Le due leggi hanno in comune la forma ma non la sostanza.

L'equazione classica, in cui la massa è una costante, forza e accelerazione sono direttamente proporzionali: è necessaria una forza costante per produrre un'accelerazione costante. Nella versione relativistica la massa non è una costante, per cui, all'aumentare della velocità anche la forza aumenta per mantenere costante l'accelerazione.

Si dimostra:

## Legge dinamica relativistica

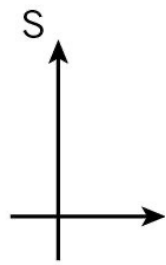
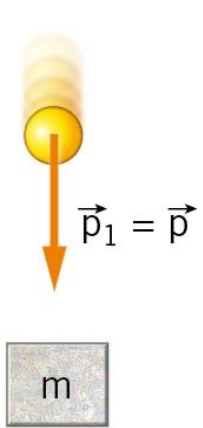
$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} m_0 \vec{v}$$

I due termini al secondo membro tendono all'infinito quando la velocità  $v$  dell'oggetto tende al valore  $c$ .

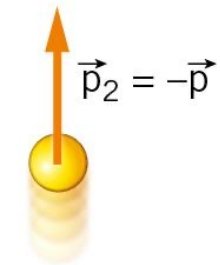
*“Mi è venuta in mente anche un’ulteriore conseguenza dell’articolo sull’elettrodinamica. E cioè che il principio di relatività, insieme alle equazioni di Maxwell, richiede che la massa sia una misura diretta dell’energia contenuta in un corpo. La luce trasferisce massa”.*

Con queste parole, contenute nell’articolo del 1905 “*L’inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?*”, Einstein sviluppò una nuova e meravigliosa idea: **la massa non è altro che una forma di energia** che va aggiunta all’energia cinetica e all’energia potenziale nel principio di conservazione dell’energia meccanica.

Per ricavare la sua celebre equazione ( $E=mc^2$ ), Einstein coniugò la teoria di Maxwell con la teoria della relatività in uno dei suoi leggendari ed efficaci esperimenti mentali.



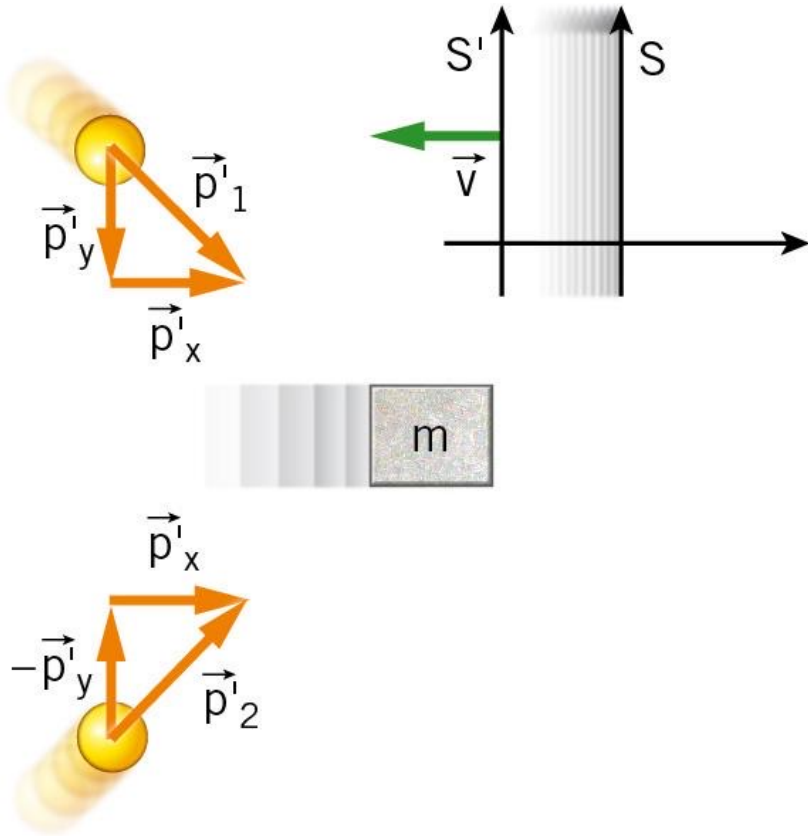
Consideriamo un corpo di massa  $m$  fermo nel sistema di riferimento  $S$  e che assorbe, nello stesso istante, due “pacchetti” di onde elettromagnetiche (per esempio due fotoni) che giungono da direzioni opposte.



Le onde elettromagnetiche, per la loro natura corpuscolare, non trasportano soltanto energia, ma anche quantità di moto. Quindi, se un corpo assorbe un fotone che ha energia  $E$ , riceve una quantità di moto:

$$p = \frac{E}{c}$$

Poiché le quantità di moto cedute al corpo dai fotoni hanno stesso modulo ma verso opposto, la somma vettoriale è nulla e, dopo l'assorbimento dell'energia, la velocità resta nulla e il corpo rimane fermo nel sistema  $S$ .



Osserviamo lo stesso fenomeno in un sistema di riferimento  $S'$  che si muove rispetto a  $S$  con una velocità  $\mathbf{v}$ .

Dal calcolo delle proprietà di questi impulsi di luce quando vengono osservati da un sistema di riferimento in moto, Einstein pervenne alla sua famosa equazione:

## Equivalenza massa-energia

L'energia totale  $E$  di un corpo di massa a riposo  $m_0$ , in movimento con velocità di modulo  $v$  rispetto a un dato sistema di riferimento, è:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$m = \gamma m_0$$

Massa "m" e energia "E" possono essere considerate equivalenti perché  $c^2$ , il fattore di conversione fra l'una e l'altra, è una costante.

Possiamo dunque affermare che:

**la massa è una forma di energia**

in quanto scompare (secondo la relazione precedente) quando compare l'energia e viceversa.

L'equivalenza massa-energia è un'elegante conclusione: massa ed energia sono manifestazioni diverse della medesima entità, come lo spazio e il tempo (spaziotempo) o il campo elettrico e il campo magnetico (campo elettromagnetico). C'è una fondamentale intercambiabilità tra esse.

Questa legge assicura alla imponderabile energia radiante della fisica classica una corrispondenza con la ordinaria materia ponderabile, e tale relazione tra massa ed energia può essere estesa a tutti gli altri tipi di energia.

Così, i campi generati da conduttori carichi e da magneti diventano una realtà fisica ponderabile: la massa del campo elettrico generato da una sfera di rame di un metro di diametro caricata al potenziale elettrico di 1000 V pesa circa  $2 \cdot 10^{-22}$  grammi.

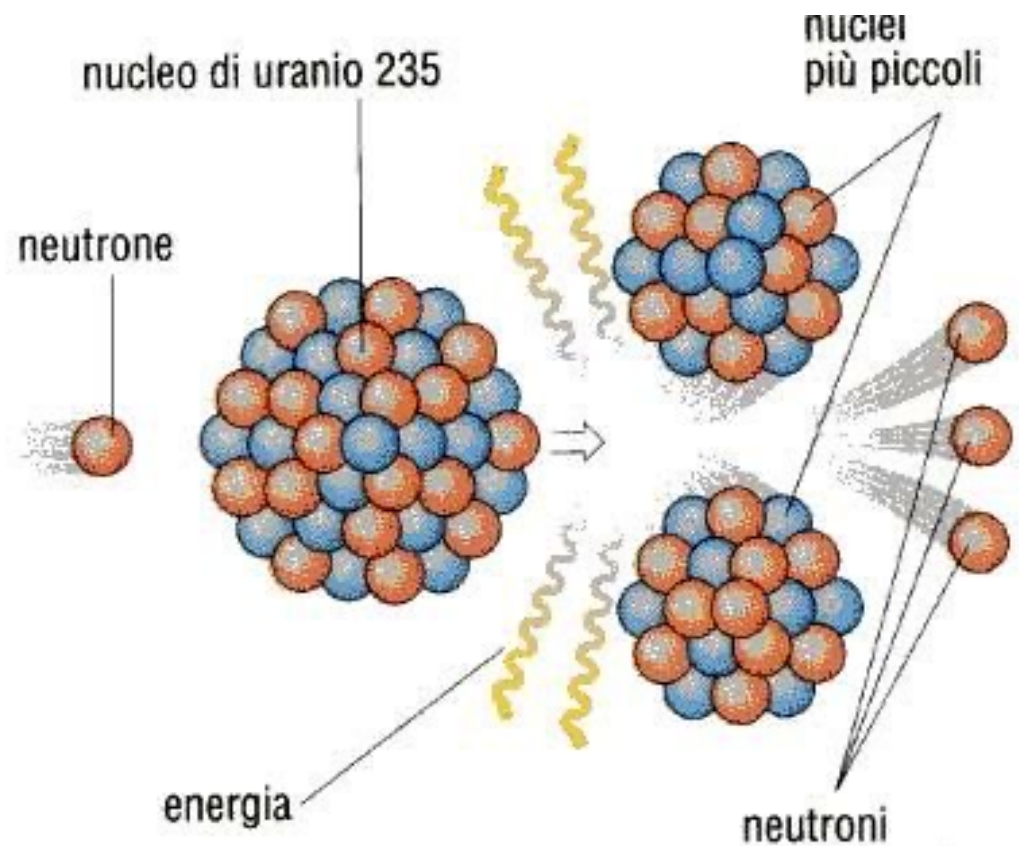
L'energia termica possiede una massa ponderabile per cui un litro d'acqua alla temperatura di  $100^{\circ}\text{C}$  pesa di più (di circa  $10^{-20}$  grammi) della stessa quantità di acqua fredda.

Viceversa, 1 grammo di materia possiede un potenziale contenuto di energia pari a  $9 \cdot 10^{13}$  J. In altri termini, l'energia contenuta nella massa di qualche grammo di materia soddisferebbe gran parte della domanda giornaliera di elettricità della città di New York.

L'equivalenza massa-energia può essere verificata in modo quantitativo nei decadimenti radioattivi, nella fissione e fusione nucleare, ed in tanti altri fenomeni riguardanti le particelle elementari, dove è possibile osservare la "materializzazione" di particelle a spese della scomparsa di energia e, viceversa, l'annichilazione di due particelle con conseguente emissione della quantità di energia prevista dalla relazione di Einstein.

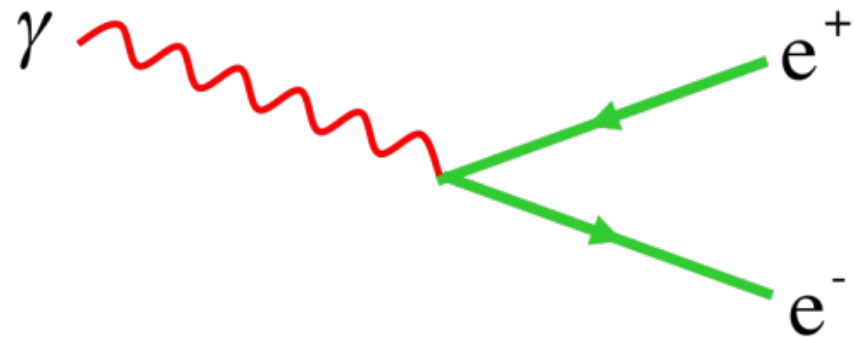
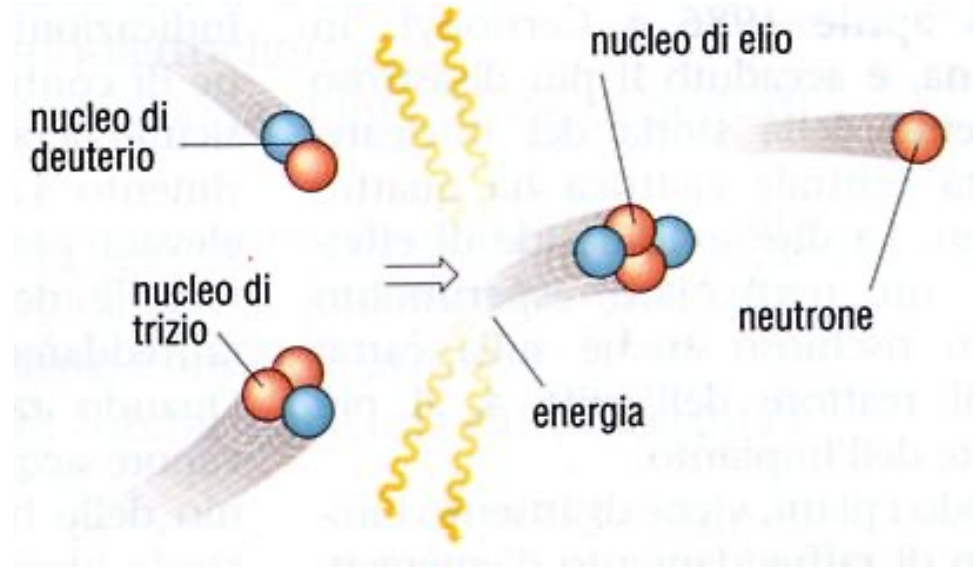


Per esempio, nella fissione di un nucleo di uranio si creano molti frammenti più leggeri, dotati di elevata energia cinetica, la cui massa totale, però, è minore della massa del nucleo di partenza.



L'energia corrispondente alla perdita di massa è esattamente uguale all'energia cinetica totale dei frammenti.

La reazione di fusione deuterio-trizio produce un atomo di elio più leggero dei reagenti e la mancanza di massa la ritroviamo sotto forma di eccesso di energia.



È possibile osservare anche la materializzazione dell'energia: un fotone  $\gamma$  (particella priva di massa e con energia  $E=hf$ ), può trasformarsi in una coppia di particelle (un elettrone  $e^-$  e un positrone  $e^+$ , antiparticella dell'elettrone):  $\gamma=e^-+e^+$

Poiché massa ed energia sono intercambiabili, i due principi classici di conservazione di queste due grandezze (conservazione della massa e dell'energia), non valgono più separatamente. Come la massa può essere distrutta e trasformata in energia, così l'energia può essere distrutta e trasformata in massa.

In definitiva basta un unico principio di conservazione:

### PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA-ENERGIA

La somma complessiva di tutte le energie e di tutte le masse dell'universo deve rimanere inalterata nel tempo.

In questo modo la teoria della relatività ha avuto una profonda influenza sulla nostra idea di materia, obbligandoci a modificare in modo sostanziale il concetto di particella. Nella fisica classica, la massa di un corpo era sempre stata associata a una sostanza materiale indistruttibile della quale si pensava fossero fatte tutte le cose. La teoria della relatività ha mostrato che la massa non ha nulla a che fare con una qualsiasi sostanza, ma è una forma di energia. Quest'ultima, poi, è una quantità dinamica associata ad attività o a processi.

L'energia cinetica è la parte dell'energia totale  $E$  che dipende dalla velocità:

è la differenza tra l'energia totale del corpo e la sua energia di riposo:

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

Utilizzando per  $m$  la sua espressione relativistica, otteniamo:

### Energia cinetica relativistica

L'energia cinetica di un corpo di massa a riposo  $m_0$  che si muove con velocità  $v$ , è:

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Negli esperimenti di fisica piuttosto che misurare la velocità delle particelle, si preferisce misurare la quantità di moto e l'energia. Quindi, è utile trovare una relazione che leghi queste due grandezze.

### Invariante energia-quantità di moto

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Il primo membro di questa relazione è uguale a una costante. Infatti, al secondo membro ci sono quantità costanti: il quadrato della massa a riposo e la quarta potenza della velocità della luce.

Allora, questa quantità (primo membro) si chiama **invariante energia-quantità di moto** in quanto non dipende dal sistema di riferimento (è invariante per trasformazioni di Lorentz).

Anche la luce, come tutte le altre onde, presenta l'effetto Doppler. Ma ci sono delle sostanziali differenze.

Per il suono abbiamo trovato due formule: quella per l'osservatore fermo e la sorgente in moto e quella per l'osservatore in moto e la sorgente ferma.

In questo fenomeno, il sistema di riferimento in cui l'aria è ferma (per esempio, quello solidale con un pedone fermo sul marciapiede) non è equivalente a quello in cui l'aria si muove (per esempio, quello solidale con un'ambulanza che ha la sirena in funzione). Per questo le formule trovate sono diverse.

Ma per il moto della luce nel vuoto non si ha la stessa situazione, visto che non esiste un mezzo materiale (il famoso etere) necessario alla luce per propagarsi.

Il sistema di riferimento  $S$  in cui la sorgente è ferma (e l'osservatore si muove con una velocità di modulo  $v$ ) è del tutto equivalente al sistema  $S'$  in cui l'osservatore è fermo.

Inoltre, per il primo postulato della relatività, la forma delle leggi fisiche deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Quindi non vi è alcuna necessità di studiare i due casi come abbiamo fatto in acustica: la formula che si ottiene in un caso è valida anche nell'altro.



## Effetto Doppler

$$f' = f \cdot \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = f \cdot \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \Rightarrow \textit{sorgente e osservatore si allontanano}$$

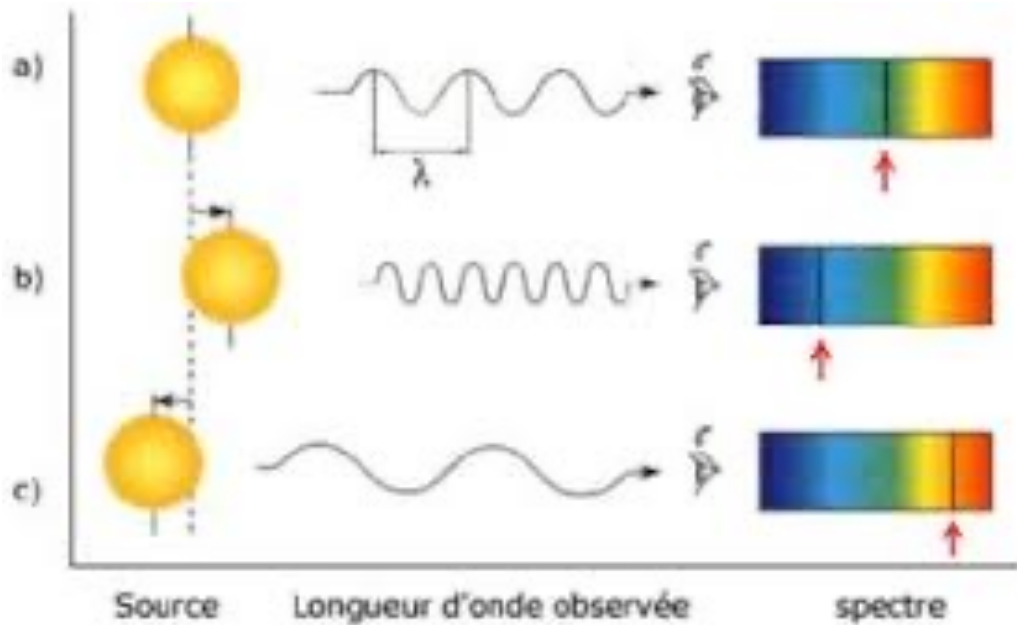
$$f' = f \cdot \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} = f \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \Rightarrow \textit{sorgente e osservatore si avvicinano}$$

$f$  = frequenza segnale luminoso emesso da una sorgente solidale con il sistema di riferimento  $S$ .

$f'$  = frequenza raccolta da un ricevitore solidale con il sistema di riferimento  $S'$ .

➤ Sorgente e osservatore che si allontanano:  $f' < f$  (oppure  $\lambda' > \lambda$ )

➤ Sorgente e osservatore che si avvicinano:  $f' > f$  (oppure  $\lambda' < \lambda$ )



In astrofisica si introduce la grandezza adimensionale  $z$ , chiamata **redshift** (spostamento verso il rosso):

$$z = \frac{f}{f'} - 1$$

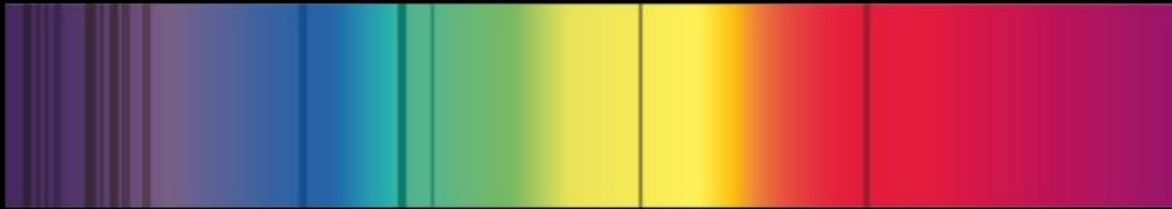
1) Figura a - Osservatore in quiete rispetto alla sorgente:  $f' = f$  ( $\lambda' = \lambda$ ) quindi  $z = 0$

2) Figura b - Sorgente e osservatore si avvicinano:  $f' > f$  ( $\lambda' < \lambda$ ) quindi  $z < 0$  (il colore della luce ricevuto è spostato verso il blu dello spettro)

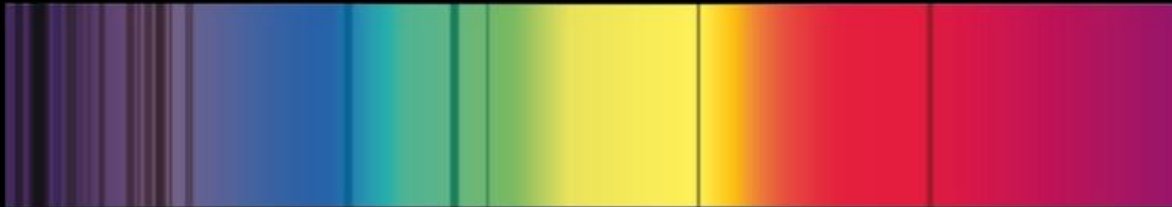
3) Figura c - Sorgente e osservatore si allontanano:  $f' < f$  ( $\lambda' > \lambda$ ) quindi  $z > 0$  (il colore della luce ricevuto è spostato verso il rosso dello spettro)

L'effetto Doppler relativistico della luce è utilizzato in astronomia per misurare la velocità con cui si muovono, rispetto alla Terra, i corpi celesti luminosi.

**Linee di assorbimento dal Sole**



**Linee di assorbimento dal superammasso di galassie BAS11**  
velocità  $v = 0,07c$       distanza  $d = 1$  miliardo di anni luce



Confronto tra lo spettro visibile emesso dal Sole e quello del superammasso di galassie BAS11.

Lo spostamento dei colori verso il rosso è evidente e da esso si calcola che BAS11 si allontana dalla Terra con una velocità pari al 7% della velocità della luce.