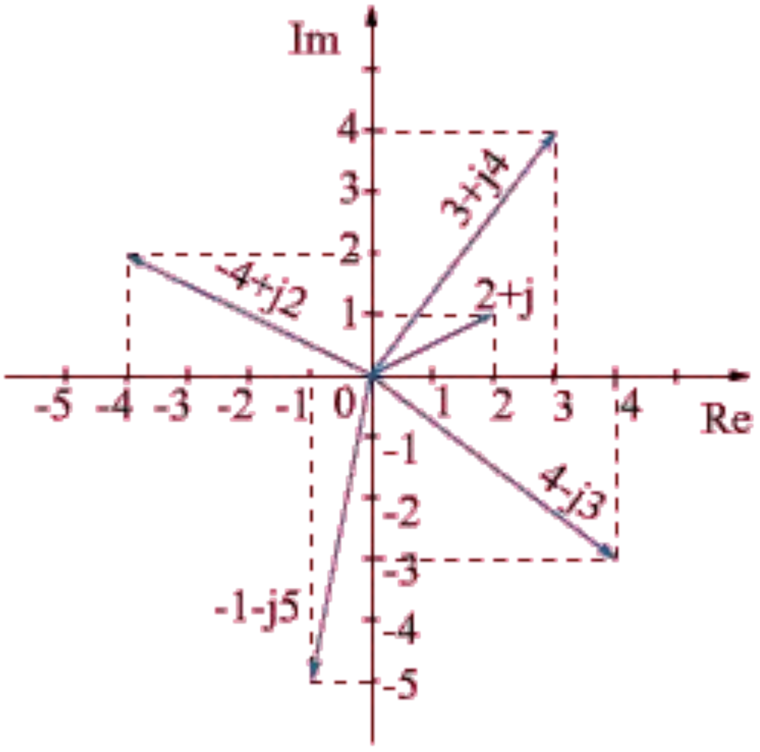
I NUMERI COMPLESSI

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica



Problema:

"Esiste la radice quadrata di un numero reale x negativo?"

$$\sqrt{(-4)} = ?$$

Nell'insieme dei numeri reali R il problema non ammette soluzione, perché:

"Non esiste nessun numero reale x che elevato al quadrato dia come risultato un numero negativo".

$$(-2)^2 = -4 \quad non\ \grave{e}\ vero$$

La domanda avrà soluzione se introduciamo un insieme numerico più ampio dell'insieme dei numeri reali R. Chiameremo questo insieme: **INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI C.**

❑ DEFINIZIONE DI NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE

Chiamiamo **numero complesso** ogni coppia ordinata (a,b) di numeri reali (oppure è un qualsiasi elemento dell'insieme RxR).

esempio

Le seguenti coppie ordinate di numeri reali sono numeri complessi:

$$(4;-5) \quad \left(-\frac{1}{2};\sqrt{3}\right) \quad \left(0;-\frac{2}{3}\right)$$

❑ LE OPERAZIONI IN C

DEFINIZIONE

Dati due numeri complessi (a,b) e (c,d), la loro **somma** è il numero complesso definito dalla coppia (a+c;b+d).

esempio $$(4;-5)+(-2;3)=(2;-2)$$

DEFINIZIONE

Dati due numeri complessi (a,b) e (c,d), il loro **prodotto** è il numero complesso definito dalla coppia (ac-bd;ad+bc).

esempio $$(4;-5)\cdot(-2;3)=(-8+15;12+10)=(7;22)$$

Il prodotto tra numeri complessi gode della proprietà commutativa, associativa, e distributiva.

DEFINIZIONE

$$(a;b)^2=(a;b)(a;b)=(a^2-b^2;2ab)$$

$$(0;b)^2=(0;b)(0;b)=(-b^2;0)$$

esempio

$$(2;3)^2=(2;3)\cdot(2;3)=(4-9;6+6)=(-5;12)$$

$$(0;2)^2=(0;2)\cdot(0;2)=(-4;0)=-4$$

Il secondo esempio risponde al problema posto all'inizio: "Qual è quel numero il cui quadrato è uguale a -4?"

La risposta è: il numero complesso (0;2).

In generale: $(0;b)^2=-b^2$

Esercizio: Eseguire l'addizione e la moltiplicazione dei numeri complessi (-3;2) e (4;-10)

Addizione

Essendo $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$:

$$(-3; 2) + (4; -10) = (-3 + 4; 2 - 10) =$$
$$= (1; -8).$$

Moltiplicazione

Essendo $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$:

$$(-3; 2) \cdot (4; -10) = (-12 - (-20); 30 + 8) =$$
$$= (8; 38).$$

❑ I NUMERI IMMAGINARI

DEFINIZIONE

Chiamiamo **numero immaginario** ogni numero complesso del tipo (0;b).

Il numero (0;1) si chiama **unità immaginaria** e la indicheremo con il simbolo "i":

$$\boxed{(0;1) = i}$$

Poiché:

$$(0;1)^2 = (-1;0) = -1$$

Allora:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi (a;b) possono essere scritti nella seguente forma algebrica:

FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

$$\boxed{(a;b) = a + bi}$$

a=parte reale bi=parte immaginaria b=coeff. parte immaginaria

esempio

$$(2;3) = 2 + 3i$$

$$4i = 0 + 4i = (0;4)$$

$$5 = 5 + 0i = (5;0)$$

MODULO DEI NUMERI COMPLESSI

DEFINIZIONE

$$\boxed{|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

esempio

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

NUMERI COMPLESSI CONIUGATI E OPPOSTI

DEFINIZIONE

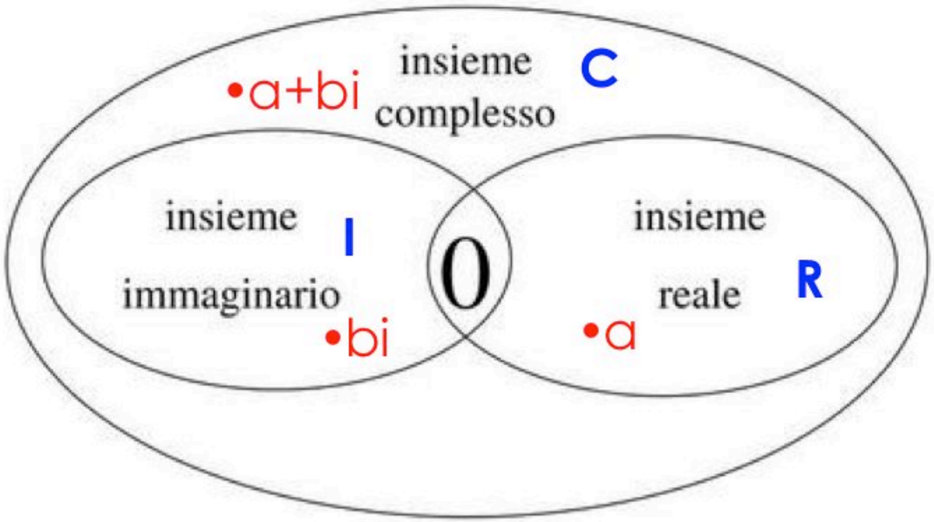
I numeri complessi a+bi e a-bi si dicono complessi coniugati. Mentre a+bi e –a-bi si dicono complessi opposti.

esempio

$$-4+3i \qquad -4-3i \qquad \textit{complessi coniugati}$$

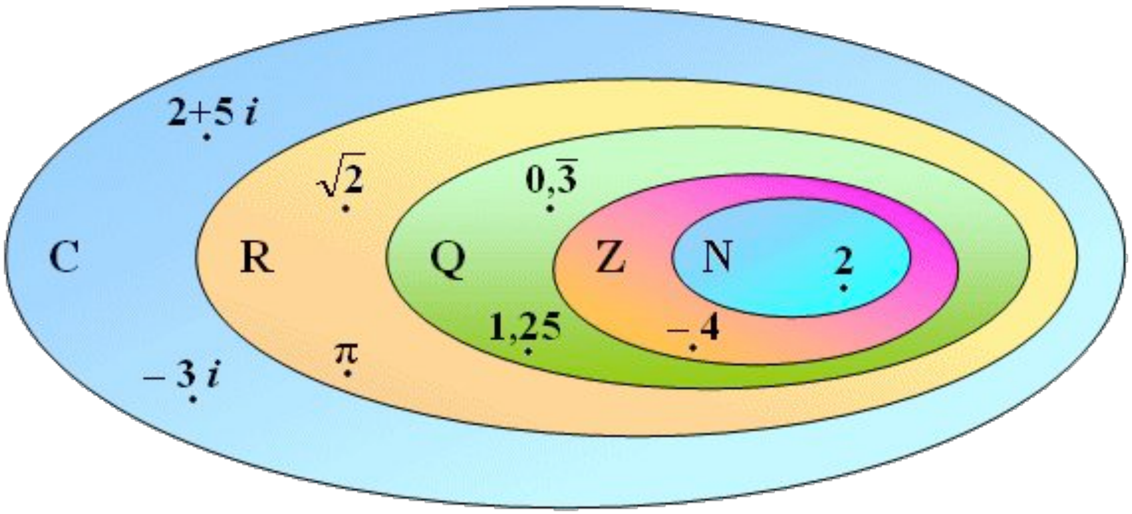
$$\sqrt{3}+4i \qquad -\sqrt{3}-4i \qquad \textit{complessi opposti}$$

L'INSIEME C DEI NUMERI COMPLESSI



L'insieme dei numeri complessi C, contiene due sottoinsiemi propri: R e I. Il numero 0 è considerato sia un numero reale che immaginario.

Gli insiemi finora studiati.



- LE QUATTRO OPERAZIONI

REGOLE

$$ai + bi = (a+b)i \qquad ai - bi = (a-b)i$$

$$ai \cdot bi = (a \cdot b)i^2 \xrightarrow{i^2=-1} ai \cdot bi = -a \cdot b$$

$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}$$

esempio

$$3i + 6i = 9i \qquad 5i - 4i = i \qquad 4i - 6i = -2i \qquad 10i - 10i = 0$$

$$2i \cdot 4i = -8 \qquad -2i \cdot 4i = +8 \qquad -2i \cdot (-4i) = -8$$

$$\frac{6i}{2i} = 3 \qquad \frac{-6i}{2i} = -3 \qquad \frac{-6i}{-2i} = 3$$

L'addizione e la sottrazione fra due numeri immaginari hanno come risultato ancora un numero immaginario, quindi (+;-) sono operazioni interne nell'insieme I.

La moltiplicazione e la divisione fra due numeri immaginari hanno come risultato un numero reale, quindi (•,:) sono operazioni esterne nell'insieme I.

LE POTENZE

REGOLE

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i \qquad i^6 = i^5 \cdot i = -1 \qquad i^7 = i^6 \cdot i = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = 1$$

$$i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r \xrightarrow{i^4=1;\ 1^k=1} i^n = i^r$$

Le potenze sono cicliche di periodo 4.

Le potenze con esponente pari valgono 1 o -1; quelle con esponente dispari valgono i o –i.

esempio

$$(7i)^2 = 49i^2 = -49 \qquad (-3i^2)^3 = -27i^6 = -27 \cdot (-1) = 27$$

$$\left(\sqrt{2}i\right)^2 = 2i^2 = -2 \qquad i^{14} = (i^4)^3 \cdot i^2 = 1^3 \cdot (-1) = -1$$

Esercizio: Scrivere in forma algebrica il numero complesso (4;-5).

Essendo $(a; b) = a + bi$:

$$(4; -5) = 4 - 5i.$$

Esercizio: Dato il numero complesso 3+ki-4i, determinare per quale valore di k è un numero complesso reale.

Occorre che il coefficiente della parte immaginaria sia 0.

Raccogliamo i:

$$3 + i(k - 4).$$

Uguagliamo a 0 il coefficiente di i:

$$k - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 4.$$

Pertanto, il numero $3 + ki - 4i$ è complesso reale per $k = 4$, e in tal caso vale 3.

Esercizio: Calcolare il modulo del numero complesso 2-3i.

Il modulo del numero complesso $a + bi$ è:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Poiché $a = 2$ e $b = -3$, abbiamo:

$$|2 - 3i| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Esercizio: Eseguire le quattro operazioni fra i numeri immaginari 2i e 5i.

Per eseguire i calcoli, trattiamo i numeri immaginari come monomi nella lettera i; dobbiamo però ricordare che ***i* è un numero** e che $\boldsymbol{i^2 = -1}$:

$$2i + 5i = (2 + 5)i = 7i,$$

$$2i - 5i = (2 - 5)i = -3i,$$

$$2i \cdot 5i = 2 \cdot 5 \cdot i \cdot i = 10 \cdot (-1) = -10,$$

$$2i : 5i = \frac{2\cancel{i}}{5\cancel{i}} = \frac{2}{5}.$$

Esercizio: Calcolare la potenza i^{35}.

Sappiamo che:

$$i^0=1;\ i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=-i$$

I valori si ripetono secondo la regola:

$$i^n=i^{\text{resto di } n:4}$$

Applichiamo la regola:

$$35:4=8 \quad \text{con resto } 3$$

quindi:

$$i^{35}=i^3=-i$$

L'ALGEBRA DEI NUMERI COMPLESSI

REGOLA

La somma (sottrazione) di due numeri complessi è un numero complesso che ha: per parte reale la somma (sottrazione) delle pareti reali; per coefficiente della parte immaginaria la somma (sottrazione) dei coefficienti delle parti immaginarie:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

esempio

$$(4+2i)+(5+3i)=(4+5)+(2+3)i=9+5i$$

$$(4-2i)+(5+3i)=(4+5)+(-2+3)i=9+i$$

$$(12-7i)-(4+2i)=12-7i-4-2i=8-9i$$

$$(6-i)+(6+i)=12 \qquad (-5+4i)+(5-4i)=0 \qquad (2-15i)-(2+15i)=-30i$$

REGOLA

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso dato da:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

esempio

$$(1-3i)\cdot(2-i)\xrightarrow[\textit{tra due binomi}]{\textit{prodotto}}2-i-6i+3i^2\xrightarrow{i^2=-1}-1-7i$$

$$(6+7i)\cdot(6-7i)\xrightarrow[\textit{notevole}]{\textit{prodotto}}36-49i^2\xrightarrow{i^2=-1}36+49=85$$

REGOLA

La divisione tra due numeri complessi è un numero complesso dato da:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

esempio

$$\frac{3-2i}{4+i}\xrightarrow{equivalente\ \ a}\frac{3-2i}{4+i}\cdot\frac{4-i}{4-i}=\frac{12-3i-8i-2}{16+1}=\frac{10-11i}{17}=\frac{10}{17}-\frac{11}{17}i$$

REGOLA

Quadrato e cubo di un numero complesso:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$$

esempio

$$(3+2i)^2 \xrightarrow[\text{quadrato binomio}]{\text{regola}} 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$$

$$(3+2i)^3 \xrightarrow[\text{cubo binomio}]{\text{regola}} 27 - 8i + 54i - 36 = -9 + 46i$$

Esercizio: Eseguire l'addizione e la sottrazione fra i numeri complessi 4+3i e -5+2i

Addizione

$$(4 + 3i) + (-5 + 2i) =$$

Sommiamo tra loro le parti reali e le parti immaginarie:

$$= (4 - 5) + (3i + 2i) = -1 + 5i.$$

Sottrazione

$$(4 + 3i) - (-5 + 2i) =$$

Trasformiamo la sottrazione in un'addizione, cambiando il segno del sottraendo:

$$= (4 + 3i) + (5 - 2i) =$$

$$= (4 + 5) + (3i - 2i) = 9 + i.$$

Esercizio: Eseguire la moltiplicazione tra i seguenti numeri complessi: a) 2-3i e -6+i; b) 3-2i e 3+2i.

a) Utilizziamo la regola di moltiplicazione di due binomi (senza dimenticare che i è un numero e $i^2 = -1$):

$$(2-3i)(-6+i) = -12 + 2i + 18i - 3i^2 = -12 + 20i + 3 = -9 + 20i.$$

b) I numeri dati sono complessi coniugati. Poiché $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, il loro prodotto è un numero complesso reale:

$$(3-2i)(3+2i) = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13.$$

Esercizio: Eseguire la divisione tra i seguenti complessi 2+i e 1-i.

Scriviamo il quoziente sotto forma di frazione, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, ossia $1+i$, ed eseguiamo i calcoli:

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} = \frac{2+3i-1}{1+1} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

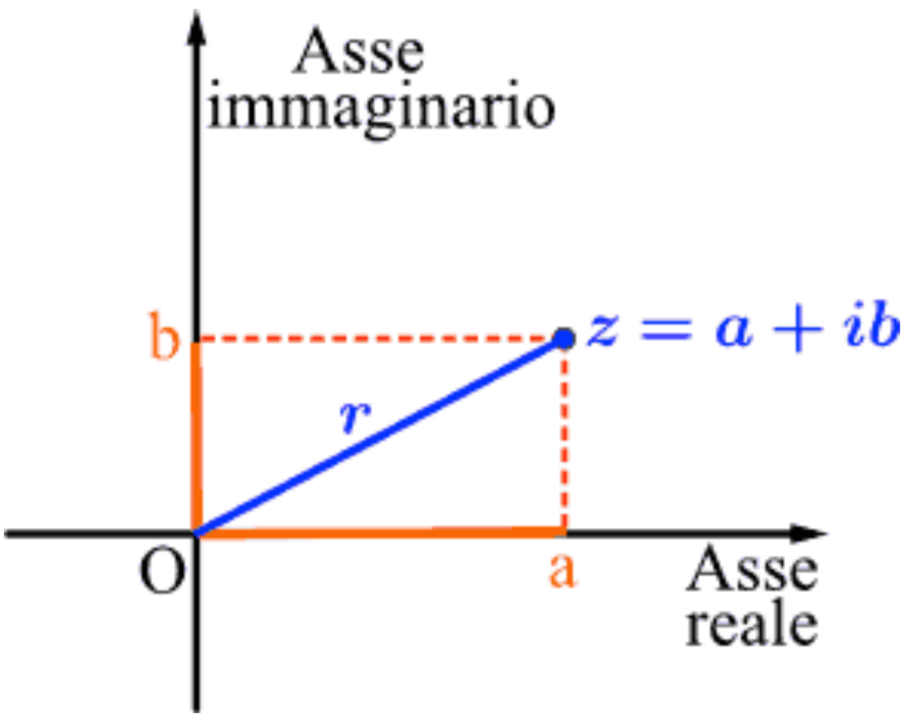
Esercizio: Eseguire la potenza $(-2-i)^2$.

Applichiamo la regola del quadrato di un binomio:

$$(-2-i)^2 = 4 + i^2 + 4i \xrightarrow{i^2 -1} = 3 + 4i$$

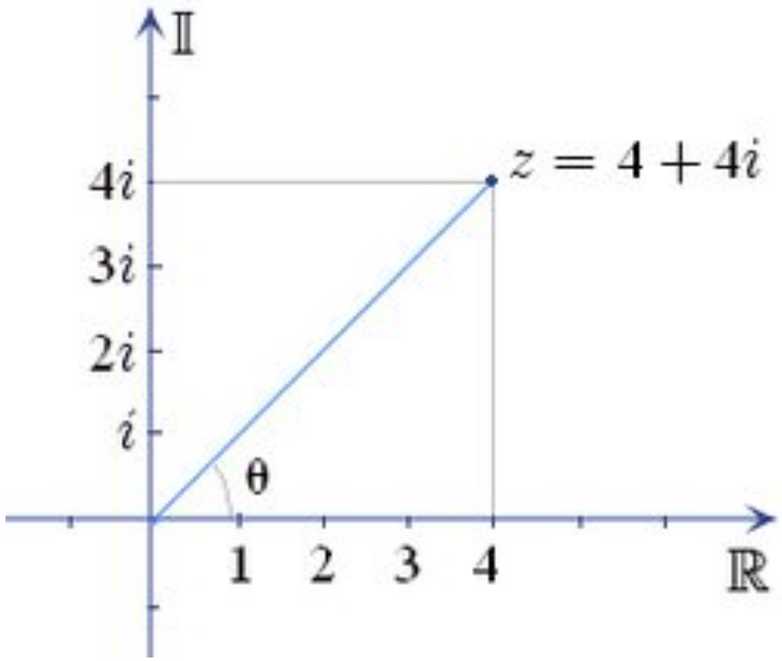
Piano di Gauss

Poiché abbiamo definito un numero complesso come una coppia ordinata (a,b) di numeri reali, allora è possibile associare a ogni numero complesso un punto P(a;b) su un piano cartesiano, e viceversa.

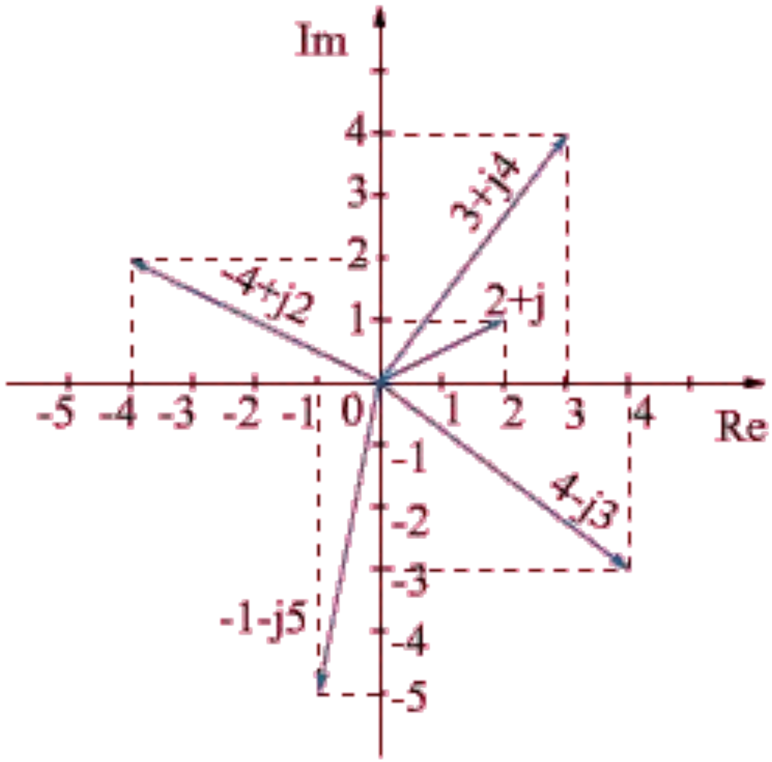


Sul **piano di Gauss** abbiamo creato una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano.

esempio



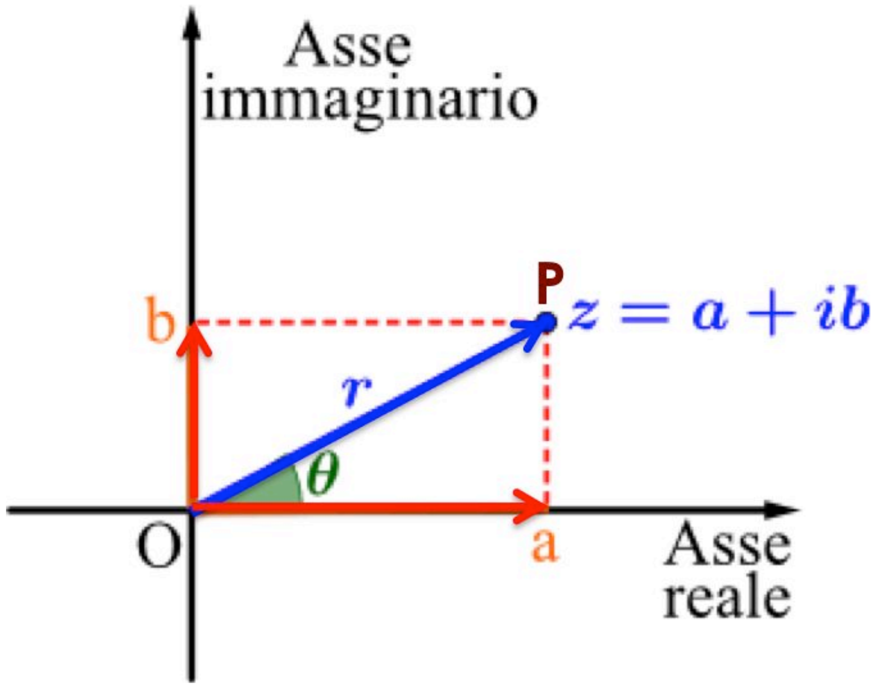
$\mathbb{I}$
$z = 4 + 4i$
4i
3i
2i
i
θ
1
2
3
4
$\mathbb{R}$



Im
4
3
2
1
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
Re
-1
-2
-3
-4
-5
3+j4
-4+j2
2+j
4-j3
-1-j5

I vettori

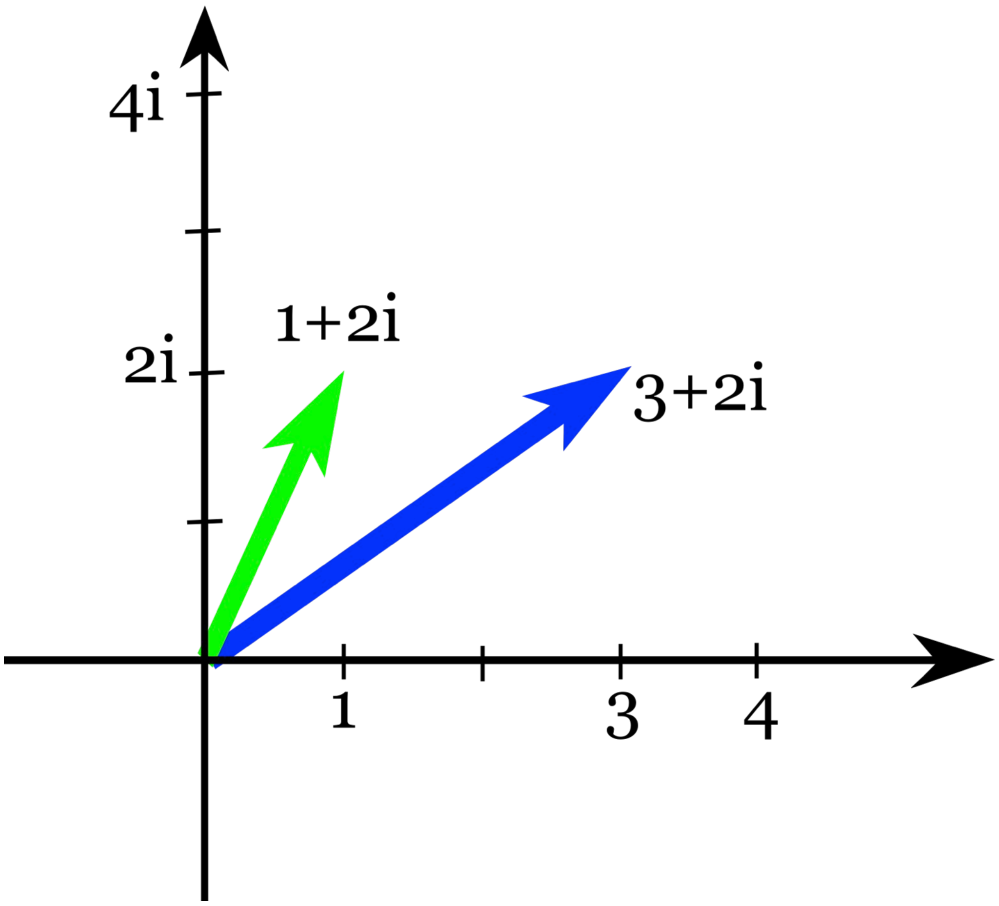
Dato un vettore, è sempre possibile disegnarlo nel piano cartesiano



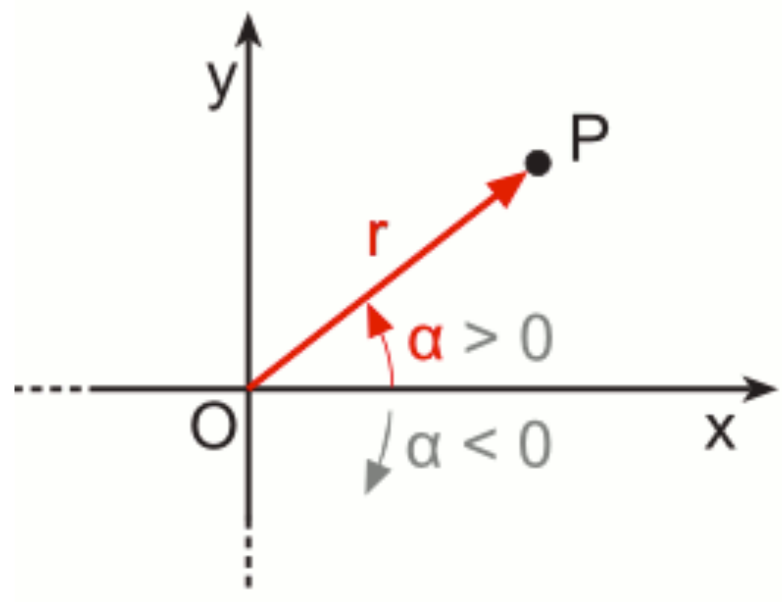
Le coordinate del punto P(a;b) rappresentano le componenti del vettore.

Poiché a ogni punto P del piano è associato uno e un solo vettore, esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i vettori del piano di Gauss.

esempio



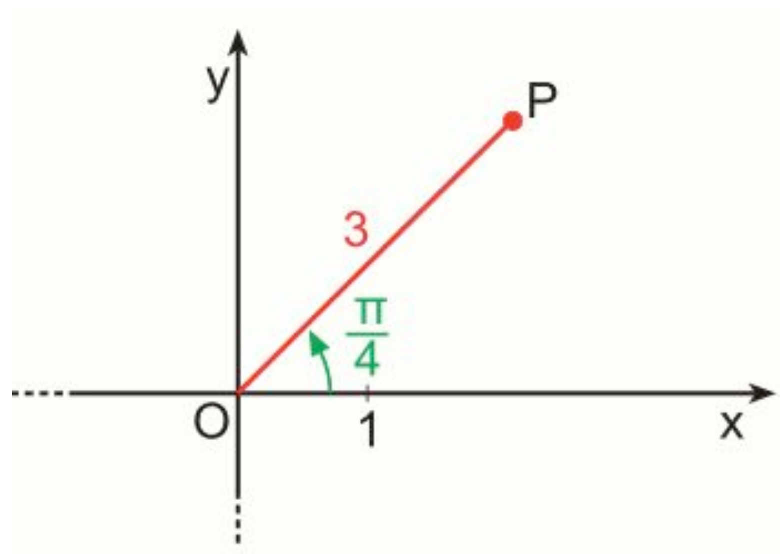
Ogni punto del piano può essere individuato, oltre che dalle coordinate cartesiane P(a;b), anche dalle coordinate polari P(r;α).



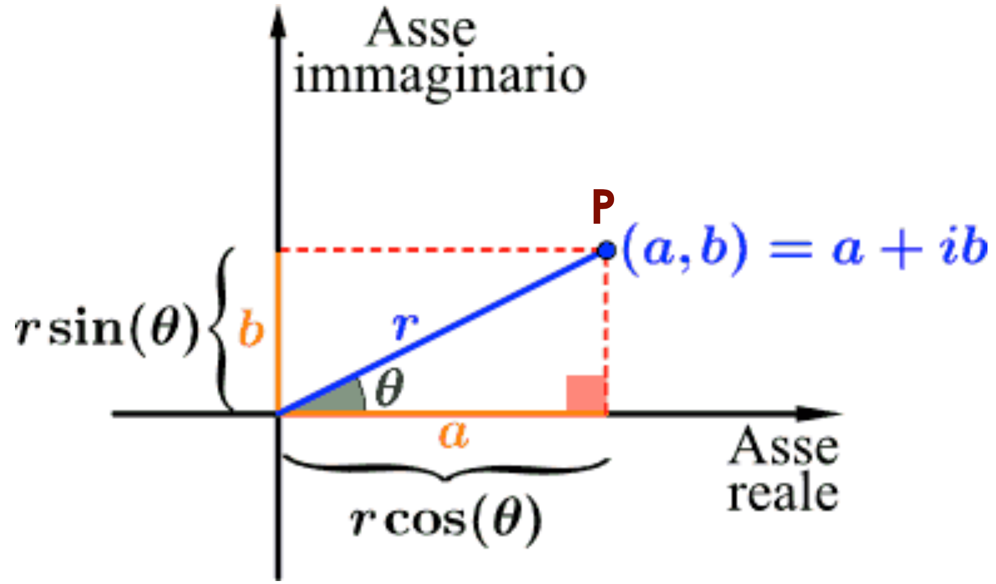
r (modulo)=lunghezza segmento OP
α (argomento)=angolo orientato

esempio

Rappresentazione del punto P(3;π/4) in coordinate polari.



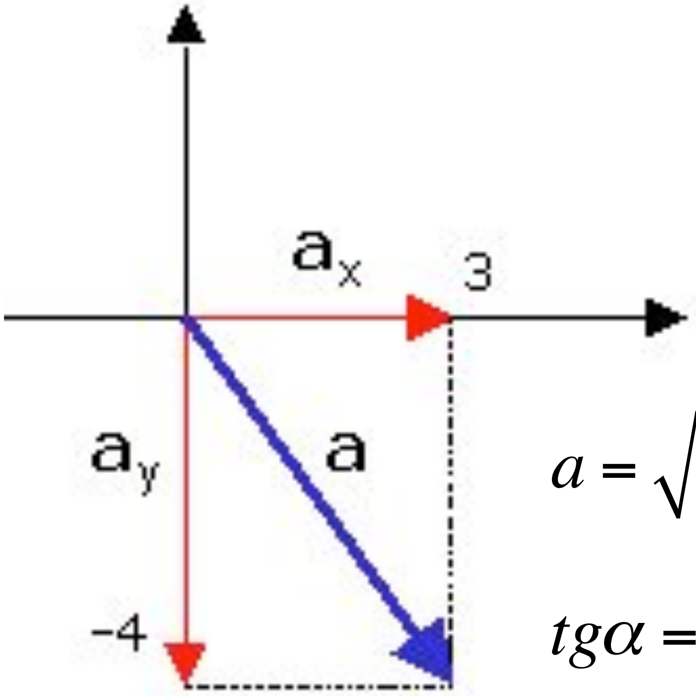
Conoscendo le coordinate polari di un punto P(r;θ), si possono ricavare le sue coordinate cartesiane P(x;y) e viceversa.



Coordinate cartesiane (componenti del vettore)	Modulo (intensità del vettore)	Argomento (angolo del vettore)
$x = r \cdot \cos\theta$ $y = r \cdot sen\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$tg\theta = \frac{y}{x}$ $\theta = arctg\theta$

Esempio

Determinare le coordinate polari (modulo e argomento) del vettore dato in coordinate cartesiane **a**=(3;-4).

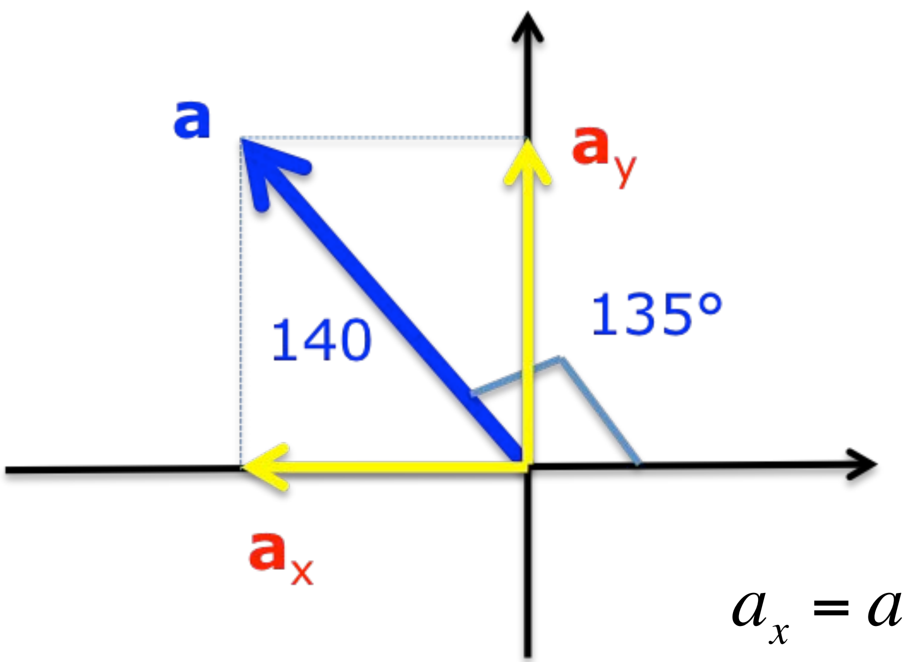


$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$tg\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-4}{3} = -1{,}33 \xrightarrow{calcolatrice} \alpha \cong -53°$$

Esempio

Determinare le coordinate cartesiane (x;y) (componenti del vettore) del vettore dato in coordinate polari **a**=(140;135°).



$$a_x = a \cdot \cos\theta = 140 \cdot \cos 135° = -99N$$

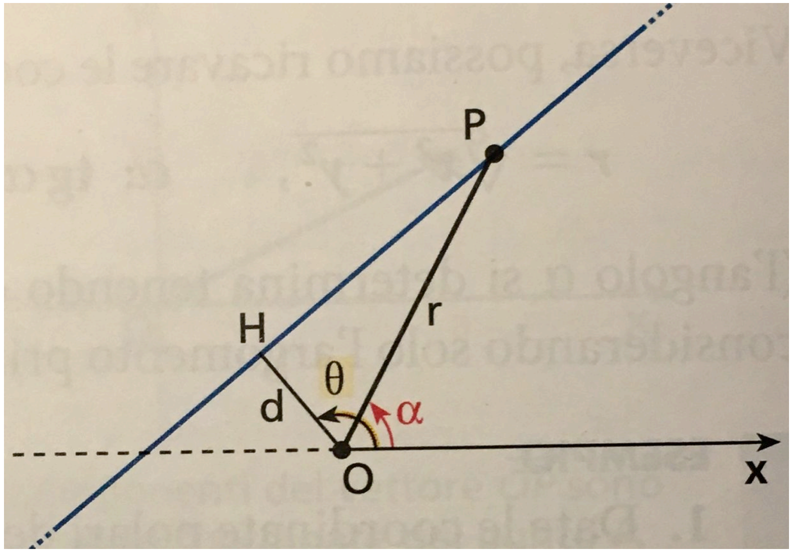
$$a_y = a \cdot sen\theta = 140 \cdot sen 135° = 99N$$

COORDINATE POLARI ED EQUAZIONI DELLE CURVE

retta in coordinate polari

Esprimiamo le coordinate cartesiane (x;y) del punto P in funzione di quelle polari:

$$x = r \cdot \cos\alpha \qquad y = r \cdot sen\alpha$$



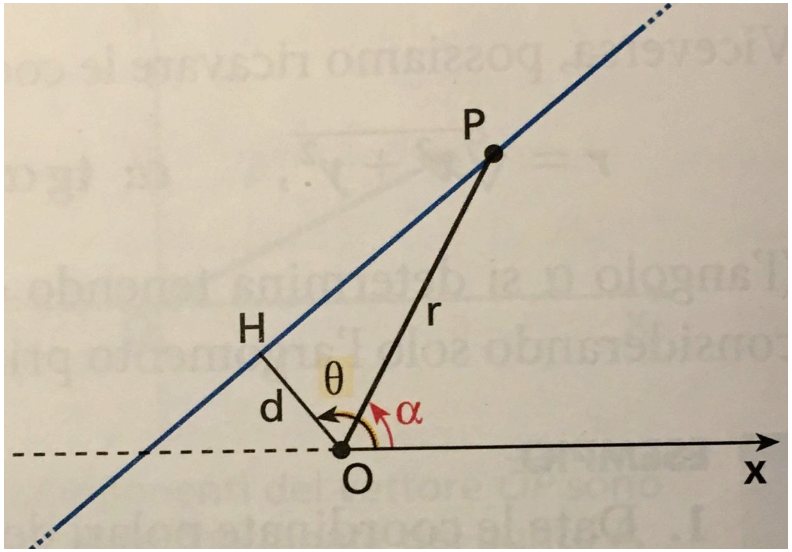
Poiché P appartiene alla retta, sostituiamo le sue coordinate nell'equazione della retta y=mx:

$$y = mx \xrightarrow{sostituiamo} r \cdot sen\alpha = mr\cos\alpha \Rightarrow sen\alpha = m\cos\alpha$$

Da cui:

$$\boxed{tg\alpha = m \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Equazione retta passante per l'origine in coordinate polari



Consideriamo, adesso, la retta generica.

Tale retta è univocamente determinata se è nota la distanza d e l'angolo θ.

Il punto P(r;α) appartiene alla retta generica se e solo se:

$$OH = OP \cdot \cos H\hat{O}P \quad (1^\circ \ \textit{teorema triangolo rettangolo})$$

Essendo HOP=θ−α, sostituendo si ha:

$$\boxed{d = r\cos(\theta - \alpha)}$$

Equazione retta passante per l'origine in coordinate polari

Esempio

Ricavare l'equazione di una retta in coordinate cartesiane nota la retta espressa in coordinate polari:

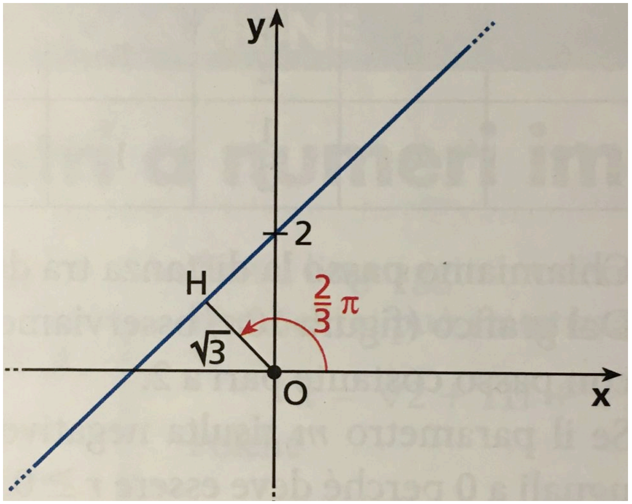
$$r\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)=\sqrt{3}$$

Mediante la formula di sottrazione del coseno, otteniamo:

$$r\cos\frac{2}{3}\pi\cos\alpha+r sen\frac{2}{3}\pi sen\alpha=\sqrt{3}\xrightarrow[y=r sen\alpha]{x=r\cos\alpha}-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sqrt{3}$$

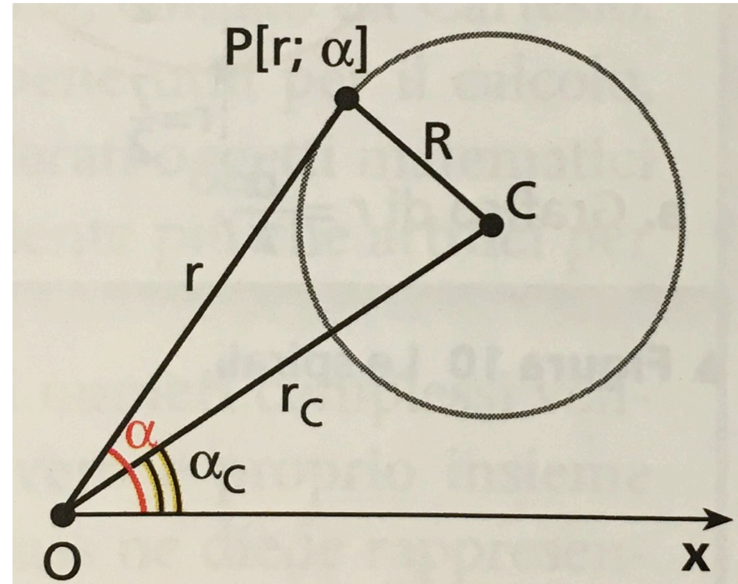
Ossia:

$$\boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2}$$



circonferenza in coordinate polari

Per qualunque P(r;α) appartenente alla circonferenza, possiamo applicare il teorema del coseno al triangolo OPC:



$$\overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OP}\cdot\overline{OC}\cdot\cos(\alpha-\alpha_c)$$

$$R^2 = r^2 + r_c^2 - 2rr_c\cos(\alpha-\alpha_c)$$

Ossia:

$$\boxed{\begin{array}{l} r^2 - 2rr_c\cos(\alpha-\alpha_c) + r_c^2 - R^2 = 0 \\ r \ \ e \ \ \alpha \ \ sono \ \ le \ \ \mathrm{var}\,iabili \end{array}}$$

Equazione circonferenza in coordinate polari

Esempio

Disegnare il luogo dei punti rappresentato dall'equazione:

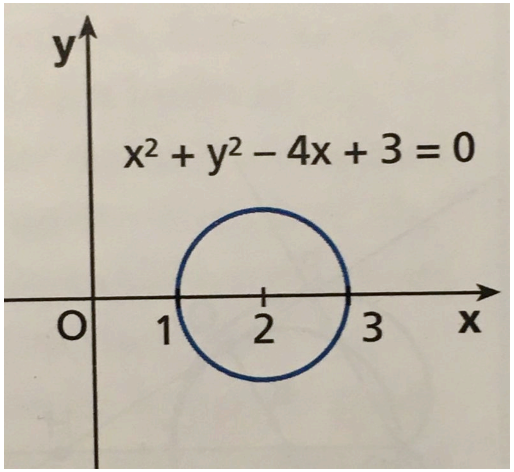
$$r^2 - 4r\cos\alpha + 3 = 0$$

Tenendo presente che: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad x = r\cos\alpha$

trasformiamo l'equazione data in una equazione in coordinate cartesiane:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0}$$

Si tratta dell'equazione di una circonferenza che centro C(2;0) e raggio r=1

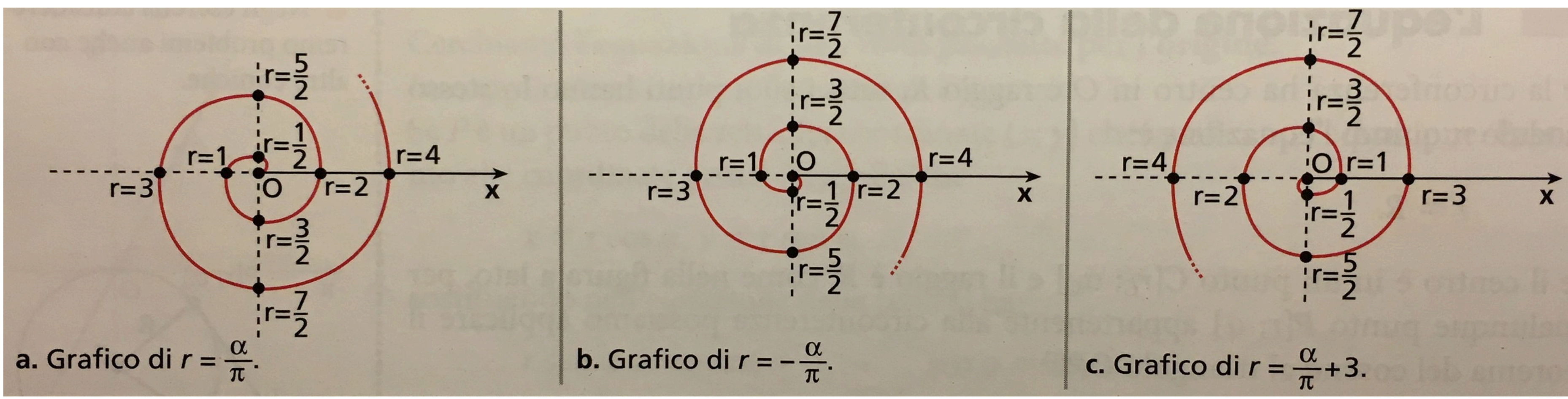


la spirale di Archimede

Alcune curve, espresse in coordinate polari, assumono una forma molto interessante.

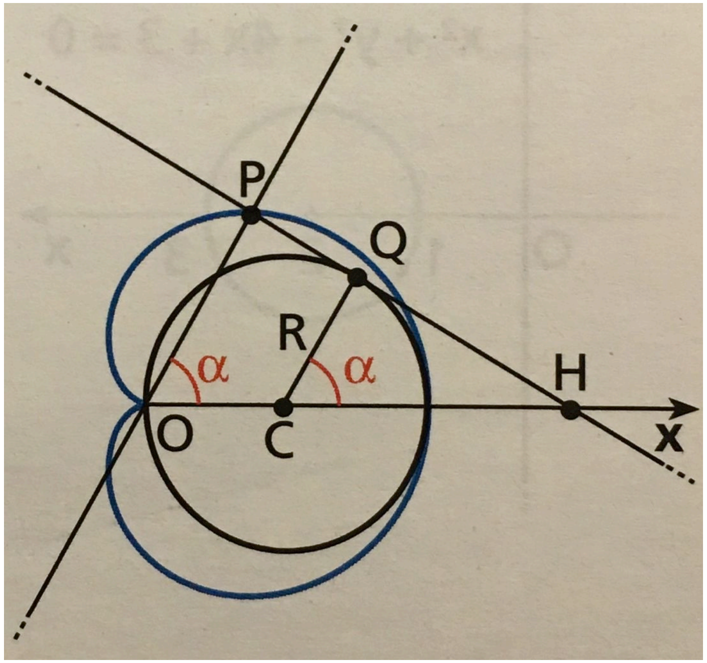
$$\boxed{r = m\alpha + q}$$

spirale di Archimede



la cardioide

Data la circonferenza di centro C e raggio R e un punto O appartenente alla circonferenza, si definisce ***cardioide*** il luogo dei piedi P delle perpendicolari condotte da O alle tangenti alla circonferenza.



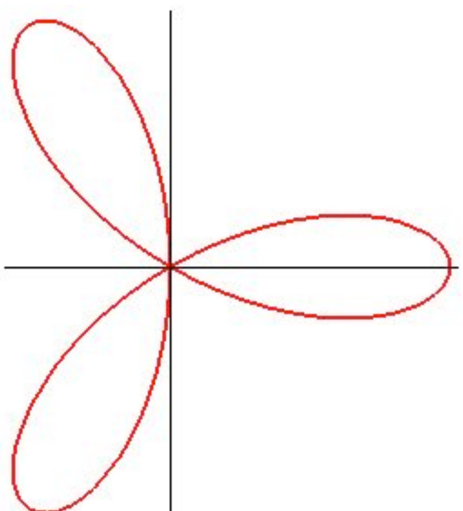
Si ricava che:

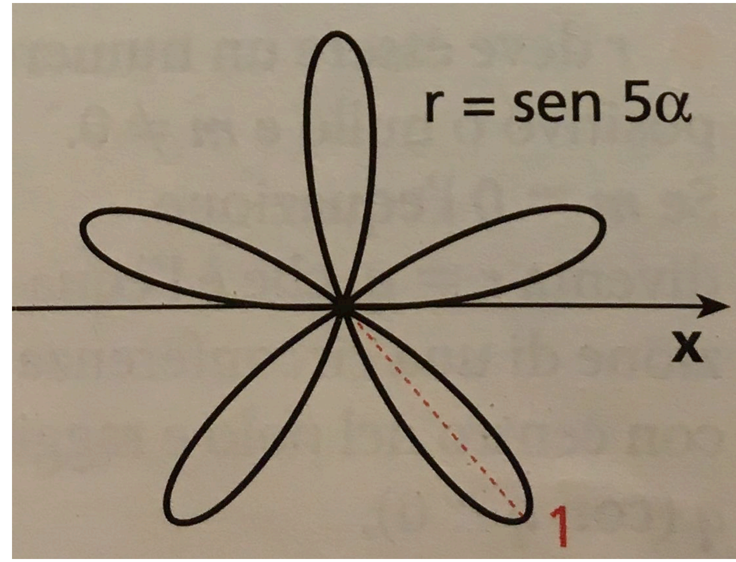
$$\boxed{r = R(1+\cos\alpha)}$$

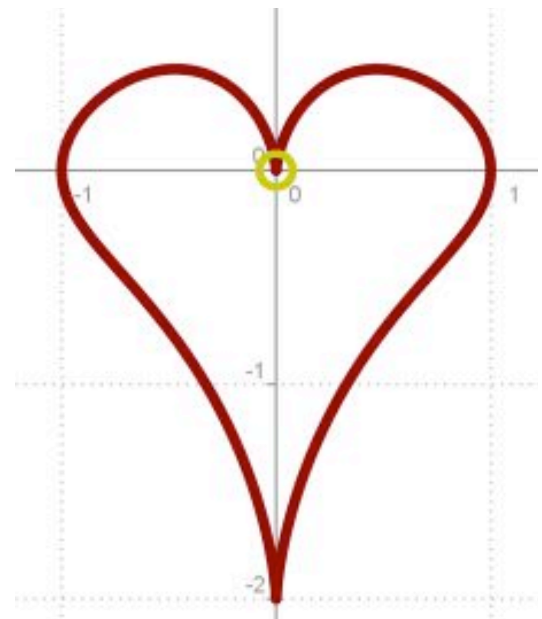
equazione della cardioide

altre curve

$$\rho = |tg(\varphi)|^{\frac{1}{|tg(\varphi)|}}$$







Esercizio: Trasformare le coordinate polari del punto P(4; π /4) in coordinate cartesiane

Le formule di trasformazione in coordinate cartesiane sono:

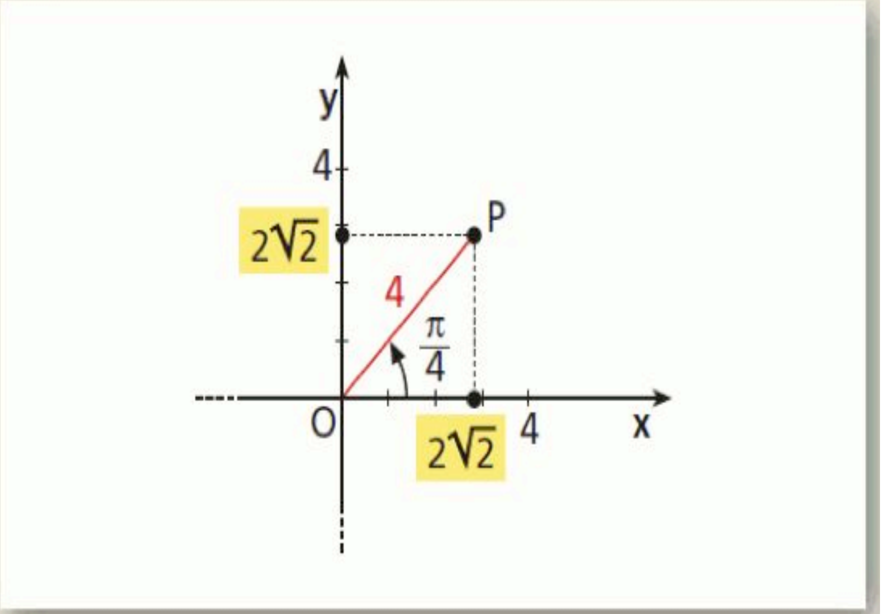
$$\begin{cases} x_P = r\cos\alpha \\ y_P = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Pertanto

$$x_P = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$y_P = 4\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Il punto P ha coordinate cartesiane $(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

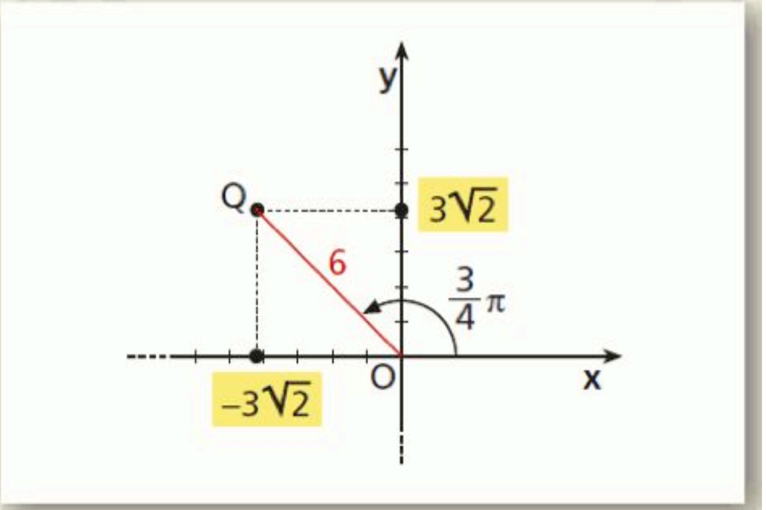


Esercizio: Trasformare in coordinate polari le coordinate cartesiane del punto P(-3√2;3√2).

Le formule di trasformazione sono:

$$r = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_Q}{x_Q}.$$



Calcoliamo r:

$$r = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6.$$

Calcoliamo α: $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = -1$, da ciò $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi$.

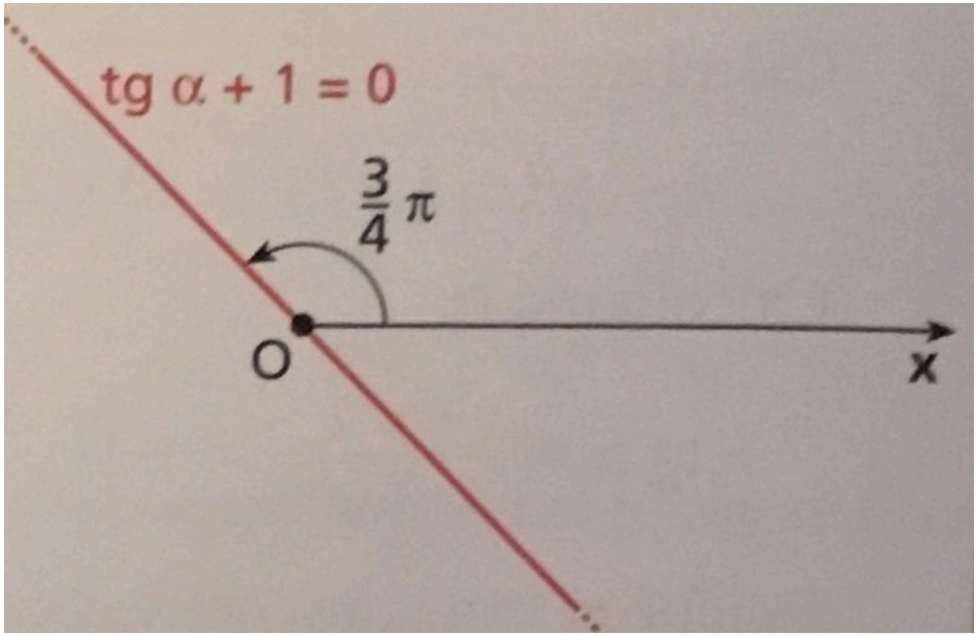
Poiché ci troviamo nel secondo quadrante, scegliamo: $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$.

La trasformazione richiesta è la seguente:

coordinate cartesiane		coordinate polari
$Q(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$	$\rightarrow$	$Q\left(6;\frac{3}{4}\pi\right)$.

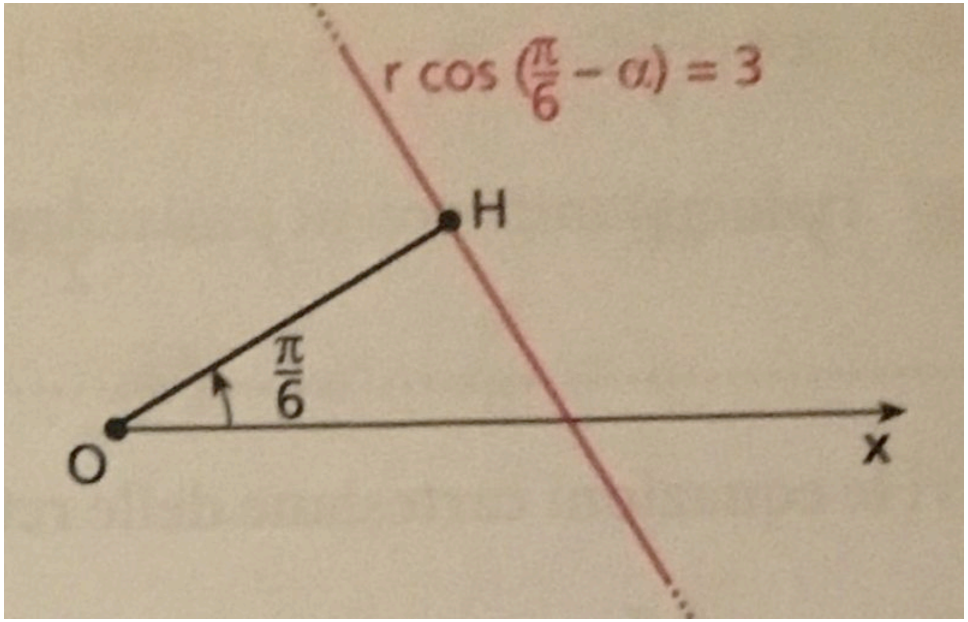
Esercizio: Rappresentare nel riferimento polare le rette di equazione: a) tgα+1=0; b) rcos(π/6-α)=3

a) Nel riferimento polare l'equazione $\operatorname{tg}\alpha = m$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, rappresenta una retta passante per l'origine.
L'equazione $\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$ indica una retta che forma un angolo di $\frac{3}{4}\pi$ con l'asse polare.



b) L'equazione di una retta non passante per l'origine in coordinate polari è: $d = r\cos(\theta - \alpha)$, dove d è la distanza $\overline{OH}$ della retta dal polo O e θ è l'angolo che il segmento orientato $\overrightarrow{OH}$ forma con l'asse polare. Nell'equazione assegnata è $d = 3$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Disegniamo allora un segmento OH lungo 3 che forma un angolo uguale a $\frac{\pi}{6}$ con l'asse polare e tracciamo la retta perpendicolare a OH passante per H.



Esercizio: Tracciare il grafico delle seguenti curve, dopo aver trasformato le loro equazioni in coordinate polari nelle corrispondenti equazioni cartesiane:

$$a)\ r=\frac{2}{1-\cos\alpha}\qquad b)\ r=\frac{9}{5-4\cos\alpha}$$

a) Trasformiamo in coordinate cartesiane:

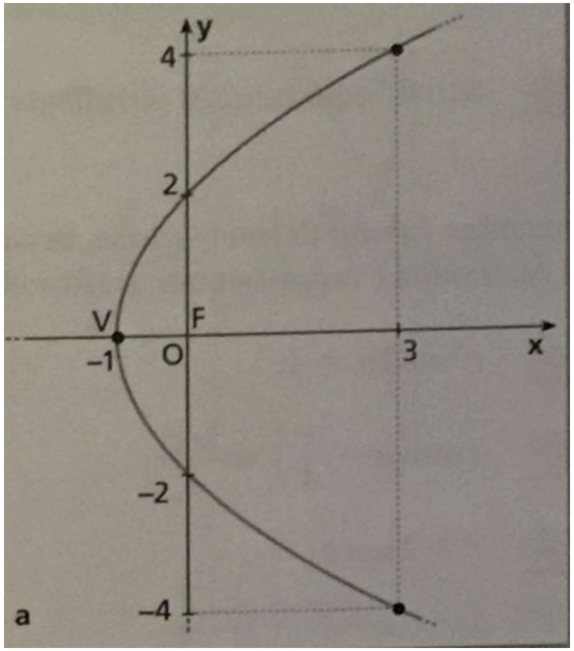
$$r-r\cos\alpha=2\ \rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}-x=2\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}=x+2.$$

Eleviamo al quadrato dopo aver posto $x\geq-2$:

$$\cancel{x^2}+y^2=\cancel{x^2}+4+4x\ \rightarrow\ x=\frac{1}{4}y^2-1.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una parabola con asse coincidente con l'asse x. Il vertice è in $V(-1;0)$, il fuoco F in $(0;0)$ (figura a).



b) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\alpha}$.

Trasformiamo in coordinate cartesiane:

$$5r - 4r\cos\alpha = 9$$

$$5\sqrt{x^2 + y^2} = 9 + 4x.$$

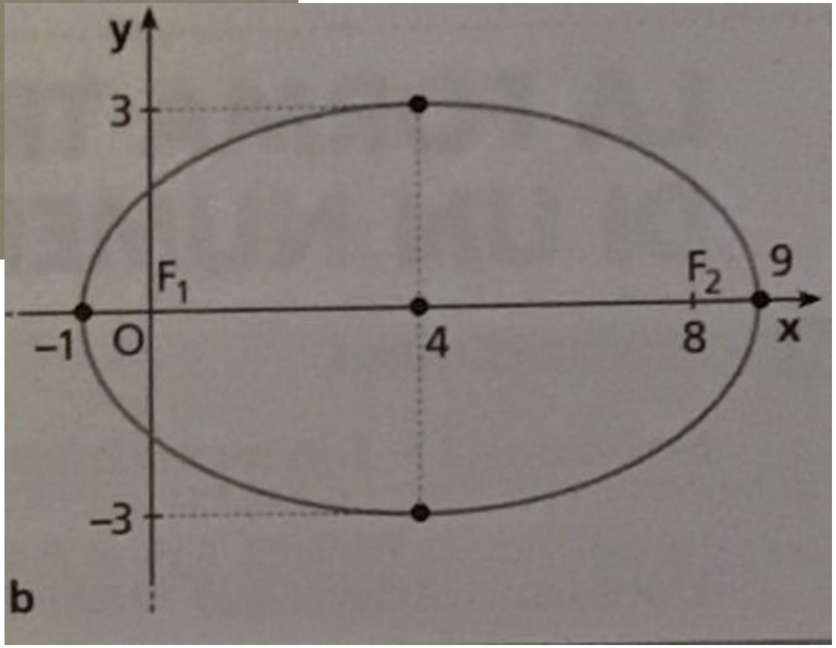
Elevando al quadrato e sommando, si ottiene:

$$9x^2 + 25y^2 - 72x - 81 = 0.$$

Si tratta di un'ellisse traslata che si può ricondurre in forma canonica:

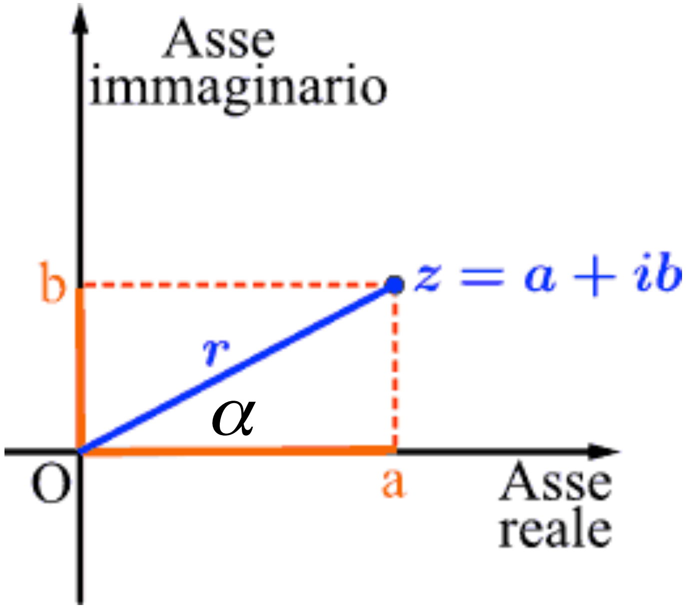
$$9(x^2 - 8x + 16) - 9 \cdot 16 + 25y^2 = 81$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



L'ellisse ha centro in (4;0); a=5; b=3; fuochi $F_1(0;0)$, $F_2(8;0)$.

NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA



Sul **piano di Gauss** abbiamo visto che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano.

Poiché valgono le relazioni: $x = r \cdot \cos\alpha \qquad y = r \cdot sen\alpha$

allora:

$$\boxed{\begin{array}{l} z = a + ib = r(\cos\alpha + i sen\alpha) \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad tg\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}}$$

numeri complessi in forma trigonometrica

operazioni

REGOLA

Il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli dei numeri dati e per argomento la somma degli argomenti:

$$z_1 = r(\cos\alpha + isen\alpha) \qquad z_2 = s(\cos\beta + isenb)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot \left[\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)\right]$$

esempio

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right) \qquad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right] = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

REGOLA

Il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli dei numeri dati e per argomento la differenza degli argomenti:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = r(\cos\alpha + isen\alpha) \qquad z_2 = s(\cos\beta + isenb) \\ z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r}{s}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta) + isen(\alpha-\beta)\right] \end{array}}$$

esempio

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{3}{4}\pi + isen\frac{3}{4}\pi\right) \qquad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3}\cdot\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

REGOLA

La potenza con esponente intero di un numero complesso in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo la potenza del modulo del numero dato e per argomento il prodotto dell'esponente per l'argomento del numero dato:

$$z = r(\cos\alpha + i sen\alpha)$$

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\alpha + i sen\alpha) \qquad con \ n \in Z^+$$

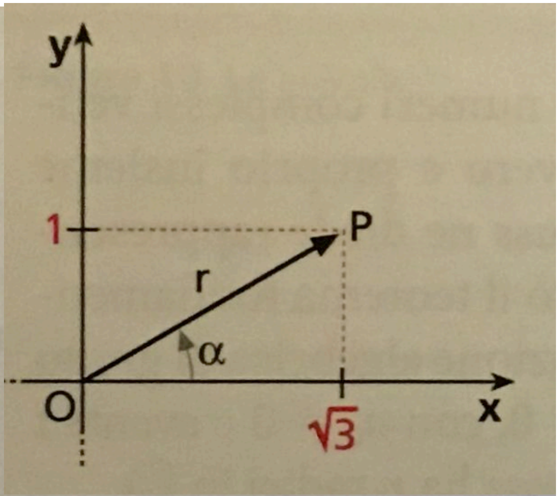
esempio

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z^5 = \left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i sen\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5 = 2^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{2}{3}\pi\right) + i sen\left(5\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 32\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i sen\frac{10}{3}\pi\right)$$

ESEMPIO

Consideriamo il numero complesso $\sqrt{3} + i$.



Calcoliamo r e α:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6} \vee \alpha_2 = \frac{7}{6}\pi.$$

Scegliamo $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{6}$ perché a e b sono positivi, quindi α appartiene al primo quadrante.

La forma trigonometrica del numero complesso $\sqrt{3} + i$ è:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right).$$

DEFINIZIONE

Si chiama radice n-esima dell'unità, con n intero positivo, ogni numero complesso u tale che $u^n=1$:

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = u \Leftrightarrow u^n = 1 \qquad con\ n\ \text{intero positivo}}$$

REGOLA

Le radici n-esime distinte dell'unità sono n:

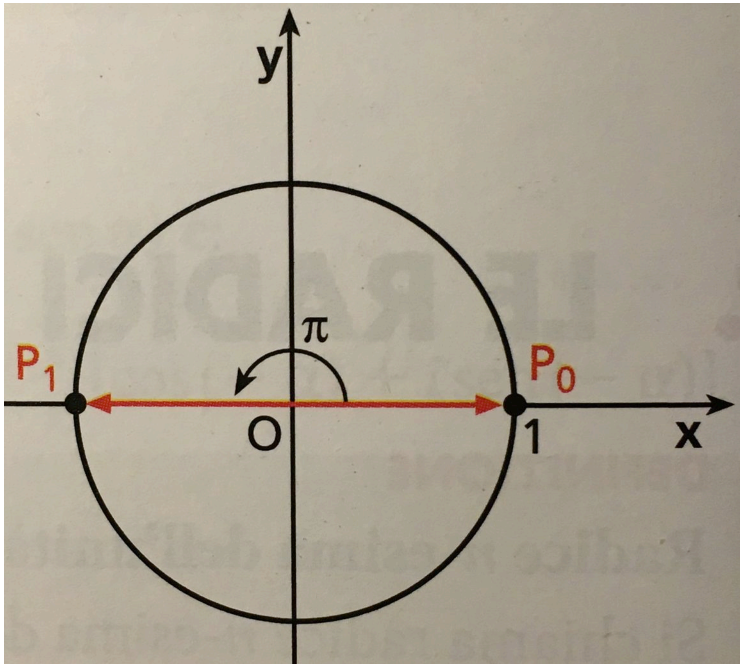
$$\boxed{\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sen\frac{2k\pi}{n} \qquad con\ k = 0,1,2,\ldots,n-1}$$

esempio

Per rappresentare le n radici distinte nel piano di Gauss, basta disegnare la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, quindi inscrivere in essa il poligono regolare di n lati con uno dei vertici nel punto P(0;1). Ogni vettore che parte da O e ha un estremo in uno dei vertici del poligono rappresenta una delle radici.

➢ Calcolare le radici distinte di $\boxed{\sqrt[2]{1}}$

k	0	1	2	3	...
$\sqrt[2]{1} = \cos k\pi + i sen k\pi$	1	-1	1	-1	



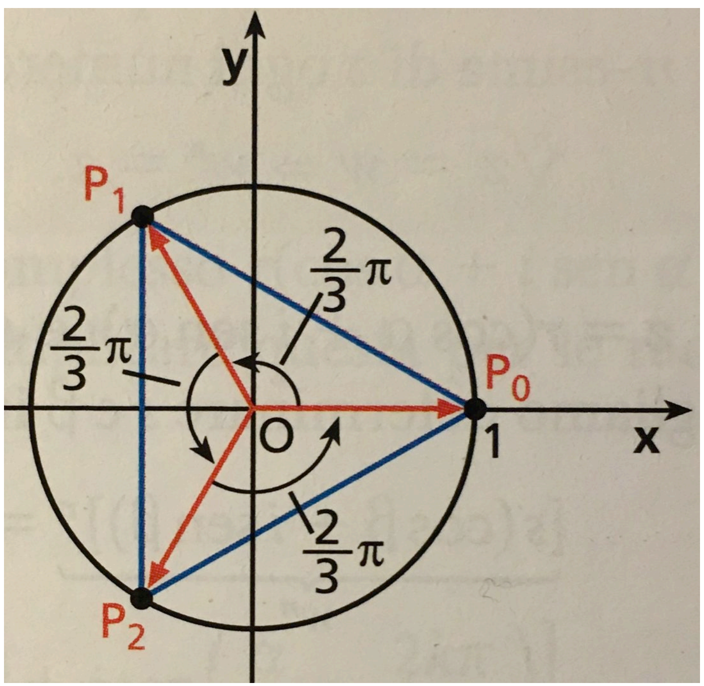
Le radici distinte sono due:

$$\boxed{u_0 = 1 \qquad u_1 = -1}$$

I punti P_0 e P_1 sono le immagini geometriche delle radici u_0 e u_1 nel piano di Gauss.

➢ Calcolare le radici distinte di $\boxed{\sqrt[3]{1}}$

k	0	1	2	3	4	...
$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i sen\frac{2k\pi}{3}$	1	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	



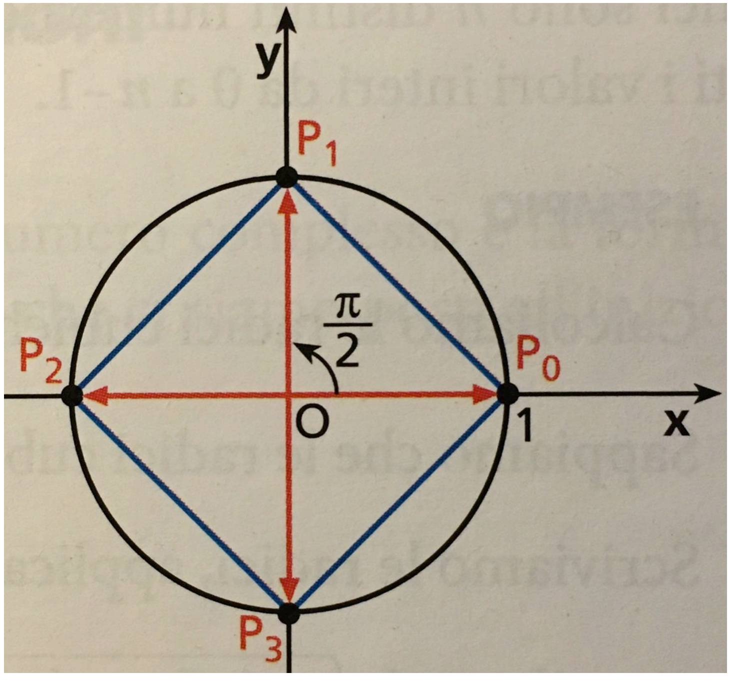
Le radici distinte sono tre:

$$\boxed{u_0 = 1 \qquad u_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad u_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

I punti P_0, P_1 e P_2 sono le immagini geometriche delle radici u_0, u_1 e u_2 nel piano di Gauss, e sono i vertici di un triangolo equilatero.

- Calcolare le radici distinte di $\boxed{\sqrt[4]{1}}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{k\pi}{2} + i sen\frac{k\pi}{2}$	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	...



Le radici distinte sono quattro:

$$\boxed{u_0 = 1 \quad u_1 = i \quad u_2 = -1 \quad u_3 = -i}$$

I punti P_0, P_1, P_2 e P_3 sono le immagini geometriche delle radici u_0, u_1, u_2 e u_3 nel piano di Gauss, e sono i vertici di un quadrato.

Esercizio: Scrivere il numero complesso 1-i in forma trigonometrica.

Dobbiamo scrivere $1-i$ nella forma $r\cos\alpha + i\,r\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Calcoliamo:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\,.$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \;\rightarrow\; \alpha_1=\frac{3}{4}\pi \vee \alpha_2=\frac{7}{4}\pi.$$

Scegliamo $\alpha=\frac{7}{4}\pi$ perché il punto corrispondente al numero complesso si trova nel quarto quadrante.

La forma trigonometrica di $1-i$ è quindi:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right).$$

Esercizio: Calcolare il prodotto dei seguenti numeri complessi e scrivere il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + isen\frac{2}{3}\pi\right) \qquad z_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi\right)$$

Ricordiamo che, se $z_1 = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = rs[\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)],$$

quindi, essendo $r = \frac{1}{2}, s = \frac{2}{3}, \alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{5}{6}\pi$, si ha:

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right).$$

Poiché $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$, sostituendo:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{3}[0 + i(-1)] = -\frac{1}{3}i.$$

Esercizio: Calcolare la divisione dei seguenti numeri complessi e scrivere il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i sen\frac{7}{4}\pi\right) \qquad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}\right)$$

Se $z_1 = r(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i \text{ sen } \beta)$, il loro quoziente è:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta) + i \,\text{sen}(\alpha-\beta)].$$

In questo modo otteniamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi\right).$$

Per scrivere la soluzione in forma algebrica ricordiamo che $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Esercizio: Calcolare la seguente potenza:

$$z^5 = \left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i sen\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5$$

Se $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, possiamo applicare la formula di De Moivre:

$$[r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha).$$

Nel nostro caso è $n = 5$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5 = 2^5\left[\cos\left(5\frac{2}{3}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(5\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 32\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{10}{3}\pi\right).$$

Essendo

$$\cos\frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\frac{10}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

la forma algebrica del risultato ottenuto è:

$$32\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{32}{2} - \frac{32\sqrt{3}}{2}i = -16 - 16\sqrt{3}\,i.$$

Esercizio: Calcolare la seguente potenza:

$$z^{-3} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3}$$

Sappiamo che, se $z = r(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)$, allora $[r(\cos\alpha + i \,\text{sen}\,\alpha)]^{-n} = \frac{1}{r^n}(\cos n\alpha - i \,\text{sen}\, n\alpha)$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3} = \frac{1}{2^3}\left[\cos\left(3\frac{\pi}{6}\right) - i\,\text{sen}\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

In forma algebrica il risultato è:

$$\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}[0 - i(1)] = -\frac{1}{8}i.$$

RADICI n-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE

Dati il numero complesso z e il numero intero positivo n, si dice radice n-esima di z ogni numero complesso w tale che $w^n = z$:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z}$$

Se indichiamo con $z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, si dimostra che:

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\alpha + isen\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Le radici sono n distinti numeri complessi, che si possono ottenere attribuendo i valori k=0,1,…,n-1

esempio

Calcolare la seguente radice:

$$\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i sen\frac{3}{2}\pi\right)}$$

Sappiamo che le radici cubiche sono tre, corrispondenti a $k = 0, 1, 2$.

Scriviamo le radici, applicando la formula:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right], \text{ con } k = 0, 1, 2.$$

Gli argomenti $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}k\pi\right)$ sono:

$$\frac{\pi}{2} \text{ per } k=0; \quad \frac{7}{6}\pi \text{ per } k=1; \quad \frac{11}{6}\pi \text{ per } k=2.$$

Determiniamo le tre radici:

$$\text{per } k=0, \quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)=2i;$$

$$\text{per } k=1, \quad z_1=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i;$$

$$\text{per } k=2, \quad z_2=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right)=\sqrt{3}-i.$$

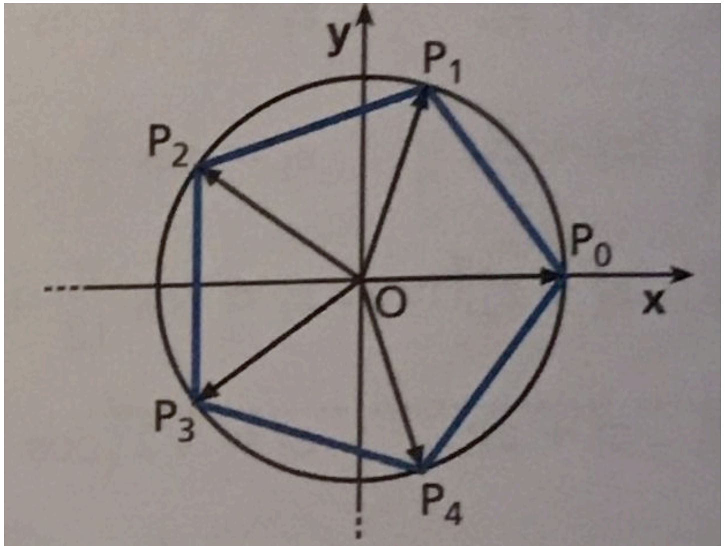
Esercizio: Calcolare le radici n-esime dell'unità per n=5 e rappresentarle sulla circonferenza di raggio1.

Utilizziamo la formula $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}$, con $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Poiché $n = 5$:

$$\sqrt[5]{1} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{5}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Compiliamo la tabella seguente e rappresentiamo le soluzioni nel piano di Gauss, utilizzando la circonferenza unitaria e inscrivendo in essa un pentagono regolare.

k	α	$\sqrt[5]{1}$
0	0	$u_0 = 1$
1	$\frac{2}{5}\pi$	$u_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
2	$\frac{4}{5}\pi$	$u_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
3	$\frac{6}{5}\pi$	$u_3 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
4	$\frac{8}{5}\pi$	$u_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$



I vettori $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OP_4}$ rappresentano le radici quinte dell'unità.

Esercizio: Calcolare le radici cubiche di z=8(cos π / 4+isen π /4) e rappresentarle nel piano di Gauss.

Applichiamo la formula per determinare le radici n-esime di z=r(cosα+isenα) con n=3.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right), \text{ con } k = 0, 1, 2.$$

Otteniamo, per $k = 0$:

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\,\text{sen}\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right) =$$

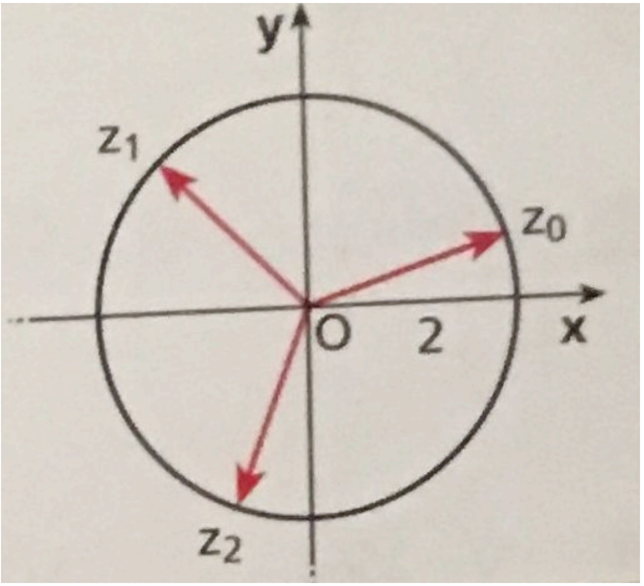
$$= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Con calcoli analoghi, per $k = 1$:

$$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

per $k = 2$:

$$z_2 = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$



RISOLUZIONE EQUAZIONI 2° GRADO IN C

Adesso abbiamo gli elementi per risolvere, nel campo dei numeri complessi, l'equazione posta all'inizio del capitolo:

$$x^2 = -4$$

Essendo: $-4 = 4(\cos\pi + i sen\pi) \quad con\ r = 4\ e\ \alpha = \pi$

grazie alla definizione della radice n-esima di un numero complesso, si ottiene:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right] \quad con\ k = 0,1$$

Determiniamo le due radici:

$$per\ \ k=0 \Rightarrow \sqrt{-4}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2}\right)=2i$$

$$per\ \ k=1 \Rightarrow \sqrt{-4}=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+isen\frac{3}{2}\pi\right)=-2i$$

Conclusione: le soluzioni dell'equazione $x^2=-4$ sono 2i e -2i.

esempio

Risolvere l'equazione $x^2-6x+25=0$

$$x_{1,2}=3+\sqrt{-16}$$ poichè: $$\sqrt{-16}=\pm 4i$$

le due soluzioni dell'equazione sono i seguenti numeri complessi:

$$x_1=3-4i \qquad x_2=3+4i$$

Esercizio: Risolvere l'equazione in C: $x^4+16=0$

Trasportiamo il termine noto a secondo membro: $x^4 = -16$.

Le soluzioni (complesse) dell'equazione sono le radici quarte di -16. Per poter utilizzare la formula

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{4}\right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3,$$

cerchiamo di scrivere -16 in forma trigonometrica:

$$-16 = 16\,(\cos\pi + i\ \operatorname{sen}\pi).$$

Le radici quarte di -16 sono ottenute da:

$$\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Per $k = 0$: $x_0 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(1+i)$.

Analogamente, per $k = 1$: $x_1 = \sqrt{2}\,(-1+i)$; per $k = 2$: $x_2 = -\sqrt{2}\,(1+i)$; per $k = 3$: $x_3 = \sqrt{2}\,(1-i)$.

FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Abbiamo visto che un numero complesso può essere espresso nei seguenti due modi:

$$z = a + bi \quad \textit{forma algebrica}$$

$$z = r(\cos\alpha + i sen\alpha) \quad \textit{forma trigonometrica}$$

Ma c'è anche una terza forma. Si dimostra che:

$$\textit{forma esponenziale}$$

$$z = re^{i\alpha}$$

$$\textit{formule di Eulero}$$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i sen\alpha \qquad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad sen\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Esercizio: Scrivere in forma algebrica il numero complesso dato in forma esponenziale $z=2e^{i\pi/6}$

Applichiamo la formula di Eulero:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i sen\alpha$$

Quindi:

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Esercizio: Scrivere in forma esponenziale il numero complesso dato in forma algebrica z=-2√3+2i

Trasformiamo la forma algebrica $a + bi$ in forma trigonometrica $r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Abbiamo $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, oppure $\alpha = \frac{11}{6}\pi$. Essendo $a < 0$ e $b > 0$, il punto corrispondente a $-2\sqrt{3} + 2i$ è nel secondo quadrante, quindi $\alpha = \frac{5}{6}\pi$. La forma trigonometrica del numero complesso $-2\sqrt{3} + 2i$ è:

$$4\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right).$$

Trasformiamo la forma trigonometrica in forma esponenziale $re^{i\alpha}$, dove $r = 4$ e $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, ossia:

$$4e^{i\frac{5}{6}\pi}.$$

Esercizio: Eseguire la moltiplicazione e la divisione tra i seguenti numeri complessi scritti in forma esponenziale:

$$z_1 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi} \qquad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Sfruttiamo la proprietà $re^{i\alpha} \cdot se^{i\beta} = r \cdot s \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$, tenendo conto che:

$$r = 5, \alpha = \frac{3}{4}\pi; s = 3, \beta = \frac{\pi}{6}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 5 \cdot 3e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)} = 15e^{i\frac{3\cdot 3\pi + 2\pi}{12}} = 15e^{i\frac{11}{12}\pi}.$$

Passiamo alla forma trigonometrica:

$$z_1 \cdot z_2 = 15\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{11}{12}\pi\right).$$

Analogamente, per il quoziente sfruttiamo la proprietà $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{i\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{5}{3}e^{i\frac{3\cdot 3\pi - 2\pi}{12}} = \frac{5}{3}e^{i\frac{7}{12}\pi} = \frac{5}{3}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{12}\pi\right).$$