Liceo Scientifico "Severi"

Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo

Data: 17/03/2026 Classe: 4B

1. *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni goniometriche:*

$$2sin^2x - sinxcosx + 3cos^2x = 3 \qquad \frac{\sqrt{3}tgx - 1}{2sinx - \sqrt{3}} < 0$$

SOLUZIONE

$$2sin^2x - sinxcosx + 3cos^2x = 3$$

$$2\sin^2x - \sin x\cos x + 3\cos^2x = 3$$

$$2\sin^2x - \sin x\cos x + \cancel{3\cos^2x} \cancel{-3\cos^2x} - 3\sin^2x = 0$$

$$-\sin^2x - \sin x\cos x = 0$$

$$tg^2x + tgx = 0 \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$tgx(tgx+1) = 0$$

$$tgx = 0 \quad \vee \quad tgx = -1$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\frac{\sqrt{3}tgx - 1}{2sinx - \sqrt{3}} < 0$$

$$\frac{\sqrt{3}\,tgx - 1}{2\sin x - \sqrt{3}} < 0$$

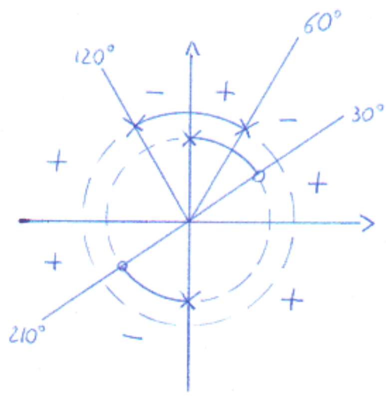
N: $tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$

D: $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

S: $30° + k360° < x < 60° + k360° \quad \vee$

$90° + k360° < x < 120° + k360° \quad \vee$

$210° + k360° < x < 270° + k360°$



2. *Studiare le seguenti funzioni:*

$$f(x) = cosx - cos^2x \qquad\qquad f(x) = arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right)$$

$$f(x) = cosx - cos^2x$$

- *Classificazione*

Funzione goniometrica intera (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\forall x \in R \quad \rightarrow \quad D =]-\infty; +\infty[$$

- *Simmetrie*

La funzione è periodica di periodo 2π:

$$cos(x + 2\pi) = cosx$$

Pertanto, basta studiarla nell'intervallo [0;2π].

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X: \begin{cases} y = cosx - cos^2x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \; cosx - cos^2x = 0 \; \rightarrow \; cosx(1 - cosx) = 0 \; \rightarrow \; cosx = 0 \; \rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3}{2}\pi \; \rightarrow \; cosx = 1 \; \rightarrow \; x = 0; x = 2\pi$$

I punti d'intersezione con l'asse delle x sono:

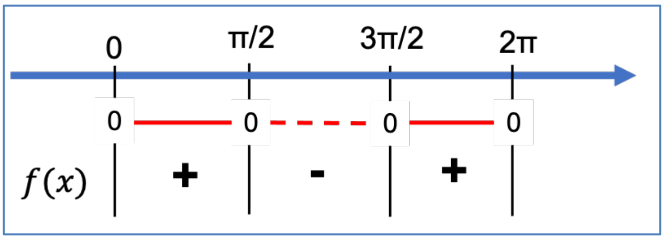
$$O = (0{,}0) \quad A = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \quad B = \left(\frac{3}{2}\pi; 0\right) \quad C = (2\pi; 0)$$

$$Y: \begin{cases} y = cosx - cos^2x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \; O = (0{,}0)$$

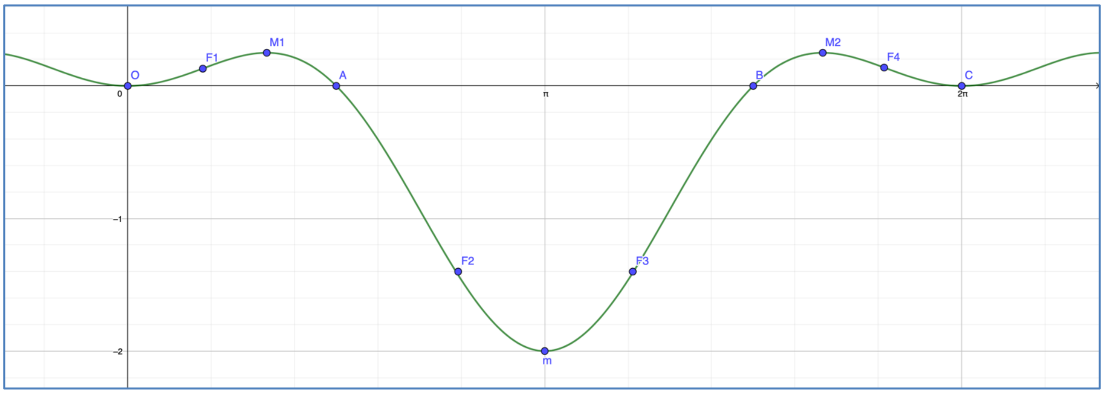
- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \; \rightarrow \; cosx - cos^2x > 0 \; \rightarrow \; cosx(1 - cosx) > 0 \; \rightarrow \; \begin{cases} cosx > 0 \\ 1 - cosx > 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} cosx > 0 \\ cosx < 1 \end{cases} \rightarrow \; \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \cup \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \\ \forall x \in D \end{cases}$$



- Grafico



$$f(x) = arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right)$$

- *Classificazione*

Funzione goniometrica inversa con logaritmo.

- *Dominio*

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + lnx \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{e} \end{cases} \rightarrow D = \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$$

- *Simmetrie*

La funzione, dato il suo dominio, non presenta simmetrie.

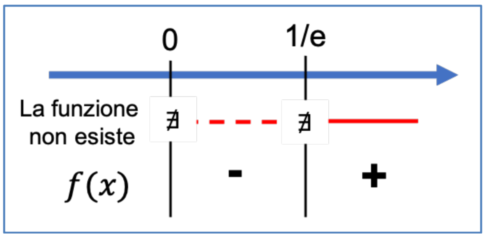
- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X: \begin{cases} y = arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{1+lnx}\right) = 0 \rightarrow \nexists\ intersezioni$$

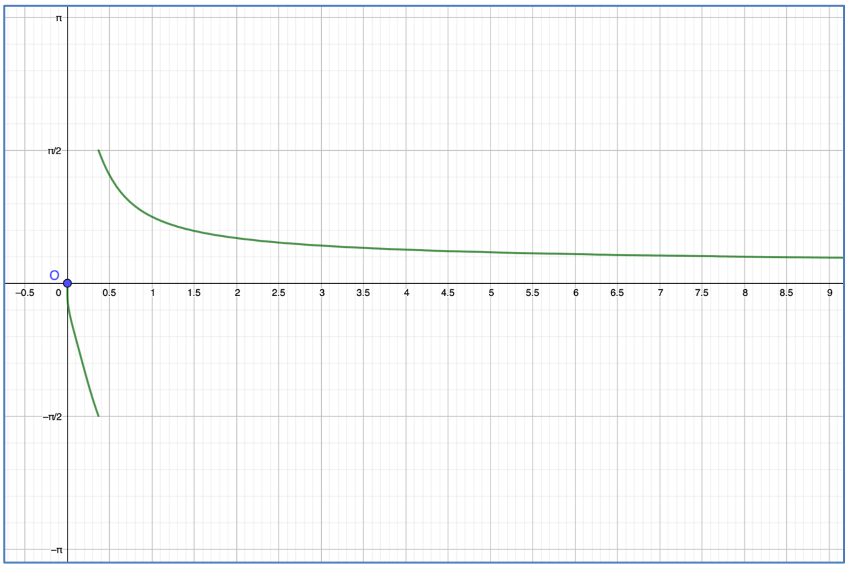
$$Y: \begin{cases} y = arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right) \\ x = 0 \notin D \end{cases} \rightarrow \nexists\ intersezioni$$

- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \ \rightarrow \ arctg\left(\frac{1}{1+lnx}\right) > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{1+lnx}\right) > 0 \ \rightarrow \ 1+lnx > 0 \ \rightarrow \ x > \frac{1}{e}$$



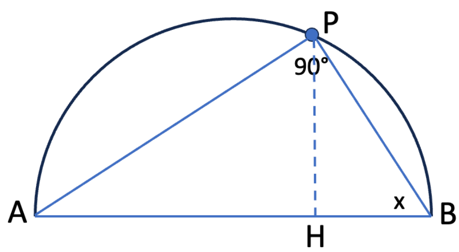
- Grafico



3. Problema

ABC è un triangolo inscritto in una semicirconferenza il cui diametro AB=4. Calcolare la posizione di C sulla semicirconferenza affinché l'area del triangolo misuri $2\sqrt{3}$.

Soluzione



$$\widehat{APB} \ triangolo \ rettangolo \ in \ P \ \rightarrow \ \widehat{ABP} = x$$

$$1° \ teorema \ \rightarrow \ \overline{PB} = \overline{AB} \cdot cosx = 4cosx$$

$$1° \ teorema \ \rightarrow \ \overline{PH} = \overline{PB} \cdot sinx = 4cosxsinx$$

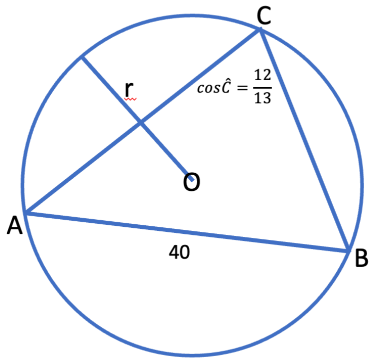
$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PH}}{2} = 2\sqrt{3} \ \rightarrow \ \frac{4 \cdot 4cosxsinx}{2} = 2\sqrt{3} \ \rightarrow \ 4cosxsinx = \sqrt{3} \ \rightarrow 2sin2x = \sqrt{3}$$

$$sin2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2x = 60° \xrightarrow{soluz\rightarrow} 2x = 60° \cup 2x = 120° \xrightarrow{soluzione} x = 30° \cup x = 60°$$

4. Problema

Calcolare il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, sapendo che AB=40 cm e che $cos\widehat{ACB} = \frac{12}{13}$

Soluzione



$$sin\hat{C} = \sqrt{1 - cos\hat{C}^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

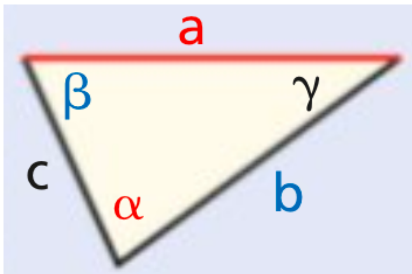
$$teorema\ corda\ \rightarrow \overline{AB} = 2rsin\hat{C}\ \rightarrow r = \frac{\overline{AB}}{2sin\hat{C}} = \frac{40}{2 \cdot \frac{5}{13}} = 52\ cm$$

5. Problema

Dato il triangolo in figura, noti alcuni elementi, calcolare ciò che è richiesto utilizzando il teorema dei seni.

$$1)\ a = 12 \quad b = 9 \quad \beta = 30° \quad sin\alpha = ?$$

$$2)\ a = 12\sqrt{2} \quad \beta = 60° \quad \gamma = 45° \quad b = ? \quad c = ?$$



Soluzione

$$1)\ a = 12 \quad b = 9 \quad \beta = 30° \quad sin\alpha = ?$$

$$teorema\ dei\ seni\ \rightarrow \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} \rightarrow sin\alpha = \frac{asin\beta}{b}$$

$$= \frac{12 \cdot sin30°}{9} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2}}{9} = \frac{2}{3}$$

$$2)\ a = 12\sqrt{2} \quad \beta = 60° \quad \gamma = 45° \quad b = ? \quad c = ?$$

$$\alpha = 180° - (60° + 45°) = 75°$$

$$teorema\ dei\ seni \rightarrow \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} \rightarrow b = \frac{sin\beta}{sin\alpha} \cdot a = \frac{sin60°}{sin75°} \cdot 12\sqrt{2} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot 12\sqrt{2}=\frac{24\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\xrightarrow{razionalizzare}\frac{24\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{144-48\sqrt{3}}{4}=$$

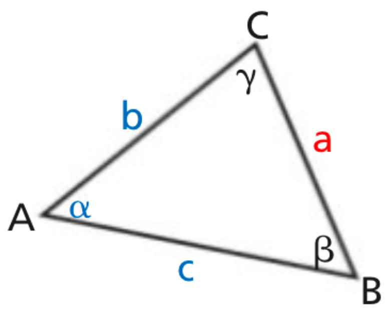
$$=\frac{48(3-\sqrt{3})}{4}=12(3-\sqrt{3})$$

$$teorema\ dei\ seni\rightarrow\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}\rightarrow c=\frac{sin\gamma}{sin\alpha}\cdot a=\frac{sin45°}{sin75°}\cdot 12\sqrt{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot 12\sqrt{2}=\frac{24}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\xrightarrow{razionalizzare}\frac{24}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{24(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

6. *Problema*

Dato il triangolo in figura, noti alcuni elementi, calcolare ciò che è richiesto utilizzando il teorema del coseno.



1) $a=12\quad b=6\quad \gamma=\frac{\pi}{3}\quad c=?$

2) $a=24\quad b=12\quad c=12\sqrt{3}\quad \gamma=?$

Soluzione

1) $a=12\quad b=6\quad \gamma=\frac{\pi}{3}\quad c=?$

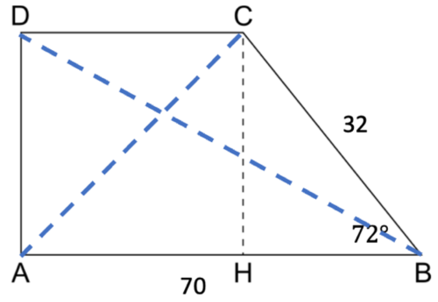
$$c^2=a^2+b^2-2abcos\gamma\ \rightarrow\ c=\sqrt{a^2+b^2-2abcos\gamma}=\sqrt{144+36-2\cdot 12\cdot 6\cdot\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$$

3) $a=24\quad b=12\quad c=12\sqrt{3}\quad \gamma=?$

$$c^2=a^2+b^2-2abcos\gamma\ \rightarrow\ cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{576+144-432}{576}=0{,}5\ \rightarrow\ \gamma=60°$$

7. Problema

In un trapezio rettangolo ABCD la base maggiore AB=70 cm, il lato obliquo CB=32 cm, $\widehat{ABC} = 72°$. Calcola le lunghezze delle diagonali e del perimetro del trapezio.



Soluzione

$$teorema\ coseno \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{CB}cos\hat{B}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4900 + 1024 - 1384} = \sqrt{4540} = 67{,}4\ cm$$

$$\overline{CH} = \overline{AD} = \overline{CB}sin\hat{B} = 32 \cdot sin72° = 30{,}4\ cm$$

$$\overline{HB} = \overline{CB}cos\hat{B} = 32 \cdot cos72° = 10\ cm$$

$$\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{HB} = 70 - 10 = 60\ cm$$

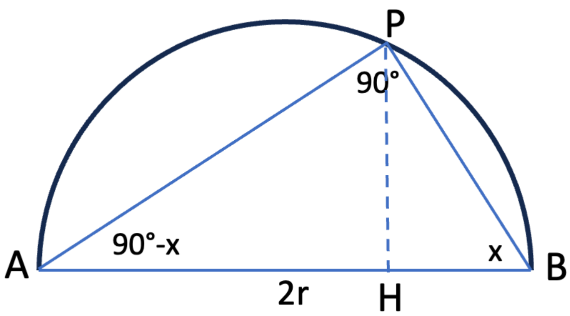
$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{4900 + 924} = \sqrt{5824} = 76{,}3\ cm$$

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 70 + 32 + 60 + 30{,}4 = 192{,}4\ cm$$

8. Problema (facoltativo)

Data la semicirconferenza di diametro AB=2r, siano P un punto su di essa e H la proiezione di P sul diametro AB. 1) Determinare la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{AH} + \overline{PH}}{\overline{HB}}$$



in funzione dell'angolo $\widehat{PBA} = x$. 2) Calcolare per quale valore di x si ha f(x)=2.

Soluzione

1) Applichiamo il primo teorema ai vari triangoli rettangoli:

$$condizione\ geometrica \rightarrow 0° < \widehat{PBA} < 90°$$

$$\overline{BP} = \overline{AB} \cdot cosx = 2rcosx \qquad \overline{PH} = \overline{PB} \cdot sinx = 2rcosxsinx$$

$$\overline{HB} = \overline{PB} \cdot cosx = 2rcos^2x \qquad \overline{AP} = \overline{AB} \cdot sinx = 2rsinx$$

$$\overline{AH} = \overline{AP} \cdot cos(90° - x) = 2rsinxsinx = 2rsin^2x$$

La forma della funzione f(x) in funzione dell'angolo $\widehat{PBA} = x$ è la seguente:

$$f(x) = \frac{\overline{AH} + \overline{PH}}{\overline{HB}} \rightarrow f(x) = \frac{2rsin^2x + 2rcosxsinx}{2rcos^2x} = \frac{sin^2x + cosxsinx}{cos^2x}$$

Dividendo numeratore e denominatore per cos^2x, si ottiene:

$$f(x) = tan^2x + tanx$$

2) Per calcolare per quale valore di x si ha f(x)=2, dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$f(x) = 2 \rightarrow tan^2x + tanx = 2 \rightarrow tan^2x + tanx - 2 = 0 \xrightarrow{z=tanx} z^2 + z - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 \rightarrow z = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} tanx = 1 \\ tanx = -2 \end{array}\right. \xrightarrow{soluzione} \left[\begin{array}{r} x = \frac{\pi}{4} \\ x = arctan(-2) \approx 117° \ (non\ acc.) \end{array}\right.$$