Liceo Scientifico "Severi"
Salerno

VERIFICA DI MATEMATICA

Docente: Pappalardo Vincenzo
Data: 17/03/2026 Classe: 4B

1. *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni goniometriche:*

$$\frac{1-cos2x}{\sqrt{2}sinx}=\frac{sin2x}{1+cos2x} \qquad \frac{sinx}{1+cosx}>2-cotgx$$

SOLUZIONE

$$\frac{1-cos2x}{\sqrt{2}sinx}=\frac{sin2x}{1+cos2x}$$

$\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ $\qquad \sin x \neq 0 \qquad \cos 2x \neq -1$

$1-\cos^2 2x=\sqrt{2}\sin 2x \sin x$

$\sin^2 2x-\sqrt{2}\sin 2x \sin x=0$

$\sin 2x\left(2\sin x\cos x-\sqrt{2}\sin x\right)=0$

$\sin 2x\cdot\sin x\cdot\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0$

$2\sin^2 x\cos x\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0$

$\cos x=0 \quad \vee \quad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \vee \quad x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$

non accett.

$$\frac{sinx}{1+cosx}>2-cotgx$$

$\frac{\sin x}{1+\cos x}>2-\cot g x$

$\frac{\sin x}{1+\cos x}-2+\frac{\cos x}{\sin x}>0$

$\frac{\sin^2 x-2\sin x-2\sin x\cos x+\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)\cdot\sin x}>0$

$\frac{-2\sin x(1+\cos x)+1+\cos x}{(1+\cos x)\sin x}>0$

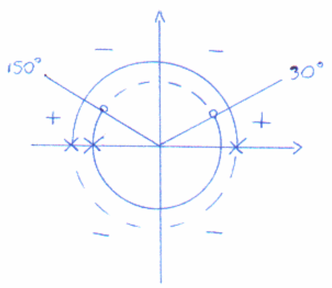
$\frac{(1+\cos x)(1-2\sin x)}{(1+\cos x)\sin x}>0$

$\cos x\neq -1 \qquad x\neq 2k\pi+\pi$

$\frac{1-2\sin x}{\sin x}>0$

$F_1 \qquad 1-2\sin x>0 \qquad \sin x<\frac{1}{2}$

$F_2 \qquad \sin x>0$



S:

$2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee$

$\frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<\pi+2k\pi$

2. *Studiare le seguenti funzioni:*

$$f(x) = 2senx - sen2x \qquad\qquad f(x) = e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\boxed{f(x) = 2senx - sen2x}$$

- *Classificazione*

Funzione goniometrica intera (funzione trascendente).

- *Dominio*

$$\forall x \in R \quad \rightarrow \quad D =]-\infty; +\infty[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x) = 2sen(-x) - sen2(-x) = -2senx + sen2x = -(2senx - sen2x) = -f(x)$$

La funzione è dispari. La funzione è anche periodica di periodo 2π, per cui, basta studiarla nell'intervallo [0;2π].

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X: \begin{cases} y = 2senx - sen2x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2senx - sen2x = 0 \rightarrow 2senx - 2senxcosx = 0$$

$$\rightarrow \quad senx(1 - cosx) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} senx = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \\ cosx = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

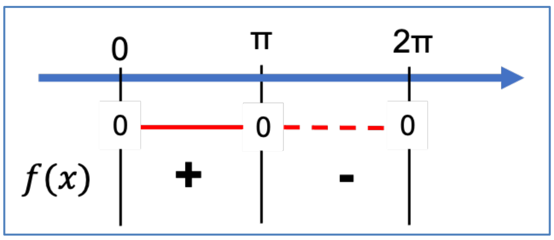
I punti d'intersezione con l'asse delle x sono:

$$O = (0{,}0) \qquad A = (\pi; 0) \qquad B = (2\pi; 0)$$

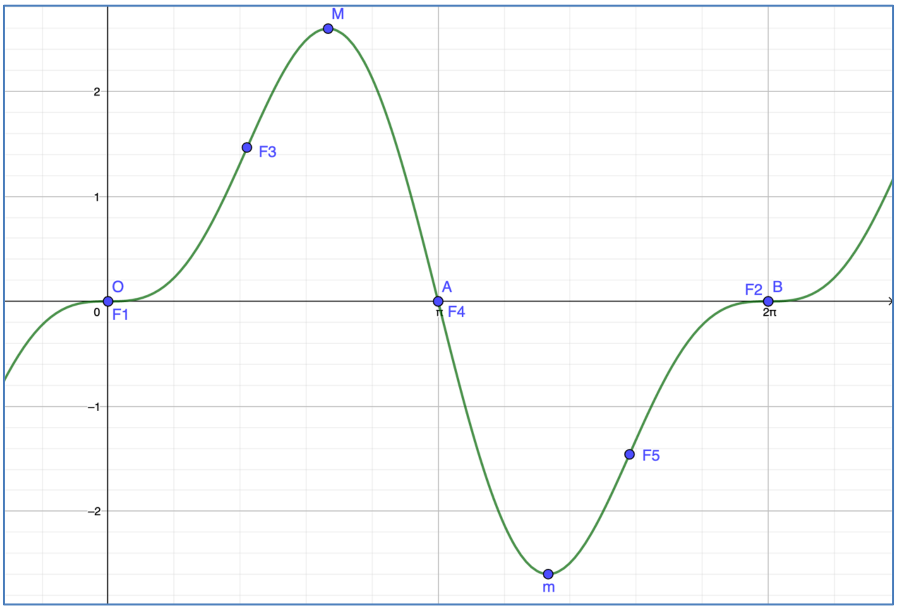
$$Y: \begin{cases} y = 2senx - sen2x \\ x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad O = (0{,}0)$$

- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad senx(1 - cosx) > 0 \rightarrow \begin{cases} senx > 0 \\ 1 - cosx > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} senx > 0 \\ cosx < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < \pi \\ \forall x \in D \end{cases}$$



- Grafico



$$f(x) = e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}$$

- *Classificazione*

Funzione esponenziale, con funzione goniometrica inversa come esponente.

- *Dominio*

$$x \neq 0 \rightarrow \ D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

- *Simmetrie*

$$f(-x) = e^{arctg\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-arctg\left(\frac{1}{x}\right)} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani (né pari, né

- *Intersezioni con gli assi cartesiani*

$$X: \begin{cases} y = e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \ e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)} = 0 \ \rightarrow \ mai \ \rightarrow \ \nexists \ intersezioni \ con \ l'asse \ x$$

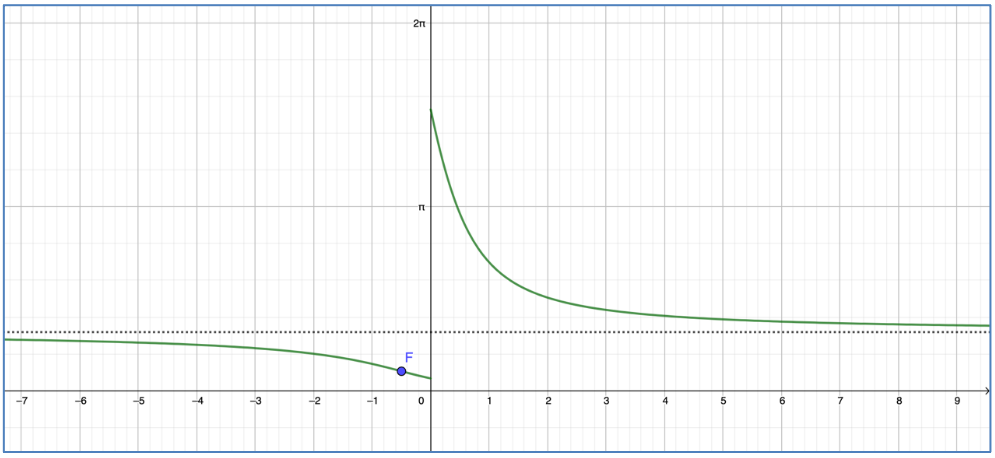
$$Y: \begin{cases} y = e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)} \\ x = 0 \notin D \end{cases} \rightarrow \ \nexists \ intersezione \ con \ l'asse \ y$$

- *Segno della funzione*

$$f(x) > 0 \ \rightarrow \ e^{arctg\left(\frac{1}{x}\right)} > 0 \ \rightarrow \ \forall x \in D$$

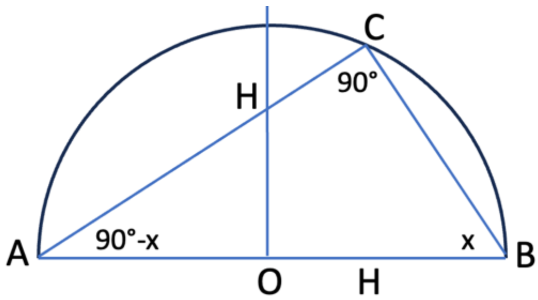
La funzione è sempre positiva nel suo dominio.

- Grafico



3. *Problema*

Inscrivi un triangolo ABC in una semicirconferenza di centro O e diametro AB=4a, in modo che l'angolo in B risulti maggiore dell'angolo in A. Da O conduci la perpendicolare al diametro che incontra AC in H. Determina l'angolo in B in modo che il rettangolo di base OH e altezza AC abbia area $4a^2$.



Soluzione

$$area\ rettangolo \rightarrow S = \overline{OH} \cdot \overline{AC} = 4a^2$$

$$1°\ teorema \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot sinx = 4asinx$$

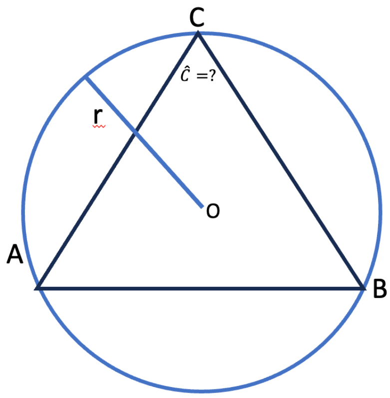
$$2°\ teorema \rightarrow \overline{OH} = \overline{OA} \cdot tan(90° - x) = 2acotx$$

$$2acotx \cdot 4asinx = 4a^2 \rightarrow 2\frac{cosx}{sinx} \cdot sinx = 1 \xrightarrow{x \neq k\pi} cosx = \frac{1}{2}$$

$$soluzione \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \left(x = \frac{5}{3}\ non\ accettabile\right)$$

4. Problema

Nel triangolo isoscele ABC, il rapporto fra il raggio della circonferenza circoscritta e la base AB è $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Calcolare l'ampiezza dell'angolo al vertice $\widehat{ACB}$.



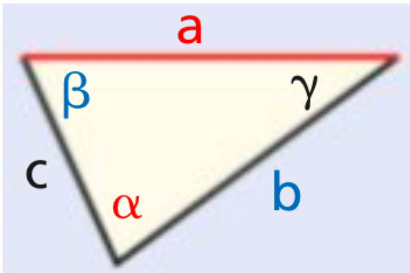
Soluzione

$$teorema\ corda\ \rightarrow \overline{AB} = 2r sin\hat{C} \rightarrow \frac{r}{\overline{AB}} = \frac{1}{2sin\hat{C}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$2sin\hat{C} = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow sin\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \hat{C} = 45°\ oppure\ 135°$$

5. Problema

Dato il triangolo in figura, noti alcuni elementi, calcolare ciò che è richiesto utilizzando il teorema dei seni.



$$1)\ a = 20 \quad b = 9 \quad \alpha = 120° \quad sin\beta = ?$$

$$2)\ \alpha = 82° \quad \beta = 36° \quad c = 63 \quad a = ? \quad b = ?$$

Soluzione

$$1)\ a = 20 \quad b = 9 \quad \alpha = 120° \quad sin\beta = ?$$

$$teorema\ dei\ seni\ \rightarrow \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} \rightarrow sin\beta = \frac{b sin\alpha}{a} = \frac{9 \cdot sin120°}{20} = \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{20} = \frac{9\sqrt{3}}{40}$$

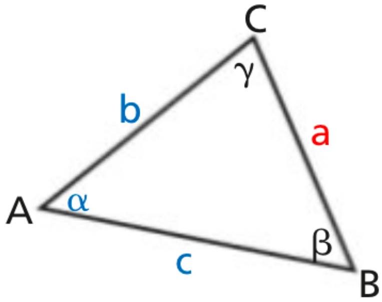
$$4)\ \alpha = 82° \quad \beta = 36° \quad c = 63 \quad a = ? \quad b = ?$$

$$\gamma = 180° - (82° + 36°) = 118°$$

$$teorema\ dei\ seni\ \rightarrow \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{sin\beta}{sin\gamma} \cdot c = \frac{sin36°}{sin118°} \cdot 63 \approx 42 \\ a = \frac{sin\alpha}{sin\beta} \cdot b = \frac{sin82°}{sin36°} \cdot 42 \approx 70{,}5 \end{cases}$$

6. Problema

Dato il triangolo in figura, noti alcuni elementi, calcolare ciò che è richiesto utilizzando il teorema del coseno.



$$1)\ a = 15 \quad c = 21 \quad \beta = 40° \quad b = ?$$

$$2)\ a = 5 \quad c = 9 \quad \beta = arccos\frac{1}{3} \quad b = ?$$

Soluzione

$$1)\ a = 15 \quad c = 21 \quad \beta = 40° \quad b = ?$$

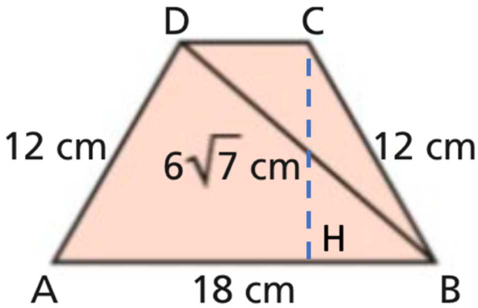
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2abcos\beta \rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2abcos\beta} = \sqrt{225 + 441 - 485} = 13{,}5$$

$$2)\ a = 5 \quad c = 9 \quad \beta = arccos\frac{1}{3} \quad b = ?$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2abcos\beta \rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2abcos\beta} = \sqrt{25 + 81 - 30} = \sqrt{76}$$

7. Problema

Determina gli angoli, il perimetro e l'area del trapezio in figura.



Soluzione

$$teorema\ coseno \rightarrow \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} cos\hat{A}$$

$$cos\hat{A} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{DB}^2}{2\overline{AB} \cdot \overline{AD}} = \frac{324 + 144 - 252}{432} = 0{,}5$$

$$\hat{A} = \hat{B} = 60°$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 360° - (\hat{A} + \hat{B}) = 360° - 120° = 240°$$

$$\hat{C} = \hat{D} = 120°$$

$$\overline{CH} = \overline{CB} sin\hat{B} = 12 \cdot sin60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$$

$$\overline{HB} = \overline{CB} cos\hat{B} = 12 \cdot cos60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6\ cm$$

$$\overline{DC} = \overline{AB} - 2\overline{HB} = 18 - 12 = 6\ cm$$

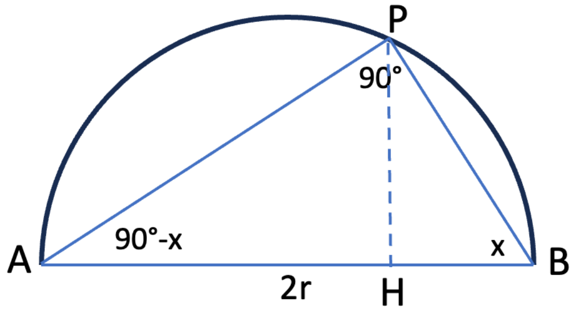
$$P = \overline{AB} + \overline{DC} + 2\overline{BC} = 18 + 6 + 24 = 48\ cm$$

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{CH} = \frac{18 + 6}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \approx 125\ cm^2$$

8. Problema

Data la semicirconferenza di diametro AB=2r, siano P un punto su di essa e H la proiezione di P sul diametro AB. 1) Determinare la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{AH} + \overline{PH}}{\overline{HB}}$$



in funzione dell'angolo $\widehat{PBA} = x$. 2) Calcolare per quale valore di x si ha f(x)=2.

Soluzione

1) Applichiamo il primo teorema ai vari triangoli rettangoli:

$$condizione\ geometrica\ \rightarrow\ 0° < \widehat{PBA} < 90°$$

$$\overline{BP} = \overline{AB} \cdot cosx = 2rcosx \qquad \overline{PH} = \overline{PB} \cdot sinx = 2rcosxsinx$$

$$\overline{HB} = \overline{PB} \cdot cosx = 2rcos^2x \qquad \overline{AP} = \overline{AB} \cdot sinx = 2rsinx$$

$$\overline{AH} = \overline{AP} \cdot cos(90° - x) = 2rsinxsinx = 2rsin^2x$$

La forma della funzione f(x) in funzione dell'angolo $\widehat{PBA} = x$ è la seguente:

$$f(x) = \frac{\overline{AH} + \overline{PH}}{\overline{HB}} \rightarrow f(x) = \frac{2rsin^2x + 2rcosxsinx}{2rcos^2x} = \frac{sin^2x + cosxsinx}{cos^2x}$$

Dividendo numeratore e denominatore per cos^2x, si ottiene:

$$f(x) = tan^2x + tanx$$

2) Per calcolare per quale valore di x si ha f(x)=2, dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$f(x) = 2 \; \rightarrow \; tan^2x + tanx = 2 \; \rightarrow \; tan^2x + tanx - 2 = 0 \xrightarrow{z=tanx} z^2 + z - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 \rightarrow z = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} tanx = 1 \\ tanx = -2 \end{array}\right. \xrightarrow{soluzione} \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} \\ x = arctan(-2) \approx 117° \; (non \; acc.) \end{array}\right.$$